Archiv
für
Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

herausgegeben

von

Professor Dr.-Ing. W. Rogowski
Aachen

X. Band

Mit zahlreichen Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1922

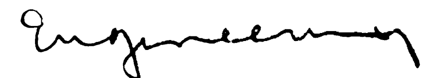
Namenverzeichnis.

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.

Archiv für Elektrotechnik

X. Band. | 1. u. 2. Heft | 1921.

Die Frequenzsprünge des Zwischenkreisröhrensenders bei primärer Gitterkopplung.



Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

1. Übersicht und Ziel. Wenn wir den stark gezeichneten Schwingungskreis Bild 1 mit einer Elektronenröhre verbinden, erhalten wir zwar nicht immer, aber doch unter gewissen Umständen ungedämpfte Schwingungen in ihm, deren Frequenz f_u mit der Eigenfrequenz f des Schwingungskreises übereinstimmt:

$$f_u = f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \qquad (1)$$

Die Bedingung für das „Anschwingen" der Röhre ist von Vallauri angegeben worden. Sie läuft im Grunde genommen darauf hinaus, daß eine genügend feste Gitterkoppelung vorhanden sein muß:

$$\frac{1}{C} S M_g \geqq R + \frac{L}{R_i C}$$

oder: (2)

$$S M_g \geqq R C + \frac{L}{R_i}.$$

M_g = Gegeninduktivität, Gitter-Schwingungskreis,
S = Steilheit } der Röhre,
R_i = innerer Widerstand } der Röhre,
R = Widerstand der Spule L.

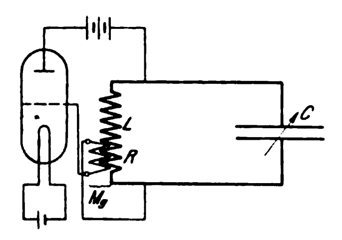


Bild 1. Schaltung des einfachen Röhrensenders.

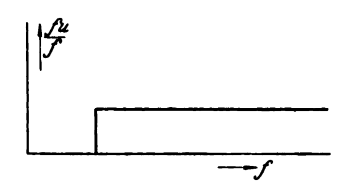


Bild 2. Röhrenfrequenz in Einheiten der Eigenfrequenz des Schwingungskreises.

Wir wollen annehmen, wir haben bei einer bestimmten Röhre (S und R_i = constans) eine bestimmte Gitterkoppelung eingestellt (M_g = constans) und es seien bei einer gewissen Einstellung unseres Kondensators (C Bild 1) Schwingungen vorhanden, also die Bedingung (2) erfüllt. Wir vergrößern nun unseren Kondensator, so daß C wächst, die Frequenz f aber abnimmt. Dann wird von einer bestimmten Kondensatorstellung ab die Bedingung (2) nicht mehr erfüllt sein, und es werden somit die Schwingungen erlöschen. In zeichnerischer Darstellung bringt dies Bild 2

zum Ausdruck, wo wir als Abszissen die Eigenfrequenz f, als Ordinaten die Frequenz f_u der erregten ungedämpften Schwingung in Einheiten der jeweiligen Eigenfrequenz f aufgetragen haben[1]).

Statt eines Schwingungskreises wollen wir nun zwei verwenden, die aufeinander induktiv einwirken (Zwischenkreisröhrensender Bild 3). Das Gitter sei zunächst aber nur mit dem primären Kreise gekoppelt. Jeder Schwingungskreis kann nun in zwei Eigenfrequenzen, den Koppelfrequenzen, schwingen, und jede Koppelfrequenz hat ihre besondere Koppeldämpfung. Die rasche Koppelschwingung ist stärker, die langsame schwächer gedämpft. Die genaue Berechnung der Koppelfrequenzen und Koppeldämpfungen aus den Eigenfrequenzen und Dämpfungen im ungekoppelten Zustand und aus der Koppelung, ist eine gelöste Aufgabe. Wenigstens wenn wir uns auf den praktischen Fall hinreichend schwach gedämpfter Schwingungen beschränken[2]). Welche von beiden Koppelschwingungen wird nun erregt, wenn wir das System nach Bild 3 an die Röhre anschließen? Diese Frage vom Standpunkt der Theorie aus zu beantworten, wird im folgenden unsere Aufgabe sein. Ich will zunächst angeben, was der Versuch zu ihr sagt:

Im allgemeinen wird von den beiden Koppelfrequenzen nur eine einzige erregt. Ist die sekundäre Kapazität C_2 sehr klein, die ungekoppelte Eigenfrequenz ω_2

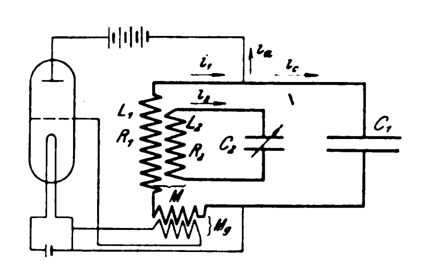


Bild 3. Zwischenkreisröhrensenders bei primärer Gitterkopplung und induktiver Kopplung der Schwingungskreise.

Bild 4. Röhrenfrequenz in Abhängigkeit von dem Sekundärkondensator C_2 (Bild 3). Ziehschleife.

sekundär sehr hoch, so kann nur die langsame Koppelschwingung entstehen. Wächst nun C_2, während alle übrigen Größen unverändert bleiben, so bleibt zunächst immer noch die langsame Koppelschwingung erhalten, bis bei hinreichend großer sekundärer Kapaziät plötzlich die langsame Koppelschwingung erlischt und dafür die rasche einsetzt. An dieser Stelle haben wir es daher mit einem Frequenzhochsprung zu tun. Wächst die sekundäre Kapazität noch weiter, so schwingt von nun an der Sender nur in der raschen Koppelschwingung.

Die Änderung der Röhrenfrequenz mit veränderlicher sekundärer Kapazität wird somit durch den Kurvenzug mit den Rechtspfeilen Bild 4 gegeben. Beim Vergleich mit Bild 2 ergibt sich, daß beim einfachen Schwingungskreis ein Abreißen der Schwingungen erfolgt, bei zwei gekoppelten Kreisen aber ein Umschlagen von einer Koppelfrequenz in die andere stattfinden kann.

Wir drehen jetzt den Kondensator rückwärts von ganz großen Werten zu kleinen. Dann erhalten wir rasche und langsame Koppelfrequenz in umgekehrter Reihenfolge. Aber etwas Neues tritt zu dem vorigen noch hinzu. Der Frequenzsprung, der diesmal von der raschen Koppelschwingung zur langsamen vor sich geht, also ein Frequenztiefsprung ist, tritt nicht bei

[1]) Das Abreißen und Einsetzen der Schwingungen erfolgt bekanntlich im Gegensatz zur Vallaurischen Theorie nicht ganz genau bei derselben Kapazität C (Näheres bei G. Möller, Die Elektronenröhren, Vieweg 1920. S. 86).

[2]) Rogowski, Archiv für Elektrotechnik IX. S. 427. — M. Wien, Annalen der Physik, 61, 151, 1897. — A. Oberbeck, Annalen der Physik, 55, 623, 1895.

der sekundären Kapazität OA wie vorhin beim Frequenzhochsprung, sondern später bei der kleineren Kapazität OB ein. Als Bild der Frequenzänderungen des Röhrengenerators ergibt sich jetzt der durch den gestrichelten Pfeil bezeichnete Kurvenzug Bild 4. Der Frequenzsprung, der vorher bei A lag, ist jetzt nach B „gezogen" worden. Den Frequenzsprung mit samt seiner Verlagerung nennt man auch wohl das „Ziehen" des Zwischenkreisröhrensenders.

Die Erscheinungen sind nicht immer so einfach, wie hier beschrieben. Bisweilen ergeben sich vor dem Springen Frequenzgebiete, in denen die Schwingungen ganz aussetzen. Wir werden hierauf später noch eingehender zurückkommen.

Vom praktischen Standpunkt aus geurteilt ist das „Ziehen" eine höchst unangenehme Eigenschaft des Zwischenkreisröhrensenders. Die Erklärung seiner Eigentümlichkeiten und ihre zahlenmäßige Beherrschung kann zurzeit als eine wichtige Aufgabe der drahtlosen Telegraphie angesehen werden. Erst wenn diese Aufgabe gelöst sein wird, wird man eine sichere Grundlage für den Bau von Zwischenkreisröhrensendern haben.

Es ist daher natürlich, daß man bei dieser Wichtigkeit des Problems sich bereits mehrfach mit ihm befaßt hat. Von M. Wien, V. Vogel[1]), Seitz[2]), Glage und Edler[3]) liegen eine Reihe von Versuchsergebnissen vor, von Harms[4]) und Heegner[5]), Burstyn[6]), Möller[7]) theoretische Betrachtungen. Diese Arbeiten, auf die später noch genauer einzugehen sein wird, haben manche wertvolle Einsicht in die uns interessierende Frage gebracht. Dennoch läßt sich nicht verkennen, daß eine bequem zu handhabende Theorie, die die bisher bekannten Einzelergebnisse sichtet, zusammenfaßt und dadurch den Einblick erleichtert, noch nicht da ist. Vielleicht trägt hierzu das folgende bei.

2. Das Ziehen bei unendlich großem Röhrenwiderstand. Wir wollen zunächst den inneren Widerstand der Senderröhre vernachlässigen. Mit den in Bild 3 eingetragenen Bezeichnungen liegt dann nach Vallauri und Heegner in folgenden Gleichungen der Schlüssel zu den uns interessierenden Fragen:

$$i_a = i_1 - i_c \tag{3}$$

$$e_g = M_g \frac{di_1}{dt} \tag{4}$$

$$i_a = S e_g \tag{5}$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_C \, dt + M \frac{di_2}{dt} = 0 \tag{6}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt + M \frac{di_1}{dt} = 0 \tag{7}$$

Aus (6), (3), (5) und (4) folgt:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + M \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 \, dt = \frac{1}{C_1} \int i_a \, dt = \frac{S M_g}{C_1} i_1 \tag{8}$$

Schreiben wir (7) und (8) in folgender Form untereinander:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + \left(R_1 - \frac{S M_g}{C_1}\right) i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 \, dt + M \frac{di_2}{dt} = 0 \tag{9}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 \, dt + M \frac{di_1}{dt} = 0, \tag{10}$$

[1]) M. Wien und V. Vogel. Annalen der Physik, 1920, S. 660.
[2]) Seitz, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie, 15, 457.
[3]) Glage und Edler, Archiv für Elektrotechnik IX, 20.
[4]) F. Harms, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie, 15, 442.
[5]) Heegner, Archiv für Elektrotechnik IX, 127.
[6]) Burstyn, ETZ. 1920, 951.
[7]) Möller, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie, 16, 444.

so erhalten wir die Gleichungen zweier sich selbst überlassener induktiv gekoppelter Schwingungskreise mit den Widerständen

$$r_1 = R_1 - \frac{S M_g}{C_1} \tag{11}$$

$$r_2 = R_2. \tag{12}$$

Diese Widerstände wollen wir den praktischen Verhältnissen entsprechend als klein voraussetzen. Auf unseren Zwischenkreisröhrensender können wir daher die unter dieser Voraussetzung entwickelte Theorie der Koppelschwingungen zweier Kreise anwenden.

Sich selbst überlassen oder nach irgend einem elektrischen Anstoß wird unser Zwischenkreisröhrensender in zwei Schwingungen schwingen, von denen, so lange r_1 positiv bleibt, die raschere die stärkere, die langsamere die schwächere Dämpfung hat (vgl. oben).

Uns interessiert vor allem die Frage, wann wird die Dämpfung einer dieser Koppelschwingungen Null oder gar negativ. Dies ist leicht zu sagen. Wie ich früher abgeleitet habe, setzt sich die Koppeldämpfung aus einer Mischung der Einzeldämpfungen $\frac{r_1}{2 L_1}$ und $\frac{r_2}{2 L_2}$ zusammen. Jeder Einzeldämpfung ist dabei ein bestimmtes Gewicht beizulegen, das selber eine bekannte Funktion der ungekoppelten Eigenfrequenzen und der Kopplung ist.

Für die langsame Koppelschwingung schreiben wir den Dämpfungsfaktor

$$\alpha = \frac{r_1}{2 L_1} u_1 + \frac{r_2}{2 L_2} u_2, \tag{13}$$

für die raschere Koppelschwingung entsprechend

$$\beta = \frac{r_1}{2 L_1} U_1 + \frac{r_2}{2 L_2} U_2. \tag{14}$$

Der Volllständigkeit halber sei ausgeführt, daß[1])

$$u_1 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right] \tag{15}$$

$$u_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]$$

$$U_1 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]$$

$$x = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \tag{16}$$

ist und daß die Beziehungen bestehen

[1]) Vgl. Rogowski, Archiv für Elektrotechnik, IX, S. 432.

$$u_2(x) = u_1\left(\frac{1}{x}\right) \tag{17}$$

$$U_2 = \frac{1}{\sigma} - u_2; \quad U_1 = \frac{1}{\sigma} - u_1. \tag{18}$$

Im übrigen, namentlich in bezug auf Näherungsfunktionen und zeichnerische Darstellung der Gewichte u und U muß auf die frühere Arbeit verwiesen werden. Bei der Dämpfung unseres Zwischenkreisröhrensenders haben wir nun statt r_1 und r_2 die Werte

$$R_1 - \frac{S M_g}{C_1} \text{ und } R_2$$

zu setzen.

Die Dämpfung der langsameren Koppelschwingung ist daher null oder negativ, wenn

$$\frac{R_1}{2L_1}u_1 + \frac{R_2}{2L_2}u_2 - \frac{S M_g}{C_1 \cdot 2L_1}u_1 \leqq 0 \tag{19}$$

oder wenn

$$\frac{S M_g}{C_1\, 2L_1} \geqq \frac{R_1}{2L_1} + \frac{R_2}{2L_2}\,\frac{u_2}{u_1} \tag{20}$$

oder wenn

$$\left(\frac{S M_g}{C_1\, 2L_1} - \frac{R_1}{2L_1}\right)\frac{2L_2}{R_2} \geqq \frac{u_2}{u_1} \tag{21}$$

$$\frac{S M_g}{C_1}\,\frac{L_2}{R_2 L_1} - \frac{R_1 L_2}{L_1 R_2} \geqq \frac{u_2}{u_1}. \tag{22}$$

Ganz entsprechend lautet die Bedingung für das Zustandekommen oder die Möglichkeit des Entstehens der rascheren Koppelschwingung

$$\frac{S M_g}{C_1}\,\frac{L_2}{R_2 L_1} - \frac{R_1 L_2}{L_1 R_2} \geqq \frac{U_2}{U_1}. \tag{23}$$

Bevor wir den Inhalt unserer Formeln aufdecken, wollen wir die Verhältnisse $\frac{u_2}{u_1}$ und $\frac{U_2}{U_1}$ betrachten, die nach dem Vorigen Funktionen der Streuung (Koppelung) und des Verhältnisses $x = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ der „ungekoppelten" Eigenfrequenzen sind.

Bei sehr loser Koppelung ist für kleine Werte[1]) von $x\,(x < 1)$

$$u_2 = 1; \quad u_1 = 0; \quad \frac{u_2}{u_1} = \infty.$$

Wächst x über 1 hinaus, so ist umgekehrt $u_2 = 0$; $u_1 = 1$. Das Verhältnis $\frac{u_2}{u_1}$ springt daher bei außergewöhnlich loser Koppelung für den Wert $x = 1$ (Resonanz) von sehr hohen Werten auf Null. Die Kurve für $\frac{u_2}{u_1}$ hat daher bei sehr loser Koppelung L-Form.

Ist die Koppelung außergewöhnlich fest, so kann man

$$u_2 = \frac{1}{(1 + x^2)^2} \tag{24}$$

und infolgedessen $u_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{x^4}{(1 + x^2)^2}$ schreiben.

---

[1]) Vgl. Rogowski, a. a. O.

Es ergibt sich daher bei sehr fester Koppelung

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{x^4}, \tag{25}$$

also eine bei kleinen Werten von x sehr steil ansteigende, bei größeren Werten rasch abfallende Kurve (Bild 5).

Bei Zwischenwerten der Koppelung erhalten wir entsprechende Zwischenkurven, die für $k^2 = 0{,}5$ und $k^2 = 0{,}1$ in Bild 5 ebenfalls stark eingetragen sind. Alle diese Kurven müssen wegen der Beziehung (17) durch den Punkt $x = 1$; $\frac{u_2}{u_1} = 1$ gehen. Wenn die Kurven für $\frac{u_2}{u_1}$ auch nicht gerade unabhängig von der Koppelung sind, so ist doch ihre Änderung mit ihr recht bescheiden.

Wir wenden uns jetzt dem Verhältnis $\frac{U_2}{U_1}$ zu, das über das Anschwingen der rascheren Koppelschwingung entscheidet. Für außergewöhnlich lose Koppelung ($k^2 = 0$; $\sigma = 1$) ist für Werte von x unterhalb 1 das Gewicht $U_2 = 0$; $U_1 = 1$, somit

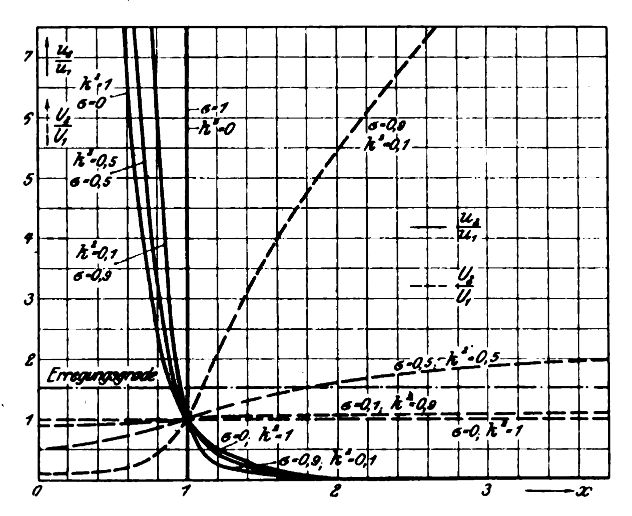


Bild 5. Das Verhältnis der Dämpfungsgewichte.

$\frac{U_2}{U_1} = 0$. Bei Werten oberhalb 1 ist gerade umgekehrt $U_2 = 1$; $U_1 = 0$ und somit $\frac{U_2}{U_1} = \infty$. Es muß somit die Kurve $\frac{U_2}{U_1}$ für außergewöhnlich lose Koppelung ⅃-Form haben. Auch hier liegt wieder bei $x = 1$ ein Sprung vor.

Für außergewöhnlich feste Koppelung ($k^2 = 1$; $\sigma = 0$) ist $U_2 = U_1$, und somit $\frac{U_2}{U_1} = 1$; es artet somit für diesen Grenzfall die Kurve $\frac{U_2}{U_1}$ in eine Parallele zur Abszissenachse im Abstande 1 aus.

Für Zwischenwerte der Koppelung erhalten wir wieder Zwischenkurven (gestrichelt in Bild 5 eingetragen). Es ergibt sich jetzt im Gegensatz zu den $\frac{u_2}{u_1}$-Kurven eine starke Abhängigkeit von der Koppelung. Für die Koppelungen $k^2 = 1$; 0,5; 0,1; 0 sind die Kurven in Bild 5 eingetragen. Hervorzuheben ist noch, daß die $\frac{U_2}{U_1}$-Kurven bei $x = 0$ mit Werten unterhalb 1, aber höher als Null beginnen und bei $x = \infty$ mit Werten über 1, aber unterhalb ∞ endigen. Auch hier ist

wegen der Beziehungen (17) und (18) der Punkte $x = 1$; $\frac{U_2}{U_1} = 1$ allen Kurven gemeinsam.

Wir ziehen nun in Bild 5 im Abstande $\frac{S M_g}{C_1} \frac{L_2}{R_2 L_1} - \frac{R_1 L_2}{L_1 R_2}$ [vgl. (22) und (23)] eine Parallele zur Abszissenachse.

Für M_g gleich Null schneidet sie die negative Ordinatenachse bei $-\frac{R_1 L_2}{L_1 R_2}$. Mit wachsendem Wert von M_g verschiebt sie sich aus dieser Anfangslage nach oben hin. Alle Kurvenabschnitte, die diese Erregungsgrade unter sich läßt, erfüllen die Bedingung (22) oder (23) und für sie kann daher eine Schwingungserregung einsetzen. Wollen wir wissen, welche Schwingung eintritt, so brauchen wir nur zu den zugehörigen Werten von x in das Bild 6 zu gehen und dort die Schwingungsfrequenz abzugreifen oder sie aus den Formeln Archiv für Elektrotechnik IX. S. 429 und 430 zu berechnen.

Fassen wir zunächst wieder den Grenzfall außergewöhnlich loser Koppelung ins Auge, für den bei der langsamen Koppelschwingung die L-Kurve, bei der rascheren Koppelschwingung die J-Kurve gilt. Sobald die Erregungsgrade die Abzissenachse überschreitet, also wenn

$$\frac{S M_g}{C_1} \geqq R_1 \tag{26}$$

ist, trifft sie auch die senkrechten Äste dieser Kurven. In Worten drückt somit unsere Bedingung im Zusammenhang mit Bild 5 und 6 folgendes aus: Solange x zwischen unendlich und 1 liegt, der sekundäre Kondensator somit von kleinen Kapazitätswerten bis in die Resonanzlage gedreht wird, wird die langsame Koppelwelle erregt. Sobald die Resonanzstelle überschritten wird, erlischt die langsame Koppelwelle, dafür tritt bis $x = 0$ (sekundärer Kurzschluß) die raschere Koppelschwingung in Erscheinung. Nun ist für außergewöhnlich lose Koppelung für $x = 1$ bis $x = \infty$ die langsamere Koppelschwingung gleich der ungekoppelten Eigenfrequenz ω_1 des Primärkreises; von $x = 1$ bis $x = 0$ stimmt die raschere Koppelschwingung mit dieser Frequenz ω_1 überein (vgl. Bild 6). Für außergewöhnlich lose Koppelung wird somit, gleichgültig welche Stellung dem Sekundärkondensator gegeben wird, die Eigenfrequenz des Primärkreises erregt, wenn die Gitterkoppelung ein gewisses Maß überschritten hat. Hiermit haben wir den Anschluß an die Ergebnisse der Vallauschen Theorie für den einfachen Schwingungskreis erreicht.

Die Koppelung primär-sekundär sei nun nicht außergewöhnlich lose, aber immerhin noch als lose zu bezeichnen, etwa $k^2 = 0,1$ ($\sigma = 0,9$) (Bild 5 u. 7), wenn die Gitterkoppelung nun den kritischen Wert von vorhin

$$M_g = \frac{R_1 C_1}{S} \tag{27}$$

übersteigt, dann wird bei kleinen Werten des sekundären Kondensators die langsame Koppelschwingung erregt werden, da gewisse Teile der $\frac{u_2}{u_1}$-Kurve für $k^2 = 0,1$ unterhalb der in geringem Abstand von der Abszissenachse zu ziehenden Erregungsgraden zu liegen kommen. Aber bereits vor Erreichen der Resonanz ($x = 1$) wird die $\frac{u_2}{u_1}$-Kurve für $k^2 = 0,1$ über diese Erregungsgrade hinaussteigen müssen, was besagt, daß die Schwingungen wieder erlöschen. Wir erhalten somit von einem Werte x oberhalb 1 ab an Aussetzen der Schwingungen, das, wenn die Erregungsgerade tief genug liegt, bis $x = 0$ anhalten kann. Bei loser Koppelung primärsekundär wird somit bei genügend schwacher Gitterkoppelung nur die langsame



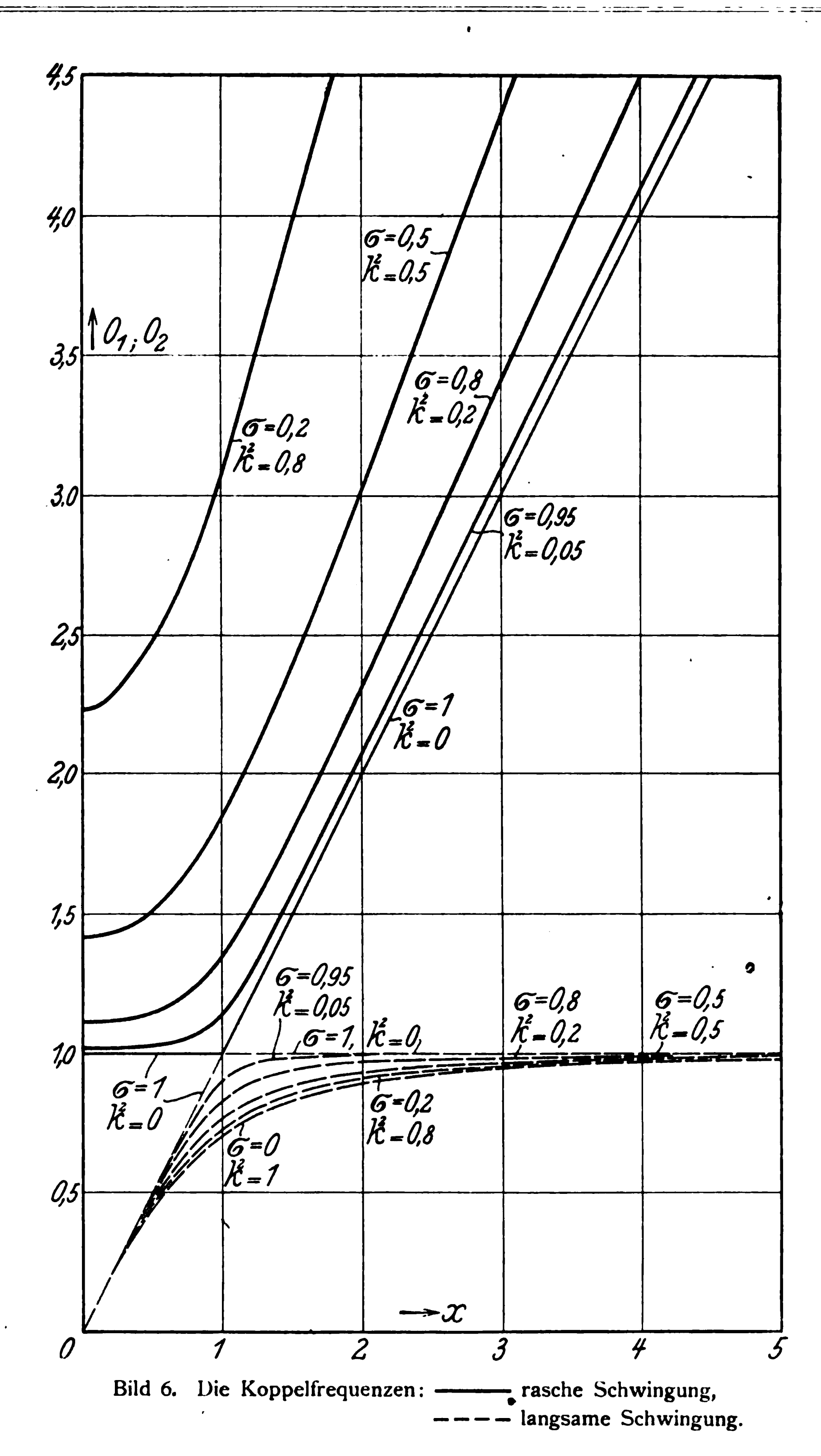


Bild 6. Die Koppelfrequenzen: ——— rasche Schwingung,
– – – – langsame Schwingung.

Beispiel: Ungekoppelte Eigenfrequenzen $\omega_1 = 10^5 \sec^{-1}$, $\omega_2 = 2 \cdot 10^5 \sec^{-1}$. Koppelung: $k^2 = 0{,}2$ (Streuungskoeffizient $\sigma = 0{,}8$); $x = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$; $O_1 = 2{,}3$; $O_2 = 0{,}97$; $A_1 = 2{,}3 \cdot 10^5 \sec^{-1}$; $\Omega_2 = 0{,}97 \cdot 10^5 \sec^{-1}$.

Koppelschwingung erregt und diese reißt oberhalb der Resonanz ab. Die raschere Koppelwelle wird überhaupt nicht in Erscheinung treten (Bild 7).

Wenn wir wieder die Gitterkoppelung etwas fester gestalten, so rückt die Erregungsgerade höher hinauf. Für die langsame Koppelwelle tritt hierdurch insofern

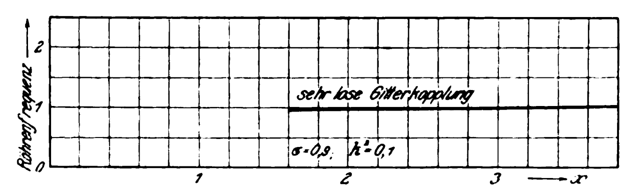


Bild 7. Röhrenfrequenz bei sehr loser Gitterkopplung. Die langsame Koppelschwingung reißt ab, die rasche wird nicht erregt.

eine Änderung auf, als sich der Bereich ihres Bestehens weiter nach der Resonanz hin ausdehnt. Es erfolgt oberhalb der Resonanz aber wieder ein Abreißen der Schwingung, dann kommt eine Frequenzpause und schließlich tritt jetzt bei genügend

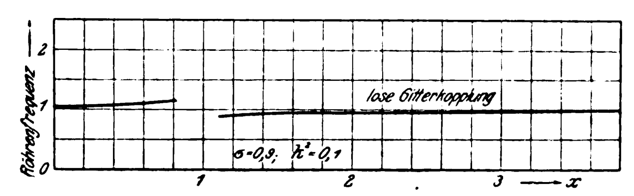


Bild 8. Röhrenfrequenz bei loser Gitterkopplung. Die langsame Schwingung reißt oberhalb der Resonanz ab, die rasche wird unterhalb der Resonanz erregt. Frequenzlücke.

kleinen Werten von x auch die rasche Koppelschwingung auf, da die Erregungsgerade bei genügender Höhe über der Abszissenachse auch die $\frac{U_2}{U_1}$-Kurve für $k^2 = 0{,}1$ wird schneiden können. Die erregten Schwingungen in Abhängigkeit von der sekundären „ungekoppelten" Eigenfrequenz x sind für diesen Fall in Bild 8 aufgetragen.

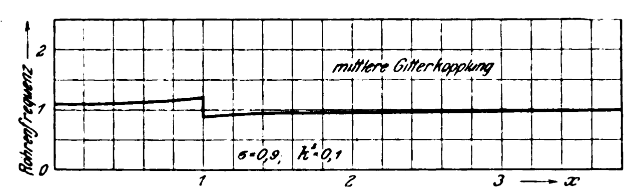


Bild 9. Mittlere Gitterkopplung. Frequenzsprung in Resonanzlage. Eine Frequenzlücke ist nicht mehr vorhanden.

Die Gitterkopplung wachse weiter; die Erregungsgrade verschiebt sich dadurch aufwärts. Dann ändert sich nichts an dem Beschriebenen, nur zieht sich das Gebiet der Schwingungsstille in der Nähe der Resonanz immer mehr zusammen.

Ist die Gitterkoppelung bereits so fest geworden, daß die Erregungsgrade im Abstande 1 der Abszissenachse parallel läuft, so gibt es überhaupt keine Schwingungslücke mehr. Es tritt im Resonanzpunkt $x = 1$ ein Hochsprung von der langsamen zur raschen Koppelschwingung ein (Bild 9).

Wir koppeln das Gitter noch fester an den Primärkreis. Die Erregungsgerade läuft nun, wie in Bild 5 gezeichnet, in größeren Entfernungen als eins der Abszissenachse parallel. Nun kann die langsame Koppelwelle, wenn wir den Sekundärkondensator von kleinen Werten zu großen drehen, noch unterhalb der Resonanzlage ($x \leqq 1$) bestehen. Die rasche Koppelschwingung kann, wenn der Kondensator

von großen zu kleinen Werten der Kapazität verdreht wird, noch dann angeregt werden, wenn $x > 1$ ist, also noch oberhalb der Resonanzlage. In der Umgebung der Resonanzlage gibt es ein Gebiet, wo beide Koppelschwingungen gleich berechtigt sein können, für den Fall, daß in diesem Gebiet das Einschalten der Röhre vor

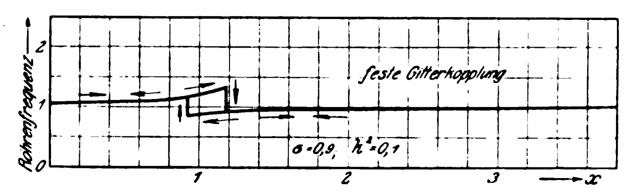


Bild 10. Feste Gitterkopplung. Die Ziehschleife hat sich ausgebildet.

sich geht. Bei stetigem Vergrößern der sekundären Kapazität haben wir unterhalb der Resonanz den Frequenzsprung von der einen zur andern Koppelschwingung, bei stetigem Verkleinern haben wir ihn oberhalb. Es kommt somit jetzt die regelrechte Ziehschleife heraus (vgl. oben). (Bild 10 und 11.)

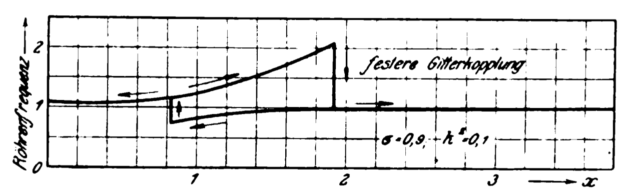


Bild 11. Festere Gitterkopplung. Die Ziehschleife verbreitert sich.

Bei weiter wachsender Gitterkoppelung zieht sich die Ziehschleife immer weiter auseinander. Sie schließt den Resonanzpunkt ein, umfaßt ihn aber unsymmetrisch. Es ändert sich, in Werten der Frequenz x gemessen, die Hochsprungstelle unterhalb der Resonanz nur sehr wenig, dagegen rückt die Tiefsprungstelle oberhalb der Resonanz immer weiter von der Resonanz ab.

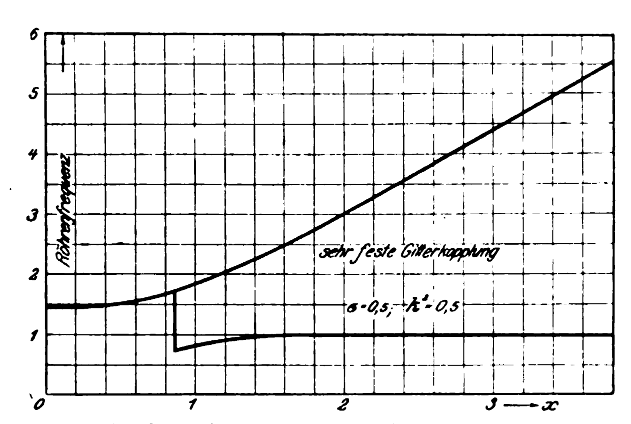


Bild 12. Sehr feste Gitterkopplung. Die Ziehschleife artet aus.

Wird die Koppelung primär-sekundär fester gewählt, so ergeben sich genau die gleichen Erscheinungen. Nur tritt die rasche Koppelschwingung zum ersten Mal bei höheren Gitterkoppelungen auf und geht die Auseinanderzerrung der Ziehschleife viel rascher vor sich. Von einer gewissen Gitterkoppelung ab artet die Ziehschleife aus, indem der Tiefsprung überhaupt nicht mehr stattzufinden braucht (Bild 11).

Man darf indessen bei den mitgeteilten Bildern niemals aus dem Auge verlieren, daß sie die äußersten Lagen der Frequenzsprünge festlegen. Ob der Fre-

quenzsprung wirklich an den äußersten Grenzen der gezeichneten Bereichen erfolge, darüber kann unsere Rechnung nichts aussagen. Die Frage läßt sich nur durch tiefer gehende Untersuchungen oder durch den Versuch beantworten.

3. Berücksichtigung des endlichen Widerstandes der Röhre. Ist der innere Widerstand nicht unendlich groß, sondern endlich, so tritt an Stelle der Gleichung (4) und (5) die folgende:

$$i_a = S M_g \frac{di_1}{dt} + \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + M \frac{di_2}{dt}\right) \frac{1}{R_i}. \qquad (28)$$

Vernachlässigt man das Verhältnis $\frac{R_1}{R_i}$ gegen 1 und den Wert $\frac{1}{C_1 R_i} M \frac{di_2}{dt}$ gegen $M \frac{d^2 i_2}{dt^2}$, so erhält man die folgenden Gleichungen, die nun für den Ablauf der Ströme maßgebend sind:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left[R_1 - \frac{M_g S}{C_1} + \frac{L_1}{C_1 R_i}\right] \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} i_1 + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0 \qquad (29)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt_2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0. \qquad (30)$$

Sie entsprechen zwei freischwingenden Systemen mit den Kapazitäten C_1; C_2, den Induktivitäten L_1; L_2 und den Widerständen

$$r_1 = R_1 - \frac{M_g S}{C_1} + \frac{L_1}{C_1 R_i} \qquad (31)$$

$$r_2 = R_2.$$

Im wesentlichen kommen wir daher zu dem gleichen Ergebnis wie früher, nur tritt an Stelle des Widerstandes R_1 der etwas größere Widerstand

$$R_1 + \frac{L_1}{C_1 R_i}. \qquad (32)$$

Qualitativ erhalten wir keine Änderungen unserer Aussagen. Quantitativ liegen insofern die Verhältnisse anders, als die Gitterkoppelung zur Erzielung der Bilder 6—11 etwas größer sein muß als früher. Die Bedingung für das Einsetzen der langsamen Doppelschwingung lautet jetzt:

$$\frac{S M_g}{C_1} \frac{L_2}{R_2 L_1} - \frac{L_2 \left(R_1 + \frac{L_1}{C_1 R_i}\right)}{R_2 L_1} \leqq \frac{u_2}{u_1}. \qquad (33)$$

Für die rasche Koppelschwingung ist entsprechend:

$$\frac{S M_g}{C_1} \frac{L_2}{R_2 L_1} - \frac{L_2 \left(R_1 + \frac{L_1}{C_1 R_i}\right)}{R_2 L_1} \leqq \frac{U_2}{U_1} \qquad (34)$$

zu schreiben.

4. Äußerste Lagen der Frequenzsprünge. Wir wollen jetzt rechnerisch die Sprung- und Aussetzerstellen ermitteln. Wir legen sie am besten durch Angabe der zugehörigen Werte x fest.

Für die langsame Koppelschwingung haben wir zur Bestimmung von x die Forderung (33).

$$\frac{u_2}{u_1} = p,$$

für die rasche Koppelwelle entsprechend:

$$\frac{U_2}{U_1} = p.$$

$$p = \frac{S M_g \cdot L_2}{C_1 R_2 L_1} - \frac{L_2 \left(R_1 + \frac{L_1}{C_1 R_i}\right)}{R_2 L_1}. \tag{35}$$

Setzen wir zunächst für u_1 und u_2 die früher ermittelten Ausdrücke ein, so erhalten wir:

$$\frac{1 - \dfrac{1 - \dfrac{2\sigma}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}}{1 - \dfrac{1 - \dfrac{2\sigma x^2}{(1 + x^2)}}{\sqrt{1 - \dfrac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}} = p. \tag{36}$$

Man leitet nun leicht her:

$$-\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} = \frac{2\sigma}{(1 + x^2)(p - 1)}[p x^2 - 1] - 1. \tag{37}$$

und hieraus durch Quadrieren und Ordnen:

$$x^4 - \frac{2\sigma x^2}{1 - p(1 - \sigma)} + \frac{p - (1 - \sigma)}{p[1 - p(1 - \sigma)]} = 0. \tag{38}$$

Hieraus folgt

$$x^2 = \frac{\sigma}{1 - p(1 - \sigma)} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{[1 - p(1 - \sigma)]^2} - \frac{p - 1 + \sigma}{p[1 - p(1 - \sigma)]}} \tag{39}$$

oder

$$x^2 = \frac{\sigma \pm (p - 1)\sqrt{\dfrac{1 - \sigma}{p}}}{1 - p(1 - \sigma)}. \tag{40}$$

Wir können nur positive Werte für x^2 gebrauchen. Solche ergeben für kleine Werte von p der Ausdruck (40), wenn das negative Vorzeichen der Wurzel gegeben wird.

Nun wechselt mit wachsendem p der Nenner unseres Bruches (Gleichung 40) das Vorzeichen, wenn

$$p = \frac{1}{1 - \sigma} \tag{41}$$

wird. Aber gerade dann geht auch der Zähler, wie man leicht nachweist, bei negativem Wurzelwert gerade von positiven Werten zu negativen über. D. h., wählen wir das negative Vorzeichen, so ist dauernd x^2, wie wir fordern müssen, positiv. Somit liegen die besonderen Punkte, die Sprungstellen oder die Verlöschungen für die langsame Koppelfrequenz bei

$$x = X_2 = \sqrt{\frac{\sigma - (p - 1)\sqrt{\dfrac{1 - \sigma}{p}}}{1 - p(1 - \sigma)}}. \tag{42}$$

Wir führen die gleiche Rechnung für die rasche Koppelwelle aus. Nun geht der Wert von U_1 aus dem Wert von u_1 hervor durch Vertauschung des Wurzelvorzeichens in der Formel (15); genau so folgt auch U_2 aus u_2; somit muß die Forderung (34) auf die folgende Gleichung führen:

$$+\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} = \frac{2\sigma}{(1 + x^2)(p - 1)}[p x^2 - 1] - 1, \tag{43}$$

die aus (37) ebenfalls durch Änderung des Wurzelvorzeichens hervorgeht. Beim Quadrieren von (43) wird aber der Unterschied im Vorzeichen aufgehoben, so daß

wir auch für die rasche Koppelwelle zu genau demselben Ausdruck (40) (wie früher) kommen. Da das negative Vorzeichen in (40) nicht mehr in Frage kommt, da wir es bereits zur Berechnung von X_2 benützt haben, so bleibt für X_1 nur das positive Vorzeichen übrig. Es ist somit:

$$x = X_1 = \sqrt{\frac{\sigma + (p-1)\sqrt{\frac{1-\sigma}{p}}}{1 - p(1-\sigma)}}. \tag{44}$$

Der Zähler wechselt sein Vorzeichen für

$$p = 1 - \sigma. \tag{45}$$

Der Nenner tut dies für

$$p = \frac{1}{1-\sigma}. \tag{46}$$

In dem Gebiete $1 - \sigma \leqq p \leqq \frac{1}{1-\sigma}$ ergeben sich auch bei positivem Wurzelwert reelle

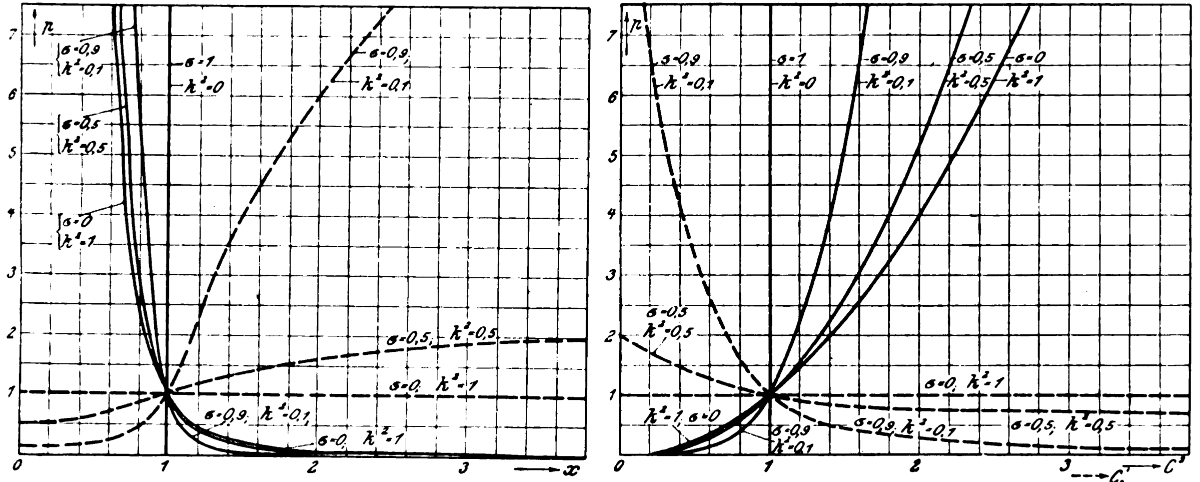


Bild 13. Die Lage der Frequenzsprünge und der Frequenzeinsetzer ausgedrückt durch die ungekoppelte sekundäre Eigenfrequenz.

Bild 14. Die Lage der Frequenzsprünge und der Frequenzeinsetzer ausgedrückt durch die sekundäre Kapazität.

Werte für X_1. Liegt p außerhalb dieses Gebietes, so ist der Ausdruck unter der Wurzel in (44) negativ. Daselbst können daher für die rasche Koppelwelle keine Singularitäten vorhanden sein.

Es ist von gewissem Interesse statt der Werte X_1 und X_2 die entsprechenden Werte der sekundären Kapazität festzustellen. Denn diese können beim Versuch sofort abgelesen werden. Nun gilt die Beziehung

$$X_2^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{1}{L_2 C_2 \omega_1^2} \tag{47}$$

somit ergeben sich folgende Kapazitätswerte, an denen der Zwischenkreisröhrensender Besonderheiten aufweist; für die langsame Koppelwelle:

$$C_2' = \frac{1}{L_2 \omega_1^2} \frac{[1 - p(1-\sigma)]}{\left[\sigma - (p-1)\sqrt{\frac{1-\sigma}{p}}\right]}. \tag{48}$$

für die rasche Koppelwelle:

$$C_2 = \frac{1}{L_2 \omega_1^2} \cdot \frac{[1 - p(1 - \sigma)]}{\sigma + (p - 1)\sqrt{\frac{1 - \sigma}{p}}}. \tag{49}$$

Wir prüfen zunächst unsere Ausdrücke (42) und (44) in zwei Hauptfällen durch Vergleich mit den Ergebnissen, die wir aus dem Bilde 5 gezogen haben. Ist $\sigma = 1$, so hat X_1 oder X_2 ebenfalls diesen Wert [vgl. (42) und (44).] Ist $p = 1$, so nehmen X_1 und X_2 wiederum den Wert 1 an. Dies ist im Einklang mit dem früher Gefundenen (vgl. S. 8).

Mit den Formeln (42), (44), (48) und (49) beherrschen wir die Lage der Tonlücken und Tonsprünge völlig. Dennoch ist es zweckmäßig, sich ihren Inhalt auch zeichnerisch vor Augen zu führen. Zu dem Zweck sind die Bilder 13 und 14 entworfen worden. In Bild 13 ist die ungekoppelte sekundäre Frequenz, bei der die Besonderheiten erfolgen, aufgetragen in Abhängigkeit von der Größe p, die wiederum ein Maß für die Gitterkoppelung ist. Sie stimmt natürlich mit Bild 5 überein. Da bei Prüfung der Theorie durch den Versuch nicht unmittelbar die ungekoppelten Eigenfrequenzen, sondern die sekundäre Kapazität abgelesen wird, so habe ich auch diese in Bild 14 in Abhängigkeit von p eingetragen. Aus diesem Bild ergibt sich folgendes: Ist p größer wie eins, haben wir es, also nur mit Frequenzsprüngen und keinen Frequenzlücken zu tun, so erfolgen die Sprünge nicht symmetrisch zur Resonanzkapazität. Selbst bei loser Koppelung entfernt sich von der Resonanzstelle der Hochsprung rascher nach tieferen Werten der Kapazität als der Tiefsprung nach höheren Werten. Dies verschärft sich, je fester die Koppelung ist. Bei recht fester Koppelung erfolgt der Hochsprung immer nahe bei der Resonanzkapazität, der Tiefsprung rückt rasch sehr weit von der Resonanzstelle weg.

5. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren. Unsere Rechnung steht mit Versuchen von Seitz, von M. Wien u. E. Vogel, von Glage und Edler qualitativ im Einklang. Leider reichen die gemachten Angaben zu einer zahlenmäßigen Nachprüfung nicht aus. Es muß hervorgehoben werden, daß von Wien und Vogel Frequenzlücken (vgl. Bild 8) beobachtet wurden[1]).

Die Herren Harms, Burstyn und Möller fassen die Aufgabe folgendermaßen an:

Zunächst denken sie sich in einem der beiden gekoppelten Schwingungskreise eine periodische elektromotorische Kraft. Beide Schwingungskreise zusammen wirken nun so, als ob sich diese elektromotorische Kraft in einem einzelnen Ersatzschwingungskreis austobe, dessen Induktivität und Widerstand aus der Transformatortheorie bekannt sind. Auf den Ersatzschwingungskreis werden nun die durch die Vallaurische Theorie bekannten oder im Anschluß an ihr entwickelten Bedingungen für das Anschwingen übertragen. Dieser Weg kann nicht genau zu unseren Ergebnissen führen, wenn auch die Abweichungen im allgemeinen nicht bedeutend sein werden.

Die Heegnersche Arbeit hat mit der vorliegenden den Ausgangspunkt gemeinsam. Indessen führt Heegner im Verlauf seiner Rechnungen die Voraussetzung ein, daß die Dämpfung wenigstens einer der beiden Kopplungsschwingungen Null sein solle. Diese Voraussetzung ist nur erfüllt, wenn die Gitterkopplung ein gewisses Maß überschreitet und die Erregungsgrade (Bild 5) im Abstande Eins von Abszissenachse verläuft.

Mit der vorliegenden Arbeit dürfte der Vallaurische Ansatz zum erstenmale für den Zwischenkreisröhrensender folgerichtig durchgeführt sein. Hervorzuheben ist noch, daß sie nur für den Fall vorherrschender Kopplung gilt, für den auch die benutzte Kopplungstheorie zugeschnitten ist.

[1]) Ann. d. Physik 1920. **62,** S. 655.



Der Zwischenkreisröhrensender bei sekundärer Gitterkopplung.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Geschichtliche Übersicht und Ziel. In einer früheren Arbeit habe ich das Verhalten des Zwischenkreisröhrensenders rechnerisch untersucht für den Fall reiner primärer Gitterkopplung. Es ist Interesse dafür vorhanden, das gleiche auch für reine sekundäre Gitterkopplung zu tun. Über das Qualitative bei dieser Art von Gitterkopplung sind wir durch eine experimentelle Arbeit von Wien und Vogel[1]) unterrichtet:

Bei reiner sekundärer Gitterkopplung regen wir nur eine der Koppelschwingungen der beiden Stromkreise an. Je nach dem, wie wir die Klemmen der Gitterspulen mit Gitter und Kathode verbinden, erhalten wir einmal die langsamere, das andere Mal die rasche Koppelschwingung. Die Frequenz macht keine Sprünge und ändert sich, wenn die Schwingung nicht erlischt, mit Änderung der Konstanten der beiden Schwingungskreise, namentlich mit der Größe des sekundären Kondensators stetig.

Das bei reiner primärer Gitterkopplung störende „Ziehen" verschwindet somit bei sekundärer Gitterkopplung ganz.

Unser Ziel wird im folgenden sein, dies Verhalten des Zwischenkreisröhrensenders vom Standpunkte der Theorie aus zu behandeln und jene qualitativen Ergebnisse durch zahlenmäßige Angaben zu ergänzen.

1. Vallaurischer Ansatz. Die Zusatzdämpfung. Wir erleichtern uns die Betrachtung zunächst dadurch, daß wir den inneren Widerstand R_i der Röhre unendlich groß annehmen. Am Schluß der Arbeit werden wir von dieser Voraussetzung absehen. Es wird sich zeigen, daß an den für unendlich großen Röhrenwiderstand gültigen Ergebnissen nur geringfügige Verbesserungen angebracht werden müssen. Mit den in Bild 1 eingeschriebenen Bezeichnungen lauten die Differentialgleichungen unserer Aufgabe:

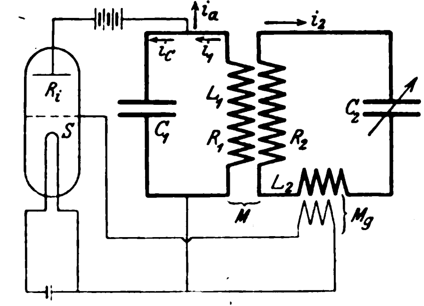


Bild 1. Zwischenkreisröhrensender mit sekundärer Gitterkopplung.

$$i_1 = i_a - i_c \tag{1}$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_c\, dt + M \frac{di_2}{dt} = 0 \tag{2}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\, dt + M \frac{di_1}{dt} = 0 \tag{3}$$

$$e_g = M_g \frac{di_2}{dt} \tag{4}$$

$$i_a = S e_g = S M_g \frac{di_2}{dt} \tag{5}$$

S = Steilheit der Röhre.

Die Verknüpfung der Gleichungen (1), (2) und (5) ergibt:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1\, dt + M \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{C_1}\int i_a\, dt = \frac{1}{C_1}\int S M_g \frac{di_2}{dt}\, dt = \frac{1}{C_1} S M_g i_2 \tag{6}$$

[1]) Wien und Vogel, Annalen der Physik. 1920, 62, 650.

Im vorliegenden Falle empfiehlt es sich, i_1 aus den Gleichungen (3) und (6) zu beseitigen. Wäre die rechte Seite von (6) Null ($M_g = 0$), so hätten wir die Differentialgleichungen zweier freischwingender induktiv gekoppelter Kreise vor uns. Die Differentialgleichung für den sekundären Strom würde alsdann lauten:

$$\frac{d^4 i_1}{dt^4} + \left(\frac{\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2}{\sigma}\right)\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{\omega_1{}^2\omega_2{}^2}{\sigma} i_2 = -\frac{d^3 i_2}{dt^3}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right] - \frac{d^2 i_2}{dt^2}\frac{1}{\sigma}\frac{R_1}{L_1}\frac{R_2}{L_2} - \frac{d i_2}{dt}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{R_1}{L_1}\omega_2{}^2 + \frac{R_2}{L_2}\omega^1{}_2\right]\frac{d i_2}{dt}. \tag{7}$$

Da nun aber die rechte Seite von (6) nicht verschwindet und ein mit i_2 behaftetes Glied enthält, zur Ableitung von (7) aber dreimal differentiiert werden muß, so muß unsere gesuchte Gleichung wie (7) lauten, aber rechts noch ein Zusatzglied mit $\frac{d^3 i_2}{dt^3}$ enthalten. Man überzeugt sich leicht, daß für dieses der Ausdruck $-\frac{M_g S M}{C_1 L_1 L_2 \cdot \sigma}\frac{d^3 i_2}{dt^3}$ anzuschreiben ist.

Unsere Differentialgleichung für i_2 lautet somit:

$$\frac{d^4 i_2}{dt^4} + \frac{\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2}{\sigma}\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{\omega_1{}^2\omega_2{}^2}{\sigma} i_2 = -\frac{d^3 i_2}{dt^3}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} + \frac{M_g S M}{C_1 L_1 L_2}\right] - \frac{d^2 i_2}{dt^2}\frac{1}{\sigma}\frac{R_1}{L_1}\frac{R_2}{L_2} - \frac{d i_2}{dt}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{R_1}{L_1}\omega_2{}^2 + \frac{R_2}{L_2}\omega_1{}^2\right]. \tag{8}$$

Beschränken wir uns auf den Fall vorherrschender Kopplung und geschwächter ungekoppelter Dämpfungen, so sagt die Gleichung (8), wenn wir sie mit Gleichung (32) S. 431 Archiv für Elektrotechnik IX. vergleichen und die aus dieser früher gezogenen Schlüsse heranziehen, folgendes aus:

Der Strom i_2 kann in zwei verschiedenen Schwingungen, den Koppelschwingungen der beiden induktiv aufeinander einwirkenden Systeme schwingen. Jede dieser Koppelschwingungen hat ihre besondere Dämpfung. Diese Dämpfung setzt sich zusammen aus der natürlichen Koppeldämpfung beider Systeme (wenn ihre Verbindung mit der Senderröhre gelöst ist) und aus einer Zusatzdämpfung, deren Dämpfungsexponent den Wert hat:

$$\alpha' = \frac{\frac{M M_g S}{2 C_1 L_1 L_2}\,\Omega^2}{\pm(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)\sqrt{1 - \frac{4\sigma\omega_1{}^2\omega_2{}^2}{(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)^2}}}. \tag{9}$$

Die natürliche Dämpfung ist stets positiv. Die Zusatzdämpfung kann aber auch negativ sein, da die Induktivität M_g beliebiges Vorzeichen tragen kann (vergl. S. 15 und S. 19). Die negative Zusatzdämpfung kann der natürlichen an Größe gleichkommen oder sie sogar übertreffen. Tritt dies ein, so erhalten wir im Röhrensender mit sekundärer Rückkopplung ungedämpfte Schwingungen.

Wir erinnern daran, daß

$$\Omega^2 = \frac{1}{2\sigma}\left[(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) \pm (\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)\sqrt{1 - \frac{4\sigma\omega_1{}^2\omega_2{}^2}{(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)^2}}\right] \tag{10}$$

ist. Setzen wir diesen Wert in (9) ein, so läßt sich schreiben:

$$\alpha' = \frac{M_g \cdot M \cdot S}{2 C_1 L_1 L_2}\frac{1}{2\sigma}\left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]; \quad x = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{11}$$

Es ist nun praktisch, die Gegeninduktivitäten M_g und M in eine Beziehung zu bringen:

$$M_g = \varrho \cdot M \cdot \tag{12}$$

Hiermit geht (11) in den Ausdruck

$$\alpha' = \varrho \frac{S}{2 C_1} \cdot \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right] \tag{13}$$

über. Der Quotient $\frac{S}{C_1}$ stellt einen gewöhnlichen Dämpfungsfaktor dar. Die übrigen Größen sind reine Zahlen. Das obere Vorzeichen gilt nach der Herleitung für die rasche, das untere für die langsame Koppelschwingung. Die Zusatzdämpfungen lassen sich somit schreiben: Für die rasche Koppelschwingung:

$$\alpha_1' = \varrho \frac{S}{2 C_1} U_3, \tag{14}$$

für die langsame Koppelschwingung:

$$\alpha_2' = -\varrho \frac{S}{2 C_1} u_3, \tag{15}$$

wo die Gewichte U_3 und u_3 folgende Werte haben:

$$U_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} + 1\right] \tag{16}$$

$$u_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} - 1\right]. \tag{17}$$

Ferner merken wir uns die Beziehung:

$$U_3 - u_3 = \frac{1-\sigma}{\sigma}. \tag{18}$$

Wir schreiben noch einige Näherungsformeln an, die bisweilen nützlich werden können:

Für kleine und große Werte von x ($0 < x \ll 1$; $1 \ll x < \infty$) ist:

$$U_3 = \frac{1-\sigma}{\sigma}\left[1 + \frac{\sigma x^2}{(1+x^2)^2}\right]. \tag{19}$$

$$u_3 = (1-\sigma)\frac{x^2}{(1+x^2)^2}. \tag{20}$$ [1]

Für die Resonanz ($x = 1$) und ihre unmittelbare Umgebung gilt:

$$U_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} + 1\right]. \tag{21}$$

$$u_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} - 1\right]. \tag{22}$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Gewichte u_3. Für $x = 0$ und $x = \infty$ ist es Null. Desgleichen verschwindet es für alle Werte von x für $\sigma = 1$. Dies Ergebnis ist leicht verständlich, da $\sigma = 1$ (Kopplung Null) den Fall zweier getrennter Stromkreise darstellt, für den bei sekundärer Gitterkopplung keine Beeinflußung der natürlichen Dämpfungen entstehen kann. Nimmt σ ab, also die Kopplung zu, so steigt u_3 und nimmt seinen höchsten Wert für $\sigma = 0$, also für außergewöhnlich feste Kopplungen an. In diesem Fall ist

[1]) Formel (20) gilt noch in guter Annäherung für alle Werte von x.

$$u_3 = \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} \tag{23}$$

(Grenzkurve Bild 2). Bei Zwischenwerten von σ erhalten wir Zwischenkurven, von denen einige in Bild 2 eingetragen sind. Im Resonanzpunkt haben die u_3-Werte ein Maximum.

Wenn wir den Ausdruck für das Gewicht U_3 diskutieren wollen, benutzen wir am besten die Beziehung (18). Sie besagt: Für eine beliebige Kopplung primär sekundär erhalten wir die U_3-Kurve, indem wir von der Parallelen zur Abszissen-

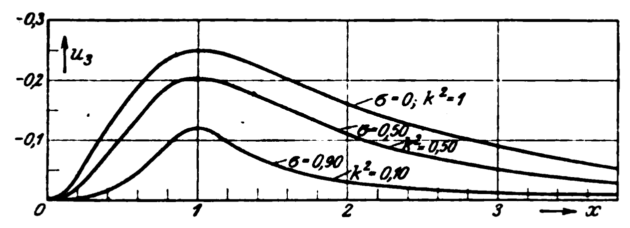


Bild 2. Das Gewicht u_3 für die Zusatzdämpfung der langsamen Koppelschwingung.

achse im Abstande $\frac{1-\sigma}{\sigma}$ die u_3-Kurve auftragen. Das Gewicht U_3 wird daher mit abnehmendem Streukoeffizienten σ (mit festerer Kopplung) immer größer, da dies der Wert $\frac{1-\sigma}{\sigma}$ ebenfalls tut. Auch U_3 hat im Resonanzpunkt ein Maximum. Die

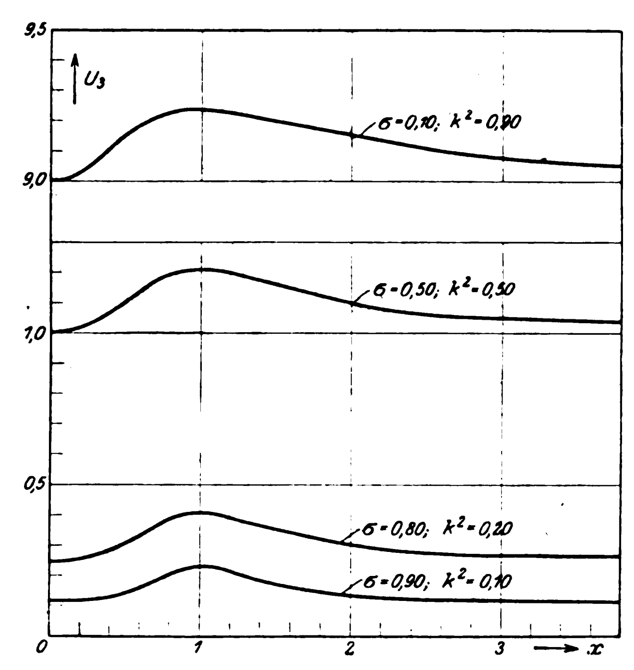


Bild 3. Das Gewicht U_3 für die Zusatzdämpfung der raschen Koppelschwingung.

prozentuale Schwankung der U_3-Werte mit x ist namentlich bei fester Kopplung viel geringer als die von u_3.

Die Gewichte U_3 und u_3 sind niemals negativ und im allgemeinen immer positive Größen. Ist M_g positiv, so muß es bei der raschen Koppelschwingung der Dämpfungsexponent α_1' ebenfalls sein. Bei der langsamen Koppelschwingung ergibt sich unter diesen Umständen der Dämpfungsexponent α_2' negativ. Es wird also

dann die rasche Koppelschwingung noch stärker gelöscht als es ihrer natürlichen Dämpfung entspricht, während die langsame Koppelschwingung unter Umständen ungedämpft dauernd bestehen kann.

Ist M_g negativ, so wird umgekehrt aus entsprechenden Gründen die langsame Koppelwelle unterdrückt, während sich die rasche als ungedämpft erweisen kann.

Nun haben wir es ganz in der Hand, eine positive oder negative Induktivität M_g zu erzielen. Wir brauchen dazu nur die Klemmen der Gitterspule in der einen oder andern Weise mit Gitter und Kathode zu verbinden. Durch die gleiche Maßregel können wir daher nach Belieben die langsame oder rasche Koppelschwingung im Röhrensender erregen. Dies Ergebnis der Theorie wird durch die Versuche von M. Wien und Vogel[1]) bestätigt. Ist über den Anschluß der Gitterspule aber in bestimmter Weise verfügt, so kann durch irgend welche Veränderungen der Konstanten der beiden gekoppelten Schwingungskreise ein Springen der Frequenz des Röhrengenerators, wie sich dies bei primärer Gitterkopplung zeigen kann, nicht vorkommen, wohl kann aber eine einmal erregte Schwingung erlöschen. Denn die Zusatzdämpfung für die eine oder andere Koppelschwingung ändert nicht ihr Vorzeichen, sondern nur ihren absoluten Betrag.

2. Spezielle Fälle der Schwingungserregung. Wir wollen zunächst die quantitative Beziehung für Anregung der langsamen Koppelwelle suchen. Ihre Gesamtdämpfung beträgt:

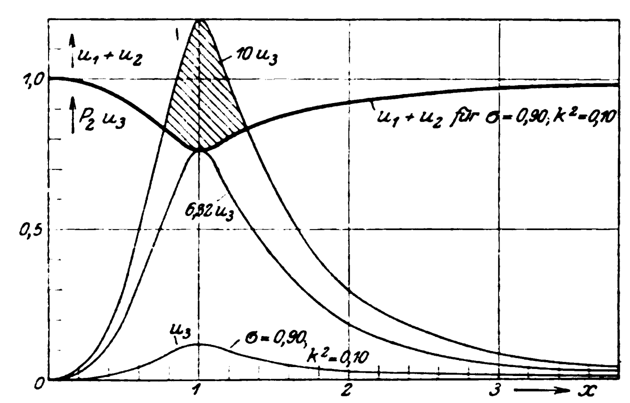


Bild 4. Gleiche ungekoppelte Dämpfung primär und sekundär. Bedingung für die Erregung der langsamen Koppelschwingung des Zwischenkreisröhrensenders. Lose Koppelung der Schwingungskreise.

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 - h_3 u_3, \tag{24}$$

wo

$$h_1 = \frac{R_1}{2 L_1}; \quad h_2 = \frac{R_2}{2 L_2}; \quad h_3 = \varrho \frac{S}{2 C_1}$$

gesetzt ist. Diese Gesamtdämpfung muß bei Schwingungserregung entweder gleich oder kleiner als Null sein. Zunächst lesen wir aus (14) und (15) ab, daß, be richtigem Anschluß der Gitterspule, die Schwingungen um so leichter einsetzen, je größer die Steilheit der Röhre und je kleiner die Primärkapazität C_1 ist, genau wie dies beim einfachen Schwingungskreis auch der Fall ist. Weiter hängt das Einsetzen der Schwingungen von der Einstellung des Sekundärkondensators (dem Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1} = x$) und der Kopplung (Streuung σ) ab. Beide Abhängigkeiten stecken in den Ausdrücken für u_1, u_2 und u_3. Von wesentlichem Einfluß ist auch die Größe

[1]) M. Wien und Vogel a. a. O.

der ungekoppelten Dämpfungen. Um bei dieser großen Zahl von unabhängigen Veränderlichen die Übersicht nicht zu verlieren, wollen wir einige spezielle Fälle betrachten und setzen zunächst voraus, beide Kreise mögen gleiche ungekoppelte Dämpfungen besitzen:

$$h_1 = h_2 = h. \tag{25}$$

Unter dieser Voraussetzung lautet die Bedingung der Schwingungserregung:

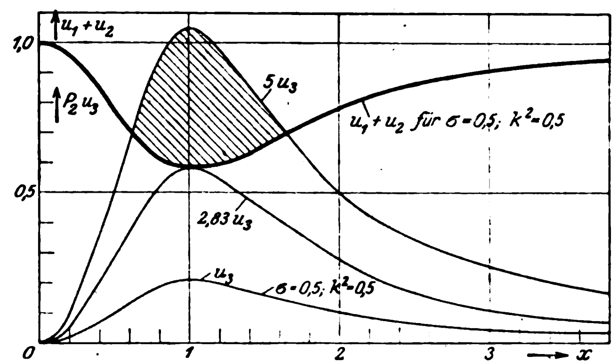


Bild 5. Wie in Bild 4. Festere Kopplung der Schwingungskreise.

$$h(u_1 + u_2) - h_3 u_3 \leqq 0 \tag{26}$$

oder

$$u_1 + u_2 \leqq P_2 u_3, \text{ wo } P_2 = \frac{h_3}{h} = \frac{\varrho S L}{C_1 R}. \tag{27}$$

In Bild 4 haben wir für $\sigma = 0,9$ stark die Kurve $u_1 + u_2$, schwach die $(P_2 u_3)$-Kurve ausgezogen.

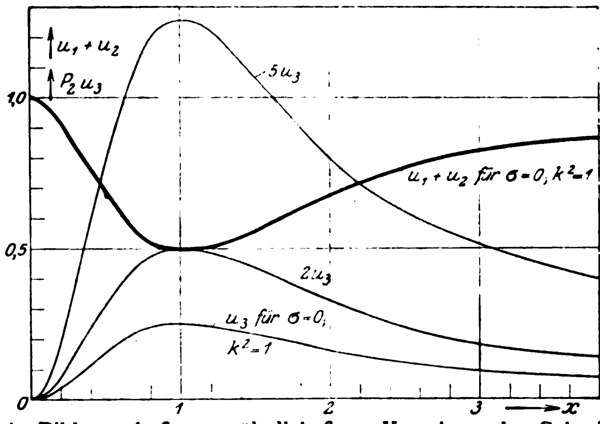


Bild 6. Wie in Bild 4. Außergewöhnlich feste Kopplung der Schwingungskreise.

Die Summe der Gewichte $u_1 + u_2$ hat für Resonanz ($x = 1$) ein Minimum. u_3 erreicht daselbst ein Maximum. Aber solange P_2 gleich 1 ist, liegt die u_3-Kurve überall weit unter der $(u_1 + u_2)$-Kurve. Ist $P_2 = \frac{h_3}{h} = 1$, so mögen wir den Sekundärkondensator einstellen wie wir wollen, der Röhrengenerator spricht nicht an. Er tut es erst, nach den Eintragungen unseres Bildes 4, wenn $P_2 = 6,32$ ist. Die Frequenz der ungedämpften Schwingungen ist dann gleich der Resonanzfrequenz der langsamen Koppelschwingung (vgl. Bild 6 S. 8). Wächst P_2 noch höher als 6,3, so steigt die $(P_2 u_3)$-Kurve in einem gewissen Gebiet über die $(u_1 + u_2)$-Kurve hinaus. In diesem Gebiete (Bild 4 schraffiert hervorgehoben), einem Frequenzstreifen von gewisser Breite, haben wir alsdann ungedämpfte Schwingungen. Der Frequenzstreifen schließt den Resonanzpunkt in sich ein.

Ähnliche Erscheinungen erhalten wir nicht nur bei $\sigma = 0{,}9$, sondern auch bei festerer primär-sekundärer Kopplung (vgl. Bild 5 und 6). Nur braucht man P_2 zur Erzielung ungedämpfter Schwingungen nicht so große Werte wie vorhin zu geben.

In Bild 7 haben wir die Mindestwerte für P_2 [vgl. Ausdruck (27)] aufgetragen, die erreicht werden müssen, soll ein Zwischenkreisröhrensender bei gleichen ungekoppelten Dämpfungen und bei sekundärer Rückkopplung ansprechen.

Da die $(P_2 u_3)$-Kurve für $x = 0$ und $x = \infty$ die Abszissenachse erreicht, während sich für diese Punkte die $(u_1 + u_2)$-Kurve von ihr im Abstande 1 entfernt hält, so kann die Bedingung (26) nur für ein gewisses um $x = 1$ herum gelegenes Gebiet

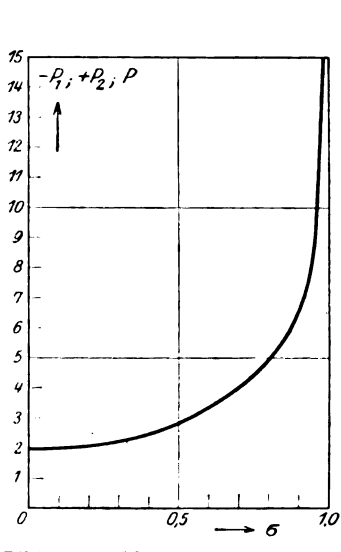


Bild 7. Maximalwerte von $P = \frac{\varrho S L}{C_1 R}$ für Erregung der langsamen und raschen Koppelschwingung

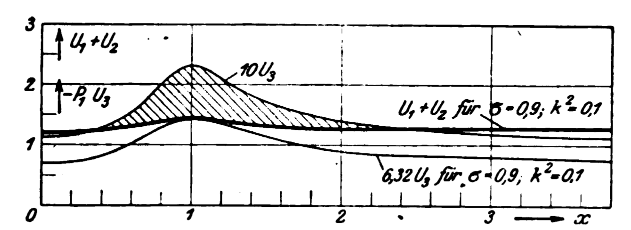


Bild 8. Gleiche ungekoppelte Dämpfung primär und sekundär. Bedingung für die Erregung der raschen Koppelschwingung. Lose Kopplung.

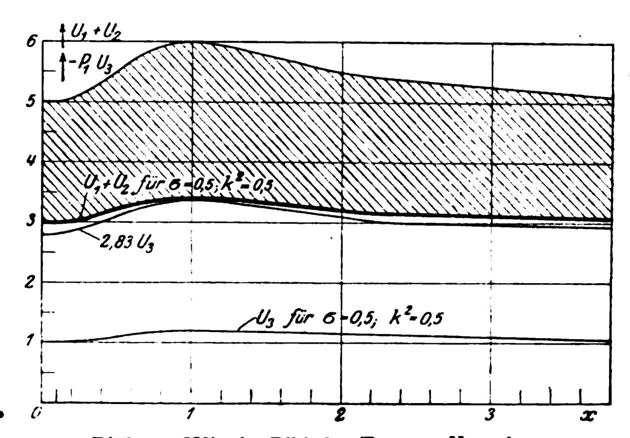


Bild 9. Wie in Bild 8. Festere Kopplung.

erfüllt sein. Die langsame Schwingung wird daher in den bisher betrachteten Fällen nur in einem mehr oder weniger breiten Frequenzstreifen erregt.

Niemals können wir bei sekundärer Gitterkopplung das ganze Spektrum der langsamen Koppelschwingung erhalten. Die Kopplung primär-sekundär mag dabei sein, welche sie wolle.

Für Resonanz ist nun:

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{\sigma}\left[1 - \sqrt{1-\sigma}\right]. \tag{28}$$

$$u_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} - 1\right] = \frac{\sqrt{1-\sigma}}{2\sigma}\left[1 - \sqrt{1-\sigma}\right]. \tag{29}$$

Es muß somit für Schwingungserregung, wenn $\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2} = \frac{R}{L}$ ist, sein

$$P_2 \geqq \frac{\frac{1}{\sigma}\left[1 - \sqrt{1-\sigma}\right]}{\frac{\sqrt{1-\sigma}}{2}\,\frac{1}{\sigma}\left[1 - \sqrt{1-\sigma}\right]}. \tag{30}$$

$$P_2 \geqq \frac{2}{\sqrt{1-\sigma}}. \tag{31}$$

Die Werte für P_2 können wir Bild 7 abgreifen.

Wir fassen jetzt die rasche Koppelschwingung ins Auge. Für sie lautet analog zu (26) die Bedingung der Schwingungserregung unter Voraussetzung $h_1 = h_2 = h$:

$$U_1 + U_2 \leqq -\frac{h_3}{h} U_3 = -P_1 U_3. \tag{32}$$

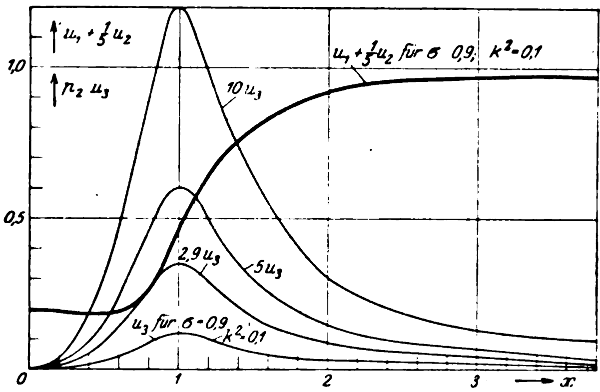


Bild 10. Überwiegende primäre ungekoppelte Dämpfung. Lose Kopplung der Schwingungskreise. Bedingung für die Erregung der langsamen Koppelschwingung.

Für die Werte 0,9 und 0,5 des Streukoeffizienten haben wir in den Bildern 8 und 9 die $(U_1 + U_2)$-Kurven und einige $(P_1 U_3)$-Kurven gezeichnet. Die erste Schwingungserregung erfolgt auch hier zunächst bei Resonanz. Die hierfür benötigten Mindestwerte von P_1 sind durch die Forderung gegeben:

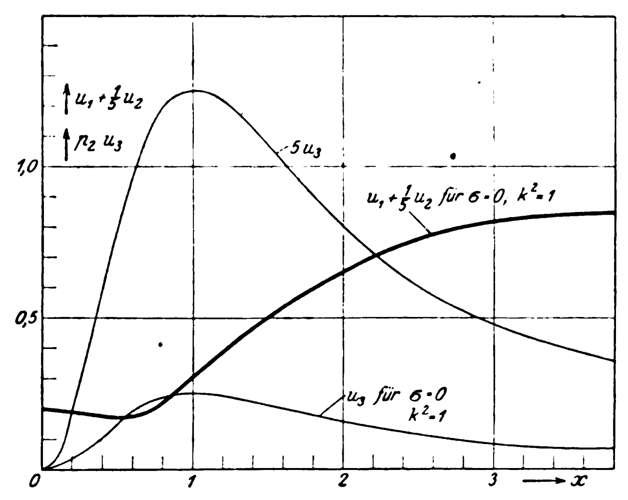


Bild 11. Wie in Bild 10, nur festere Kopplung der Schwingungskreise.

$$-P_1 = -\frac{h_3}{h} = \frac{U_1 + U_2}{U_3} = \frac{\frac{1}{\sigma}\left[1 + \sqrt{1-\sigma}\right]}{\frac{\sqrt{1-\sigma}}{2\sigma}\left[1 + \sqrt{1-\sigma}\right]} = \frac{2}{\sqrt{1-\sigma}}. \tag{33}$$

Sie stimmen somit genau mit P_2 überein. Es ist somit

$$-P_1 = P_2 = P. \tag{34}$$

Schwingt ein Zwischenkreisröhrensender, bei dem beide Kreise gleiche ungekoppelte Dämpfungen haben, in der langsamen Koppelschwingung, so erhält man unter den gleichen Verhältnissen die rasche, wenn man die Klemmen der Gitterspule umgekehrt an Kathode und Gitter anschließt. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

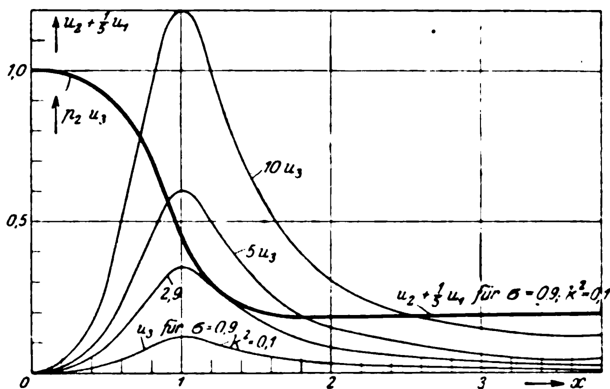


Bild 12. Überwiegende sekundäre ungekoppelte Dämpfung. Lose Kopplung der Schwingungskreise. Bedingung für die Erregung der langsamen Koppelschwingung.

Wächst $-P_1$ über die durch (33) festgelegte untere Grenze hinaus, so setzen die Schwingungen zunächst für ein gewisses um den Resonanzpunkt herum sich erstreckendes Gebiet ein. Mit wachsendem Werte von $-P_1$ verbreitert sich diesen immer mehr, bis es, wie Bild 9 zeigt, von $x = 0$ bis $x = \infty$ reicht. Bei genügend

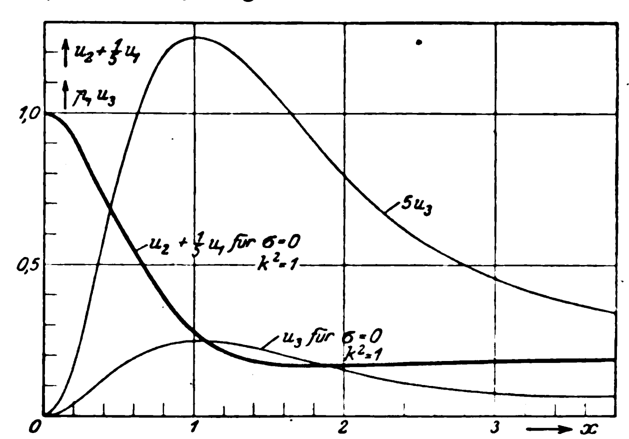


Bild 13. Wie in Bild 12, nur festere Kopplung der Schwingungskreise.

hohen Werten von $-P_1$ erhalten wir somit bei beliebiger Stellung des Sekundärkondensators immer Schwingungen von der Frequenz der raschen Koppelschwingung. Der Frequenzstreifen artet hier in ein kontinuierliches Frequenz-Spektrum der raschen Koppelschwingung aus. Bei der langsamen Koppelschwingung hatten wir (vergl. oben) ein anderes Ergebnis gefunden.

Es seien nun nicht mehr die ungekoppelten Dämpfungen primär und sekundär gleich, sondern sie seien verschieden. Wir müssen dann, wenn wir für die langsame Koppelschwingung das Einsetzen der Schwingungen ermitteln wollen, bei dem Ausdruck (24) anknüpfen. In den Bildern 10 und 11 habe ich einen Fall ungleicher ungekoppelter Dämpfungen graphisch untersucht. Er ist entworfen unter der Annahme $\frac{R_1}{2L_1} = 5\,\frac{R_2}{2L_2}\left(\text{oder } h_2 = \frac{1}{5}h_1\right)$. Er entspricht somit dem Fall überwiegender



primärer ungekoppelter Dämpfung. Die stark ausgezogene Kurve stellt für $\sigma = 0{,}9$ den Wert $u_1 + \frac{1}{5} u_2$, die schwach ausgezogenen den Wert $\frac{h_3}{h_1} u_3 = p_2 u_3$ dar. Die stark und schwach ausgezogenen Kurven berühren sich für

$$p_{2\,(\sigma = 0{,}9)} = 2{,}9. \tag{34}$$

Der Berührungspunkt liegt diesseits (unterhalb) des Resonanzpunktes.

Für den entsprechenden Fall überwiegender sekundärer ungekoppelter Dämpfung: $\frac{R_2}{2 L_2} = \frac{5 R_1}{2 L_1}$ $(h_2 = 5 h_1)$ sind die entsprechenden Kurven in Bild 12 und 13 gezeichnet. Hier findet die Berührung stark und schwach ausgezogener Kurven jenseits (oberhalb) der Resonanz statt.

Wir sehen hieraus: Überwiegt die primäre ungekoppelte Dämpfung, so findet das erste Einsetzen der Schwingungen unterhalb, überwiegt die sekundäre ungekoppelte Dämpfung, so findet das erste Einsetzen der Schwingungen oberhalb der Resonanz statt.

Indessen ist diese Verschiebung aus der Resonanzlage nicht groß; sie beträgt in den gezeichneten Beispielen etwa 20 bis 25 % der Resonanzfrequenz. Das Entsprechende läßt sich für die rasche Koppelschwingung sagen.

3. Allgemeiner Fall der Schwingungserregung. Allgemein lautet die Forderung der Schwingungserregung für die langsame Koppelschwingung:

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 - h_3 u_3 = 0, \tag{35}$$

wo

$$h_1 = \frac{R_1}{2 L_1}; \quad h_2 = \frac{R_2}{2 L_2}; \quad h_3 = \varrho \frac{S}{2 C_1}$$

ist. Die Gewichte u sind Funktionen von x und der Streuung σ. Denken wir uns die Werte h gegeben, so bestimmt jene Gleichung diejenigen Werte von x, an denen Einsetzen oder Abreißen der Schwingungen erfolgt, also indirekt die Breite des Frequenzstreifens.

Es sei vorausgesetzt, h_3 sei verhältnismäßig groß gewählt, so daß die Ränder des Frequenzstreifens durch Werte von x bestimmt sind, die weit vom Resonanzpunkt liegen. (Bild 4—6.) Dann können wir für u_1, u_2 und u_3 von folgenden Näherungsformeln für kleine Werte von x Gebrauch machen:

$$u_1 = \frac{x^4 (1 - \sigma)}{(1 + x^2)^2}; \quad u_2 = \frac{1}{(1 + x^2)^2}; \quad u_3 = \frac{(1 - \sigma) x^2}{(1 + x^2)^2} \tag{36}$$

Es geht (35) in folgende Gleichung über:

$$h_1 (1 - \sigma) x^4 - h_3 (1 - \sigma) x^2 = - h_2$$

$$x^4 - \frac{h_3}{h_1} x^2 = - \frac{h_2}{h_1 (1 - \sigma)} \tag{37}$$

und hieraus folgt:

$$x^2 = \frac{h_3}{2 h_1} \pm \sqrt{\frac{h_3^2}{4 h_1^2} - \frac{h_2}{h_1 (1 - \sigma)}}. \tag{38}$$

Verschwindet der Wurzelausdruck, so ergeben sich zwei zusammenfallende Werte. Dies tritt ein für den Wert

$$h_3 = 2 \sqrt{\frac{h_1 h_2}{1 - \sigma}}. \tag{39}$$

Würden unsere Ausdrücke (36) nicht nur für kleine, sondern für alle Werte von x streng gültig sein, so würde der Wert (39) für das Einsetzen der Schwingungen maßgebend sein, das, wie wir wissen, in der Resonanzlage oder in ihrer nächsten Umgebung erfolgen muß. In Wirklichkeit gelten sie nur in hinreichender Entfernung von der Resonanz und für kleine Werte vor x.

Nach dem Gange unserer Rechnung kommt daher für die gesuchte untere Grenze des Frequenzstreifens nur der kleinere der nach (38) möglichen Werte in Betracht, und gleichzeitig können wir voraussetzen, daß $\frac{h_3^3}{4 h_1^2}$ das Glied $\frac{h_2}{h_1(1-\sigma)}$ wesentlich an Größe übertrifft, daß wir uns also weitab von dem durch (39) gekennzeichneten Fall befinden.

Dann können wir die Wurzel entwickeln und erhalten für die untere Grenze des Frequenzstreifens den Wert:

$$x_u = \sqrt{\frac{h_2}{h_3(1-\sigma)}}. \tag{40}$$

$$0 < x < 1.$$

Berechnen wir unter den gleichen Voraussetzungen die obere Grenze des Frequenzstreifens (x_0) für die langsame Koppelschwingung. Wir haben nun von den Näherungswerten auszugehen: (x groß):

$$u_1 = \frac{x^4}{(1+x^2)^2}; \quad u_2 = \frac{1-\sigma}{(1+x^2)^2}; \quad u_3 = \frac{(1-\sigma)x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Für x_o gilt analog zu (37) die Gleichung:

$$h_1 x_o^4 + h_2(1-\sigma) - h_3(1-\sigma)x_o^2 = 0. \tag{41}$$

Aus ihr folgt mit denselben Vernachlässigungen, die bei der Herleitung des Ausdruckes (40) gemacht wurden

$$x_o = \sqrt{\frac{h_3}{h_1}(1-\sigma)\left[1 - \frac{h_1 h_2}{h_3^2(1-\sigma)}\right]} \tag{42}$$

oder angenähert

$$x_o = \sqrt{\frac{h_3}{h_1}(1-\sigma)}. \tag{42 a}$$

$$1 < x_0 < \infty.$$

Wir sehen somit: die obere Grenze x_o des Frequenzstreifens hängt wesentlich von dem Verhältnis der Dämpfungen h_3 und h_1 ab und kann mit wachsendem Werte von h_3 beliebig heraufgerückt werden.

Für die untere Grenze des Frequenzstreifens ist hauptsächlich das Verhältnis der Dämpfungen h_3 und h_2 ausschlaggebend. Sie kann mit abnehmendem Werte h_2 und steigendem Werte h_3 beliebig herabgedrückt werden.

Bestimmen wir noch die zu x_u und x_o gehörigen Frequenzen. Da x_o beträchtlich oberhalb 1 liegen soll, so liegt die zugehörige Frequenz nur wenig tiefer als ω_1. Zur unteren Grenze x_u gehört[1]) die Frequenz $\omega_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_3(1-\sigma)}}$.

Der Frequenzstreifen umfaßt bei Anregung der langsamen Koppelschwingung und fester Gitterkopplung bestenfalls den Bereich von

$$\omega_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_3}} \text{ bis } \omega_1. \tag{43}$$

Wir führen dieselbe Rechnung durch für einen Frequenzstreifen, der in die Nähe der Resonanz fällt. In diesem Fall sind folgende Annäherungsformeln anzuwenden (vgl. Archiv f. Elektrot. IX. S. 435):

[1]) Vgl. Rogowski, Archiv für Elektrotechnik IX, 430.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1-\sigma x}{\sqrt{1-\sigma}}\right] \\ u_2 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1-\frac{\sigma}{x}}{\sqrt{1-\sigma}}\right] \\ u_3 &= \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} - 1\right] \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Die Forderung (35) ergibt mit diesen Ausdrücken:

$$h_1\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} + \frac{\sigma x}{\sqrt{1-\sigma}}\right] + h_2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} + \frac{\frac{\sigma}{x}}{\sqrt{1-\sigma}}\right] = h_3(1-\sigma)\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma}} - 1\right]. \tag{45}$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn

$$K = [h_1 + h_2 + h_3(1-\sigma)]\left[\frac{1-\sqrt{1-\sigma}}{\sigma}\right] \tag{46}$$

gesetzt wird:

$$h_1 x^2 - K x + h_2 = 0 \tag{47}$$

und weiter

$$x = \frac{K}{2 h_1}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 h_1 h_2}{K^2}}\right]. \tag{48}$$

Die Schwingungen setzen erstmalig ein, wenn unsere quadratische Gleichung eine Doppelwurzel hat, also wenn

$$K = 2\sqrt{h_1 h_2} \tag{49}$$

oder wenn

$$h_3 = \frac{1}{(1-\sigma)}\left[\frac{2\sigma\sqrt{h_1 h_2}}{1-\sqrt{1-\sigma}} - (h_1 + h_2)\right] \tag{50}$$

ist. In unserer früheren Bezeichnungsweise haben wir somit zu schreiben

$$p_2 = \frac{h_3}{h_1} = \frac{1}{(1-\sigma)}\left[\frac{2\sigma\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}{1-\sqrt{1-\sigma}} - \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)\right]. \tag{51}$$

Der Wert von p_2 muß somit den durch (51) gegebenen Mindestwert überschreiten, sollen überhaupt ungedämpfte Schwingungen im Röhrengenerator mit sekundärer Gitterkopplung entstehen. Für $h_1 = h_2 = h$ müssen wir zu unserer bereits bekannten Forderung (31) zurückkommen. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich auch wie man leicht ableitet, als besonderer Wert von p_2 in Übereinstimmung mit (31)

$$p_2 = P = \frac{2}{\sqrt{1-\sigma}}. \tag{52}$$

Die Breite des Resonanzstreifens ist bei nicht zu hohen Werten von h_3 (bei denen wir ja zu den Formeln (41) und (42) übergehen müssen) durch die Werte:

$$x_o = \frac{K}{2 h_1}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4 h_1 h_2}{K^2}}\right]. \tag{53}$$

$$x_u = \frac{K}{2 h_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 h_1 h_2}{K^2}}\right] \tag{54}$$

bestimmt.

Bei den Formeln (51), (53), (54) ist im Auge zu behalten, daß sie nur dann gelten, wenn die Dämpfungen h_1 und h_2 sich nicht zu weit voneinander unterscheiden, so daß die Verwendung der Näherungsformeln (44) gerechtfertigt ist.

Bei der raschen Koppelschwingung soll uns zunächst interessieren, bei welchen Mindestwerten der Zusatzdämpfung, die wir zum Unterschied gegen die Mindestwerte bei der langsamen Koppelschwingung mit h_3' bezeichnen wollen, die Schwingungen einsetzen. Wir haben die Bedingungsgleichung:

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 + h_3' U_3 = 0. \tag{55}$$

Wir setzen für die Gewichte U, da nach den Ergebnissen unserer Bilder zu erwarten ist, daß die Schwingungen in der Nähe der Resonanz einsetzen, die Näherungswerte für dies Gebiet ein:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \sigma x}{\sqrt{1-\sigma}}\right] \\ U_2 &= \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{\sigma}{x}}{\sqrt{1-\sigma}}\right] \\ U_3 &= \frac{(1-\sigma)}{2\sigma}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Mit diesen Werten wird aus (55)

$$[h_1 + h_2 + h_3'(1-\sigma)]\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-\sigma}}\right] - \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma}}\left[h_1 x + \frac{h_2}{x}\right] = 0. \tag{57}$$

Setzen wir

$$k = \frac{[1 + \sqrt{1-\sigma}]}{\sigma}[h_1 + h_2 + h_3'(1-\sigma)], \tag{58}$$

so erhalten wir:

$$h_1 x^2 - k x + h_2 = 0. \tag{59}$$

$$x = \frac{k}{2 h_1}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 h_1 h_2}{k^2}}\right]. \tag{60}$$

Die Schwingungen setzen nun erstmalig ein, wenn der Wurzelausdruck verschwindet, also wenn

$$k^2 = 4 h_1 h_2 \tag{61}$$

oder

$$h_1 + h_2 + h_3'(1-\sigma) = \pm \frac{2\sigma\sqrt{h_1 h_2}}{(1 + \sqrt{1-\sigma})} \tag{62}$$

ist. Die Vorzeichenwahl hat nach physkalischen Gesichtspunkten zu erfolgen. Nun sind die Gewichte U [Ausdruck (55)] positive Größen. Ebenso die Dämpfungen h_1 und h_2. Die Schwingungsanregung der raschen Koppelschwingung kann daher nur dann erfolgen, wenn h_3' negativ ausfällt.

Wenn wir den Ausdruck (62) für den besonderen Fall $h_1 = h_2 = h$ prüfen, so finden wir, daß der negative Wert von h_3', sowohl bei positivem wie negativem Wurzelvorzeichen verbürgt ist. Da es uns um den niedrigsten Wert zu tun ist, der (61) erfülle, so wählen wir den positiven Wurzelwert.

In unserer früheren Ausdrucksweise muß man somit schreiben:

$$p_1 = -\frac{h_3'}{h_1} = \frac{1}{1-\sigma}\left[-\frac{2\sigma\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}{1 + \sqrt{1-\sigma}} + 1 + \frac{h_2}{h_1}\right]. \tag{63}$$

Der Wert p_1 muß zur Schwingungserregung der raschen Koppelschwingung negativ



sein. Für $h_1 = h_2 = h$ erhalten wir in Übereinstimmung mit einem früheren Ergebnis (33)

$$p_{1\,(h_1 = h_2)} = \frac{2}{\sqrt{1-\sigma}} = P_1. \tag{64}$$

Auch Gleichung (64) gilt ebenso wie (51) nur für den Fall, daß h_1 und h_2 sich nicht zu sehr unterscheiden.

Wir hatten früher gefunden: Sind die ungekoppelten Dämpfungen h_1 und h_2 gleich und schwingt bei sekundärer Gitterkopplung der Röhrengenerator in der langsamen Koppelschwingung, so erhält man bei Vertauschung des Anschlusses der Gitterspule die rasche Koppelschwingung.

Sind nun aber die Dämpfungen h_1 und h_2 voneinander verschieden, so stellt sich zuerst die langsame Koppelschwingung ein, und zwar tut sie dies um so eher, je mehr die ungekoppelten Dämpfungen voneinander abweichen.

Um letzteres einzusehen, bilden wir die Differenz der absoluten Beträge

$$|h_3| - |h_3'| = \frac{1}{(1-\sigma)}\left[-2(h_1+h_2) + 2\sigma\sqrt{h_1 h_2}\left\{\frac{1}{1-\sqrt{1-\sigma}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-\sigma}}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\sigma}\left[-2(h_1+h_2) + 4\sqrt{h_1 h_2}\right]. \tag{65}$$

Wir setzen nun

$$\frac{h_2}{h_1} = y, \tag{66}$$

dann ist:

$$|h_3'| - |h_3| = \frac{h_1}{1-\sigma}\left[-2 - 2y + 4\sqrt{y}\right]. \tag{67}$$

Ändert sich y von Null bis Unendlich, so erreicht die eckige Klammer bestenfalls den Wert Null. Dies trifft ein für $y = \frac{h_2}{h_1} = 1$; also für den bereits betrachteten Spezialfall gleicher Dämpfungen. In allen übrigen Fällen ist die eckige Klammer in (67) negativ; ihr absoluter Betrag ist um so größer, je weiter y sich von 1 entfernt, also je ungleicher die ungekoppelten Dämpfungen sind. Im allgemeinen ist somit $|h_3'|$ größer als $|h_3|$. Die langsame Koppelschwingung wird sich eher erregen.

Nach unseren Bildern kann bei genügend hohem Werte die rasche Koppelschwingung dauernd, also unabhängig von der Einstellung des Sekundärkondensators angeregt werden. Um einen Wert von h_3' zu bestimmen, bei dem dieser Fall sicher erzielt wird, machen wir in Formel (61) von den Annäherungswerten für großes und kleines Argument x Gebrauch. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sigma} - \frac{x^4}{(1+x^2)^2} \\ U_2 &= \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \\ U_3 &= \frac{1-\sigma}{\sigma}\left[1 + \frac{\sigma x^2}{(1+x^2)^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

U_1 ist immer kleiner als $\frac{1}{\sigma}$, ebenso U_2. Dagegen ist U_3 immer größer als $\frac{1-\sigma}{\sigma}$. Infolgedessen erhalten wir aus folgender Forderung einen passenden Wert für h_3':

$$h_1\frac{1}{\sigma} + h_2\frac{1}{\sigma} + h_3'\frac{(1-\sigma)}{\sigma} = 0. \tag{69}$$

Sie ist erfüllt, wenn:

$$h_3' = -\frac{(h_1 + h_2)}{1 - \sigma}. \tag{70}$$

Hat h_3' diesen Wert erreicht, so muß sich unter allen Umständen beim Zwischenkreisröhrensender mit sekundärer Gitterkopplung die rasche Koppelschwingung dauernd erregen.

4. Berücksichtigung des endlichen Wertes des inneren Widerstandes der Röhre. Bisher haben wir den inneren Widerstand der Senderröhre als groß angesehen. In Wirklichkeit ist er endlich. Berücksichtigen wir dies, so müssen wir an den vorherigen Ergebnissen Verbesserungen anbringen. Sie sind indessen im allgemeinen nur gerinfügig: Wir haben überall in unseren Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \text{statt } R_1 \text{ den Widerstand } R_1\left[1 + \frac{L_1}{C_1 R_i R_1}\right] \\ \text{statt } M_g \text{ die Gegeninduktivität } M_g\left[1 - \frac{M}{M_g} D\right] \\ \qquad D = \text{Durchgriff} \end{array}\right\} \tag{71}$$

einzuführen. Die Vorgänge spielen sich also so ab, als ob die ungekoppelte primäre Dämpfung um einen festen Betrag $\frac{L_1}{C_1 R_i}$ vergrößert und die Gitterinduktivität M_g um den Betrag $M D$ verkleinert erscheint. Wenn wir diese Aussage beweisen wollen, müssen wir die Gleichungen (5) Seite 15 durch folgende ersetzen:

$$i_a = S e_g + \frac{v_a}{R_i} = S M_g \frac{d i_2}{dt} - \frac{1}{R_i}\left[L_1 \frac{d i_1}{dt} + i_1 R_1 + M \frac{d i_2}{dt}\right] =$$
$$= S M_g \left[1 - \frac{M}{M_g S R_i}\right]\frac{d i_2}{dt} - \frac{L_1}{R_i}\frac{d i_1}{dt} - i_1 \frac{R_1}{R_i}. \tag{72}$$

Nun ist $S R_i = \frac{1}{D}$, wo D den Durchgriff der Röhre bedeutet. Somit ist

$$i_a = S M_g \left[1 - \frac{M D}{M_g}\right]\frac{d i_2}{dt} - \frac{L_1}{R_i}\frac{d i_1}{dt} - i_1 \frac{R_1}{R_i}. \tag{73}$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (1) und (2) ein, so erhalten wir:

$$L_1 \frac{d i_1}{dt} + i_1 R_1\left[1 + \frac{L_1}{C_1 R_i R_1}\right] + \frac{1}{C_1}\left[1 + \frac{R_1}{R_i}\right]\int i_1\, dt + M \frac{d i_2}{dt} =$$
$$\frac{1}{C_1} S M_g \left[1 - \frac{M D}{M_g}\right] i_2. \tag{74}$$

Der Form nach sind wir so wieder zur Gleichung (6) gelangt, nur ist

$$\begin{array}{llllll} \text{an Stelle von} & R_1 & \text{die Größe} & R_1\left[1 + \frac{L_1}{C_1 R_i R_1}\right], \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & M_g & \text{,,} \quad \text{,,} & M_g\left[1 - \frac{M}{M_g} D\right], \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} & \frac{1}{C} & \text{,,} \quad \text{,,} & \frac{1}{C}\left[1 + \frac{R_1}{R_i}\right] \end{array}$$

zu setzen. Die Änderung von $\frac{1}{C}$ ist geringfügig und kann vernachlässigt werden. Die übrigen Änderungen sind in unserer obigen Aussage (77) enthalten.



Zusammenfassung.

Der von M. Wien und Vogel angegebene Zwischenkreisröhrensender mit sekundärer Gitterkopplung schwingt so, wie es zwei gekoppelte Schwingungskreise tun, denen außer ihren natürlichen Dämpfungen noch eine Zusatzdämpfung zukommt. Diese Zusatzdämpfung ist für die rasche und langsame Koppelschwingung nach Größe und Vorzeichen verschieden und durch die Ausdrücke (14) und (15) gegeben (Bild 2 u. 3). In Übereinstimmung mit den Versuchen von Wien und Vogel wird gefunden, daß je nach Anschluß der Gitterspule entweder nur die rasche oder nur die langsame Koppelschwingung entsteht.

Bei gleichen ungekoppelten Dämpfungen der Schwingungskreise setzen die Schwingungen zunächst bei Resonanz ein und umfassen mit wachsender Gitterkopplung einen um die Resonanz gelegenen Frequenzbereich.

Langsame und rasche Koppelschwingung werden bei derselben Gitterkopplung erregt (Bild 4—9).

Bei ungleichen ungekoppelten Dämpfungen kann zuerst die langsame Koppelschwingung entstehen. Die rasche bedarf zu ihrem Einsetzen etwas festerer Gitterkopplung als die langsame. Die Erregung erfolgt anfangs außerhalb der Resonanz (Bild 10—13).

Es kann das ganze Spektrum nie bei der langsamen Koppelschwingung, wohl aber bei der raschen Koppelschwingung angeregt werden (z. B. Bild 9).

Die Theorie des Schwingungskreises mit eisenhaltiger Induktivität.

Von

J. Biermanns.

1. Veranlassung. Durch die Erfindung der Erdschlußspule ist das Problem des eisenhaltigen Schwingungskreises wieder von neuem in den Vordergrund des Interesses gerückt worden. Die Erdschlußspule dient bekanntlich zur Kompensierung des Erdschlußstromes von Hochspannungsleitungsnetzen, sie besteht aus einer gewöhnlichen Drosselspule, die zwischen den Nullpunkt des Netzes und Erde geschaltet wird. Dabei tritt die günstigste Wirkung dann auf, wenn die Induktivität der Erdschlußspule mit der Erdkapazität des gesamten Netzes zusammen eine elektrische Eigenschwingungszahl ergibt, die gerade gleich der normalen Betriebsfrequenz ist Was sonst in der Hochspannungstechnik ängstlich vermieden wird, wird hier also gerade angestrebt, ein Schwingungskreis größten Maßstabes, der das gesamte Netz. umfaßt und der sich gerade in Resonanz mit der Betriebsfrequenz des Netzes befindet. Da nun die Spannung des Nullpunktes des Netzes gegen Erde als Folge von kapazitiven Unsymmetrien oder von induktiven Beeinflussungen fremder Systeme durchaus nicht immer Null zu sein braucht, kann die Möglichkeit des Auftretens gefährlicher Resonanzerscheinungen nicht von vornherein verneint werden. Es sind also Mittel und Wege zu suchen, die die Entwicklungsmöglichkeit gefährlicher Resonanzüberspannungen von vornherein unterbinden.

Hier ergibt sich die gesuchte Abhilfe nun ganz von selbst. Die Erdschlußspule wird technisch mit zum größten Teil geschlossenem Eisenweg ausgeführt, und wie bei jedem technischen Apparat geht man auch hier schon aus Gründen der Wirtschaftlichkeit mit der normalen Eisensättigung so hoch wie nur irgend möglich. Nun ist aber bekannt, daß beim Schwingungskreis mit eisenhaltiger Induktivität die Höhe der Resonanzspannung durch die Eisensättigung eng begrenzt wird; die Wahl einer geeigneten Eisensättigung bietet also auch bei der Erdschlußspule, wie übrigens



vom Erfinder derselben — Professor Petersen — von vornherein erkannt wurde, die Möglichkeit zur Unterdrückung gefährlicher Resonanzspannungen.

Die Wichtigkeit des Problems veranlaßte die nachfolgenden Untersuchungen, die beanspruchen, eine für quantitative Berechnungen geeignete Theorie des eisenhaltigen Schwingungskreises zu geben.

2. Die analytische Formulierung der Magnetisierungskurve. Die rechnerische Behandlung des eisenhaltigen Schwingungskreises setzt die analytische Formulierung der meist graphisch gegebenen Magnetisierungskurve voraus, die gesuchte analytische Funktion muß dabei nicht nur die Magnetisierungskurve möglichst naturgetreu nachbilden, sondern sie muß vor allem auch eine Integration der Differentialgleichung des Schwingungskreises ermöglichen. Man kann nun, wenn i den Magnetisierungsstrom und φ den Kraftlinienfluß im Eisenkern bezeichnet, folgende Beziehung ansetzen

$$i = \sum_{k=1}^{k=\infty} \pm A_k \cdot \varphi^k, \tag{I}$$

wobei, da, abgesehen von der Hysteresis, die Magnetisierungskurve im ersten und dritten Quadranten zusammenfallende symmetrische Äste besitzt, nur die ungeraden Potenzen genommen werden dürfen. Es ist nun bekannt, daß derartige Potenzreihen in vielen Fällen außerordentlich schnell konvergieren; es ist dies, wie wir später sehen werden, auch hier der Fall, und wir begehen einen nur unwesentlichen Fehler, wenn wir die Reihenentwicklung (I) bereits nach dem dritten Gliede abbrechen. Wir können somit die Magnetisierungskurve durch folgende Funktion darstellen:

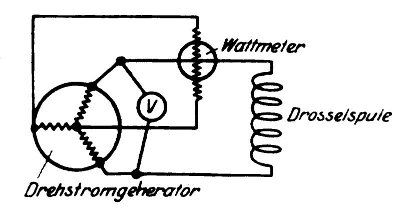


Bild 1.

$$i = \frac{z}{L} \cdot (\varphi - a \cdot \varphi^3 + b \cdot \varphi^5), \tag{Ia}$$

wo z die Windungszahl der eisenhaltigen Drosselspule, L annähernd ihre auf den geradlinigen Teil der Magnetisierungskurve bezogene Eigeninduktivität und endlich φ den die z Windungen durchsetzenden Kraftlinienfluß bedeutet.

Wir sprachen bisher von Magnetisierungskurve schlechtweg und verstanden darunter stillschweigend die mittels Gleichstrom und ballistischem Galvanometer aufgenommene sogenannte statische Magnetisierungskurve. Die Aufnahme der Magnetisierungskurve in dieser Form begegnet nun bei größeren Objekten großen experimentellen Schwierigkeiten, und man bestimmt in der Technik in solchen Fällen die Magnetisierungskurve lieber mittels Wechselstrom, indem man die Drosselspule an eine veränderliche Spannung legt und den von ihr aufgenommenen Magnetisierungsstrom mißt. Dabei darf man natürlich, um wohldefinierte Größen in die Hand zu bekommen, nicht einfach den Effektivwert des Stromes messen, man mißt vielmehr zweckmäßig direkt die Grundwelle des Magnetisierungsstroms, was mittels der durch das Bild 1 dargestellten Schaltung ohne weiteres möglich ist. Man benutzt also einen Dreiphasengenerator und statt des Amperemeters ein Wattmeter, dessen Spannungsspule an die senkrecht auf der Drosselspulenspannung stehende Spannung der nicht angeschlossenen dritten Statorphase angelegt wird. Wenn die Leistung des Generators genügend groß und seine Spannungskurve nicht sehr unrein ist, sind die Meßergebnisse sehr genau.

Es besteht nun ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen der Wechselstrom- und der statischen oder Gleichstrommagnetisierungskurve. Die Drosselspule mit der durch Gleichung (Ia) gegebenen statischen Magnetisierungskurve liege an einer Wechselspannung

$$e = z \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\tilde{E} \cdot \sin \omega \cdot t.$$

Hierbei ist der die Wicklung bzw. den Eisenkern durchsetzende Kraftlinienfluß

$$\varphi = \frac{\tilde{E}}{z \cdot \omega} \cdot \cos \omega \cdot t$$

und somit nach Gleichung (Ia)

$$i = \frac{\tilde{E}}{L \cdot \omega} \cdot (\cos \omega \cdot t - a_1 \cdot \cos^3 \omega \cdot t + b_1 \cdot \cos^5 \omega \cdot t),$$

wo

$$a_1 = a \cdot \frac{\tilde{E}^2}{z^2 \cdot \omega^2}$$

und

$$b_1 = b \cdot \frac{\tilde{E}^4}{z^4 \cdot \omega^4}.$$

Die mit Hilfe des Wattmeters gemessene Höhe der Grundwelle des Magnetisierungsstromes ist nun bekanntlich:

$$\tilde{i}_0 = \frac{\tilde{E}}{L \cdot \omega} \int_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (\cos \omega \cdot t - a_1 \cdot \cos^3 \omega \cdot t + b_1 \cdot \cos^5 \omega \cdot t) \cdot \cos \omega \cdot t \cdot d\,\omega \cdot t,$$

und da weiterhin

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega \cdot t \cdot d\,\omega \cdot t = 1,$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot a_1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^4 \omega \cdot t \cdot d\,\omega \cdot t = \frac{3}{4} \cdot a_1,$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot b_1 \int_0^{2\pi} \cos^6 \omega \cdot t \cdot d\,\omega \cdot t = \frac{5}{8} \cdot b_1,$$

geht die angeschriebene Gleichung über in

$$\tilde{i}_0 = \frac{\tilde{E}}{L \cdot \omega} \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot a_1 + \frac{5}{8} \cdot b_1\right).$$

Ersetzen wir wieder $\frac{\tilde{E}}{z \cdot \omega}$ durch $\tilde{\varphi}$, so lautet endlich die Gleichung der sogenannten Wechselstrommagnetisierungskurve:

$$\tilde{i} = \frac{z}{L} \cdot \left(\tilde{\varphi} - \frac{3}{4} \cdot a \cdot \tilde{\varphi}^3 + \frac{5}{8} \cdot b \cdot \tilde{\varphi}^5\right), \qquad \text{(Ib)}$$

bei der zu beachten ist, daß $\tilde{i}$ und $\tilde{\varphi}$ Maximalwerte bedeuten. Die Gleichungen (Ia) und (Ib) gestatten natürlich auch umgekehrt, von einer gegebenen Wechselstrommagnetisierungskurve zur statischen Magnetisierungskurve überzugehen, sie geben ferner einen sehr einfachen und übersichtlichen Zusammenhang zwischen der Gleichstrom- und der sogenannten Wechselstrompermeabilität einer Eisensorte.

Gegeben ist nun meist die experimentell aufgenommene Magnetisierungskurve von der Form

$$x = A_1 \cdot y - A_2 \cdot y^3 + A_3 \cdot y^5 \qquad \text{(IIa)}$$

und es sind die Konstanten A_1, A_2 und A_3 zu bestimmen. Da die Funktion (IIa) drei willkürliche Konstanten enthält, können wir derselben außer dem Nullpunkt

drei willkürlich gewählte Punkte der Magnetisierungskurve vorschreiben, durch die sie zu gehen hat. Man wird diese Punkte natürlich zweckmäßig wählen, und es seien die diesen zugehörigen Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und $x_3 y_3$. Indem man diese Wertepaare nacheinander in die Gleichung (IIa) einsetzt, erhält man drei lineare Gleichungen zwischen den Konstanten A, aus welchen diese sich leicht zu

$$A_1 = \frac{\frac{x_1}{y_1}\cdot(y_3^2 - y_2^2)\cdot y_2^2\cdot y_3^2 - \frac{x_2}{y_2}\cdot(y_3^2 - y_1^2)\cdot y_1^2\cdot y_3^2 + \frac{x_3}{y_3}\cdot(y_2^2 - y_1^2)\cdot y_1^2\cdot y_2^2}{(y_3^2 - y_2^2)\cdot(y_3^2 - y_1^2)\cdot(y_2^2 - y_1^2)},$$

$$A_2 = \frac{\frac{x_1}{y_1}\cdot(y_3^4 - y_2^4) - \frac{x_2}{y_2}\cdot(y_3^4 - y_1^4) + \frac{x_3}{y_3}\cdot(y_2^4 - y_1^4)}{(y_3^2 - y_2^2)\cdot(y_3^2 - y_1^2)\cdot(y_2^2 - y_1^2)} \qquad \text{(IIb)}$$

und

$$A_3 = \frac{\frac{x_1}{y_1}\cdot(y_3^2 - y_2^2) - \frac{x_2}{y_2}\cdot(y_3^2 - y_1^2) + \frac{x_3}{y_3}\cdot(y_2^2 - y_1^2)}{(y_3^2 - y_2^2)\cdot(y_3^2 - y_1^2)\cdot(y_2^2 - y_1^2)}$$

ergeben.

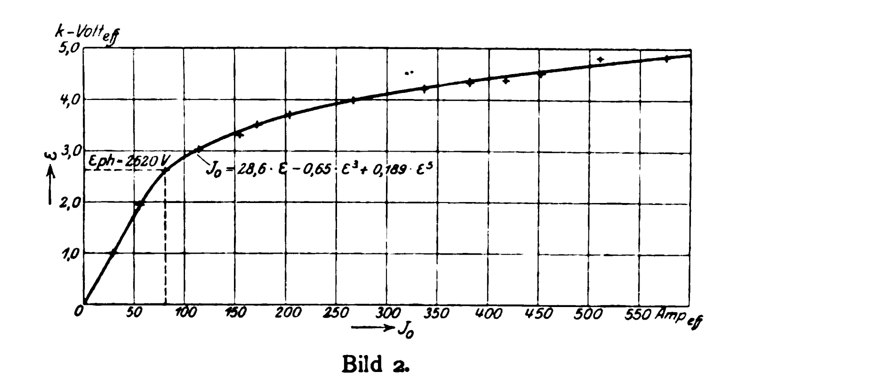


Bild 2.

Das Bild 2 zeigt eine an einer Erdschlußspule von 200 kVA mittels der durch Bild 1 charakterisierten Methode aufgenommene Magnetisierungskurve; die erhaltenen Werte können, da der benützte Generator eine normale Leistung von 15000 kVA hatte, als zuverlässig betrachtet werden. Die eingetragenen Punkte sind Meßergebnisse, die ausgezogene Kurve dagegen stellt die Funktion

$$i_0 = 28{,}6\cdot E - 0{,}65\cdot E^3 + 0{,}189\cdot E^5$$

dar und man sieht, daß diese die wirkliche Magnetisierungskurve bis zu recht hohen Sättigungen mit aller nur wünschenswerten Genauigkeit nachbildet. Die Spannung ist in die angeschriebene Gleichung in kVolt einzusetzen; im gradlinigen Teil der Magnetisierungskurve verschwindet, wie man leicht sehen kann, der Einfluß des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden zweiten und dritten Gliedes gegenüber dem des ersten, d. h. der Koeffizient des linearen Gliedes entspricht der Selbstinduktivität der mit ungesättigtem Eisen arbeitenden Drosselspule.

3. Die Differentialgleichung der freien Schwingungen und ihre Lösung.

Da wir uns zunächst auf die Ermittlung der freien Schwingungen des eisenhaltigen Schwingungskreises beschränken, können wir den folgenden Betrachtungen das Schema Bild 3 zugrunde legen Der gezeichnete Schwingungskreis gehorcht folgender Gleichung[1]):

[1]) Vom Ohmschen Widerstand, dessen Einfluß auf die freien Schwingungen, abgesehen von der zeitlichen Dämpfung nur verschwindend ist, sehen wir ab.

$$z \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt = 0, \qquad \text{(III)}$$

die durch Differentiation und Substitution von i aus Gleichung (I a) — da wir Momentanwerte betrachten, kann natürlich nur die statische Magnetisierungskurve in Betracht kommen — in die folgende Differentialgleichung übergeht,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{C \cdot L} \cdot (\varphi - a \cdot \varphi^3 + b \cdot \varphi^5), \qquad \text{(III a)}$$

von der unsere folgenden Betrachtungen auszugehen haben.

Durch Multiplikation mit $2 \cdot d\varphi$ und Integration nach φ läßt sich Gleichung (III a) überführen in

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = A - \frac{1}{C \cdot L} \cdot \left(\varphi^2 - \frac{a}{2} \cdot \varphi^4 + \frac{b}{3} \cdot \varphi^6\right),$$

wo A eine willkürliche Integrationskonstante ist, deren physikalische Bedeutung man erkennt, wenn in der eben angeschriebenen Gleichung $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ gesetzt wird. Dann ergibt sich nämlich

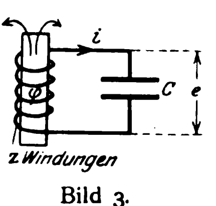


Bild 3.

$$A = \frac{1}{C \cdot L} \cdot \left(\bar{\varphi}^2 - \frac{a}{2} \cdot \bar{\varphi}^4 + \frac{b}{3} \cdot \bar{\varphi}^6\right),$$

wo $\bar{\varphi}$ den im Verlaufe einer Schwingung auftretenden maximalen Kraftlinienfluß bedeutet. Die Integrationskonstante A legt also die Amplitude der auftretenden Schwingung fest.

Nach einigen naheliegenden Umstellungen ergibt nochmalige Integration weiterhin

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{A - \frac{1}{C \cdot L} \cdot \left(\varphi^2 - \frac{a}{2} \cdot \varphi^4 + \frac{b}{3} \cdot \varphi^6\right)}},$$

wobei wir der auftretenden weiteren Integrationskonstante dadurch Rechnung getragen haben, daß wir zwischen den Grenzen 0 und φ integrierten.

Das eben angeschriebene bestimmte Integral läßt sich nun ohne Schwierigkeiten auf ein elliptisches Integral erster Gattung zurückführen. Setzen wir nämlich

$$\varphi^2 = \frac{m - n \cdot x}{1 + x}, \qquad \text{(IV a)}$$

so folgt

$$t = -\frac{m+n}{2} \cdot \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\alpha - \beta \cdot x - \gamma \cdot x^2 - \delta \cdot x^3 - \varepsilon \cdot x^4}}, \qquad \text{(IV b)}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= A \cdot \left[m - \frac{m^2}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(1 - \frac{a}{2} \cdot m + \frac{b}{3} \cdot m^2\right)\right], \\
\beta &= A \cdot \left[(n - 3m) + \frac{m^2}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(2 \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right) + \frac{a}{2} \cdot (3n - m) - \frac{4}{3} \cdot b \cdot m \cdot n\right)\right], \\
\gamma &= A \cdot \left[3 \cdot (n - m) + \frac{m \cdot n}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - 4\right) + \frac{3}{2} \cdot a \cdot (m - n) + 2 \cdot b \cdot m \cdot n\right)\right], \\
\delta &= A \cdot \left[(3 \cdot n - m) + \frac{n^2}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(2 \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right) + \frac{a}{2} \cdot (n - 3m) - \frac{4}{3} \cdot b \cdot m \cdot n\right)\right], \\
\varepsilon &= A \cdot \left[n + \frac{n^2}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(1 + \frac{a}{2} \cdot n + \frac{b}{3} \cdot n^2\right)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV c)}$$

Nun bestimmen wir m und n so, daß

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \text{und} \qquad \delta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV d)}$$

und zwar ergeben die eben angeschriebenen Bedingungsgleichungen, indem wir in sie die Werte für β und δ aus den Gleichung (IV c) einführen und vorübergehend

$$\left.\begin{aligned} m - n &= u \\ \text{und} \qquad 2 \cdot m \cdot n &= v \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV e)}$$

setzen,

$$-v^3 + c \cdot v^2 + d \cdot v + e = 0,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} v &= \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{c^2}{9} + \frac{d}{3}} \cdot \mathfrak{Cof}\, \frac{1}{3} \cdot \left(\mathfrak{Arc\,Cof}\, \frac{\frac{2}{27} \cdot c^3 + \frac{1}{3} \cdot c \cdot d + e}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{c^2}{9} + \frac{d}{3}\right)^3}} \right) + \frac{c}{3}; \\ &\text{ferner wird} \\ u &= -\frac{\frac{2}{3} \cdot b \cdot v^2}{2 \cdot A \cdot C \cdot L + \frac{a}{2} \cdot v}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV f)}$$

In der ersten der Gleichung (IV f) ist

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{\frac{8}{3} \cdot b + \frac{a^2}{2}}{\frac{8}{9} \cdot b^2 + \frac{1}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(\frac{a^3}{8} - \frac{2}{3} \cdot a \cdot b\right)}, \\ d &= \frac{2 \cdot a \cdot A \cdot C \cdot L}{\frac{8}{9} \cdot b^2 + \frac{1}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(\frac{a^3}{8} - \frac{2}{3} \cdot a \cdot b\right)} \\ \text{und} \qquad e &= \frac{8 \cdot A^2 \cdot C^2 \cdot L^2}{\frac{8}{9} \cdot b^2 + \frac{1}{A \cdot C \cdot L} \cdot \left(\frac{a^3}{8} - \frac{2}{3} \cdot a \cdot b\right)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV g)}$$

zu setzen. Die Koeffizienten m und n ergeben sich nun endlich mit Hilfe der aus Gleichung (IV e) ersichtlichen Beziehungen zu

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \cdot \left(u \pm \sqrt{u^2 + 2 \cdot v}\right) \\ \text{und} \qquad n &= \frac{1}{2} \cdot \left(-u \pm \sqrt{u^2 + 2 \cdot v}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV h)}$$

Zu der eben angeschriebenen Gleichungsschar (IV) ist noch zu bemerken, daß die kubische Bedingungsgleichung für v in der Regel nur eine reelle positive Wurzel besitzt und daß in der ersten der Gleichung (IV f) immer nur eines der beiden Vorzeichen, und zwar meist das positive zu wählen ist. Welches Vorzeichen in den Gleichungen (IV h) gewählt wird, ist, wie der symmetrische Bau der Gleichungen (IV c) erkennen läßt, gleichgültig.

Da es uns somit gelungen ist, durch passende Bestimmung der Koeffizienten m und n die Konstanten β und δ im Integral (IV b) zum Verschwinden zu bringen, kann dasselbe, wie aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt ist, durch die weitere Substitution

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \cdot \varepsilon}} \cdot \cos \psi \tag{V a}$$

in das elliptische Integral erster Gattung

$$t = -\frac{m+n}{2} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha + \lambda^2 \cdot \varepsilon}} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda^2 \cdot \varepsilon} \cdot \sin^2 \psi}} \tag{V b}$$

übergeführt werden. Dabei ist

$$\lambda = \frac{\gamma}{2 \cdot \varepsilon} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4 \cdot \varepsilon^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon}} \tag{V c}$$

zu setzen, wobei es an sich wiederum gleichgültig ist, welches der beiden vor der Quadratwurzel stehenden Vorzeichen man benützt; zweckmäßig wählt man jedoch das positive Vorzeichen, um für den Modul

$$k^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda^2 \cdot \varepsilon} \tag{V d}$$

des elliptischen Integrals einen für die Rechnung bequemeren möglichst kleinen Zahlenwert zu erhalten.

Rein mathematisch betrachtet haben wir in den Gleichungen (IV) und (V) die Lösung der Differentialgleichung (IIIa) unseres Problems in Händen, denn es sind Zahlentafeln für das elliptische Integral (V b) bekannt, und eine punktweise Berechnung des Spannungs- und Stromverlaufs im betrachteten Schwingungskreis ist damit ohne weiteres möglich. Die Gleichungen besitzen indes noch nicht die für die numerische Rechnung günstigste Form, sie sind ferner physikalisch nur wenig durchsichtig, so daß wir uns noch nicht mit denselben begnügen wollen.

Gleichung (V b) läßt sich unter Beachtung der Substitution (V a) auch umgekehrt schreiben [1])

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \cdot \varepsilon}} \cdot \cos \operatorname{am}\left(\frac{2}{m+n} \cdot \sqrt{\frac{\alpha + \lambda^2 \cdot \varepsilon}{\lambda}} \cdot t,\ k\right).$$

Nun wissen wir, daß die elliptischen Funktionen eine reelle Periode $4 \cdot K$ und eine imaginäre Periode $j \cdot 4 \cdot K'$ besitzen, wo

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \psi}} \tag{VI a}$$

und

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \cdot \sin^2 \psi}} \tag{VI b}$$

mit

und

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= 1 - k^2 \\ j &= \sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \tag{VI c}$$

die sogenannten vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung sind. Wir können somit auch kürzer schreiben

$$x = h \cdot \operatorname{cn} 2 \cdot \nu \cdot t, \tag{VI d}$$

mit

[1]) Wir bezeichnen mit $\cos \operatorname{am} (\xi, k)$ den Jacobischen elliptischen Cosinus mit dem Argument ξ und dem Modul k, für den wir später noch kürzer $\operatorname{cn} \xi$ schreiben werden. Ebenso werden wir $\operatorname{sn} \xi$ und $\operatorname{dn} \xi$ für $\sin \operatorname{am} (\xi, k)$ und $\Delta \operatorname{am} (\xi, k)$ schreiben.



$$h = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \cdot \varepsilon}}$$

und

$$\nu = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot K} \cdot \sqrt{\frac{\alpha + \lambda^2 \cdot \varepsilon}{\lambda \cdot (m + n)^2}}. \qquad \text{(VI e)}$$

Für den die Wicklung durchsetzenden Kraftlinienfluß ergibt sich endlich

$$\varphi = \sqrt{\frac{m - n \cdot h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t}{1 + h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t}}. \qquad \text{(VI f)}$$

Die an den Klemmen der Drosselspulenwicklung herrschende Spannung ist

$$e = z \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

oder, da

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi \cdot dx}{dx \cdot dt},$$

$$e = h \cdot z \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \cdot (m + n)^2}{(m - n \cdot h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t) \cdot (1 + h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t)^3}} \cdot \frac{d\, cn\, 2 \cdot \nu \cdot t}{dt}. \qquad \text{(VII)}$$

Nun läßt sich beweisen, daß

$$m = n \cdot h,$$

wir haben somit

$$m - n \cdot h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t = m \cdot (1 - cn\, 2 \cdot \nu \cdot t),$$

oder, da

$$cn\, 2 \cdot \nu \cdot t = \frac{cn^2 \nu \cdot t - sn^2 \cdot \nu \cdot t \cdot dn^2 \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}.$$

und

$$dn^2 \cdot \nu \cdot t = 1 - k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t,$$

$$m - n \cdot h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t = 2 \cdot m \cdot sn^2 \nu \cdot t \, \frac{1 - k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}.$$

Ferner ist

$$\frac{d\, cn\, 2 \cdot \nu \cdot t}{dt} = - 2 \cdot \nu \cdot sn\, 2 \cdot \nu \cdot t \cdot dn\, 2 \cdot \nu \cdot t,$$

oder, da

$$sn\, 2 \cdot \nu \cdot t = \frac{2 \cdot sn\, \nu \cdot t \cdot cn\, \nu \cdot t \cdot dn\, \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}$$

$$dn\, 2 \cdot \nu \cdot t = \frac{dn^2 \nu \cdot t - k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t \cdot cn^2 \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t + k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t},$$

$$\frac{d\, cn\, 2 \cdot \nu \cdot t}{dt} = 4 \cdot sn\, \nu \cdot t \cdot \frac{1 - 2 \cdot k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t + k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}{(1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t)^2} \cdot \frac{d\, sn\, \nu \cdot t}{dt}.$$

Mit den eben erhaltenen Werten geht also Gleichung (VII) über in

$$e = z \cdot (1 + h) \cdot \sqrt{2 \cdot m} \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \frac{d\, sn\, \nu \cdot t}{dt},$$

mit

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 + h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t)^3}}$$

und

$$\xi_2 = \frac{1 - 2 \cdot k^2 \cdot sn^2 \cdot \nu \cdot t + k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}{(1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t)^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t}}. \qquad \text{(VII a)}$$

Die Gleichungen (VIIa) sind nun physikalisch sehr durchsichtig, sie sind ferner gut für die numerische Auswertung geeignet. Wir erkennen, daß die Frequenz der auftretenden Schwingung $\frac{\nu}{2\cdot\pi}$ ist und daß ihre mittlere Amplitude, da die Funktionen ξ_1 und ξ_2 um den Wert 1 pendeln, den Wert $z\cdot(1+h)\cdot\sqrt{2\cdot m\cdot\nu}$ besitzt. Die genauere Kurvenform der Drosselspulenspannung läßt sich an Hand der allgemeinen Gleichungen (VIIa) nicht ohne weiteres erkennen, hier muß auf die Betrachtung spezieller Zahlenbeispiele verwiesen werden. Es läßt sich jedoch folgendes sagen:

Im allgemeinen ist $k \ll 1$, so daß ξ_2 mit großer Annäherung $= 1$ gesetzt werden kann, ferner können unter dieser Voraussetzung die elliptischen Funktionen mit großer Annäherung durch die trigonometrischen Funktionen ersetzt werden. Dann gehen die Gleichungen (VIIa) über in

$$e = \sim z\cdot(1+h)\cdot\sqrt{2\cdot m\cdot\nu}\cdot\frac{\cos\nu\cdot t}{\sqrt{(1+h\cdot\cos 2\cdot\nu\cdot t)^3}}$$

mit

$$\nu = \sim\sqrt{\frac{\alpha+\lambda^2\cdot\varepsilon}{\lambda\cdot(m+n)^2}}. \qquad \text{(VIIb)}$$

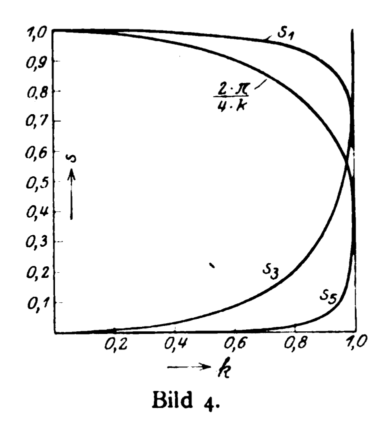


Bild 4.

Hier erkennt man nun ohne weiteres, daß die Drosselspulenspannung, da stets $h > 1$, nach einer abgeflachten Sinuskurve verläuft, und zwar tritt die Abflachung um so stärker in die Erscheinung, je größer h ist.

Für genauere zahlenmäßige Auswertungen der Gleichungen (VIIa) empfiehlt sich die Benutzung der folgenden, für die elliptischen Funktionen gültigen trigonometrischen Reihenentwicklungen:

$$\mathrm{sn}\,\xi = \frac{2\cdot\pi}{k\cdot K}\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{q^{\frac{2\mu-1}{2}}}{1-q^{2\mu-1}}\cdot\sin\frac{2\cdot\mu-1}{2\cdot K}\cdot\pi\cdot\xi,$$

$$\mathrm{cn}\,\xi = \frac{2\cdot\pi}{k\cdot K}\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\frac{q^{\frac{2\mu-1}{2}}}{1+q^{2\mu-1}}\cdot\cos\frac{2\cdot\mu-1}{2\cdot K}\cdot\pi\cdot\xi,$$

mit

$$q = e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}. \qquad \text{(VIII)}$$

Solange der Modul k nicht sehr nahe $= 1$ ist, konvergieren die angeschriebenen Reihen außerordentlich schnell, und man kann sie in weitaus den meisten Fällen bereits nach dem dritten Gliede abbrechen, d. h. man braucht außer der Grundwelle nur die dritte und fünfte Harmonische zu berücksichtigen. Die Amplitude der Grundwelle ist, falls die der elliptischen Funktionen $= 1$ gesetzt wird,

$$s_1 = \frac{2\cdot\pi}{k\cdot K}\cdot\frac{\sqrt{q}}{1\mp q},$$

die der dritten Harmonischen

$$s_3 = s_1\cdot q\cdot\frac{1+q}{1\mp q^3},$$

und die der fünften Harmonischen endlich

$$s_5 = s_1\cdot q^2\cdot\frac{1\mp q}{1\mp q^5}.$$

Zur Erleichterung der Berechnung von Zahlenbeispielen sind in dem Bild 4 für den elliptischen Cosinus die Amplituden der Grundwelle und der 3. und 5. Oberschwingung

in Abhängigkeit vom Modul k aufgetragen worden, das Bild zeigt ferner den Verlauf der Funktion $\frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot K}$.

Die für den Verlauf des Kraftlinienflusses φ gefundene Gleichung (VIf) läßt sich mit Hilfe der für die Berechnung der Drosselspulenspannung vorgenommenen Umformungen auf die folgende übersichtlichere Form bringen:

$$\varphi = \sqrt{2 \cdot m} \cdot \sqrt{\frac{1 - k^2 \cdot sn^2 \nu \cdot t}{1 - k^2 \cdot sn^4 \nu \cdot t}} \cdot \frac{sn \nu \cdot t}{\sqrt{1 + h \cdot cn\, 2 \cdot \nu \cdot t}}. \tag{IX}$$

Diese Gleichung läßt nun erkennen, daß die Kurvenform des die Drosselspulenwicklung durchsetzenden Kraftlinienflusses spitzer sein muß als die Sinuskurve.

Der im Schwingungskreis fließende Strom kann ohne weiteres durch Einsetzen der Werte für φ ans Gleichung (IX) in die Gleichung (Ia) ermittelt werden, er besitzt, wie leicht ersichtlich, eine außerordentlich spitze Kurvenform.

Die bisherigen Betrachtungen lassen nun folgendes erkennen:

Der eisenhaltige Schwingungskreis führt, wenn er durch äußere Einflüsse angeregt wird, periodische Eigenschwingungen aus, die im Gegensatz zu denjenigen des Thomsonschen Schwingungskreises mehr oder weniger von der Sinusform abweichen. Die Frequenz derselben ist, ebenfalls im Gegensatz zum Verhalten des Thomsonschen Schwingungskreises, keine Konstante, sondern stark von der Höhe der Amplitude der Schwingungen abhängig, und zwar können wir, da α, γ und ε mit wachsendem A stark zunehmen, ein Ansteigen der Eigenfrequenz mit wachsender Amplitude voraussagen. Wir können uns die auftretende Schwingung in eine Grundschwingung und eine unendliche Anzahl von Oberschwingungen zerlegt denken, dürfen aber trotzdem nur von jeweils einer einzigen Eigenfrequenz des eisenhaltigen Schwingungskreises sprechen. Denn die Differentialgleichung unseres Problemes ist keine lineare, so daß die verschiedenen Oberschwingungen nicht unabhängig von der Grundschwingung existieren können. Wir wollen die Amplitude dieser Grundschwingung nachstehend noch schnell berechnen, da ihre Kenntnis uns für die späteren Untersuchungen von Wert sein wird.

Wir greifen zu dem Zweck auf die Gleichung (VIf) zurück und stützen uns auf die Tatsache, daß in den uns hier interessierenden Fällen der Modul k selten größer als 0,6 wird[1]). Wir können dann, wie der Verlauf der Funktion s_1 in dem Bild 4 erkennen läßt, die Amplitude der elliptischen Funktionen mit der Amplitude der Grundwelle der sie darstellenden Fourierschen Reihe identifizieren, ohne dadurch einen nennenswerten Fehler zu begehen, und können ferner die Oberschwingungen, da sie offenbar nichts zur Amplitude der Grundschwingung des Fluxes beitragen, unterdrücken. Wir schreiben also

$$\varphi = \sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos 2 \cdot \nu \cdot t}{1 + h \cdot \cos 2 \cdot \nu \cdot t}}$$

und erhalten die Amplitude der Grundschwingung der eben angeschriebenen Funktion zu

$$A_\varphi = \frac{\sqrt{m}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos 2 \cdot \nu \cdot t}{1 + h \cdot \cos 2 \cdot \nu \cdot t}} \cdot \sin \nu \cdot t \cdot d\nu \cdot t.$$

Nun ist aber

$$1 - \cos 2 \cdot \nu \cdot t = 2 \cdot \sin^2 \nu \cdot t,$$

$$1 + h \cdot \cos 2 \cdot \nu \cdot t = (1 + h) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot h}{1 + h} \cdot \sin^2 \nu \cdot t\right),$$

[1]) In dem am Ende dieses Abschnittes behandelten Beispiel überschreitet der Modul k an keiner Stelle den Wert 0,29.



und damit wird

$$A_\varphi = \sqrt{\frac{m}{\pi^2 \cdot (1+h)}} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin^2 \nu \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{2\cdot h}{1+h} \cdot \sin^2 \nu \cdot t}} \cdot d\nu \cdot t.$$

Das eben angeschriebene Integral läßt sich auswerten, es ist nämlich

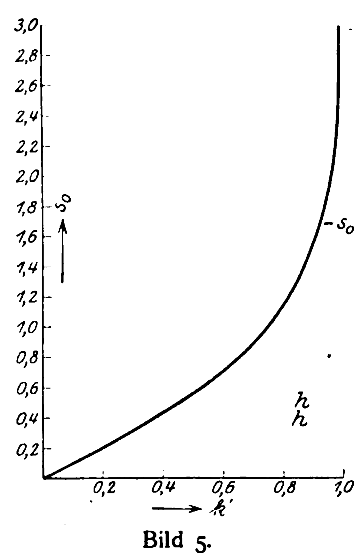


Bild 5.

$$\int_0^{2\cdot\pi} \frac{\sin^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - k'^2 \cdot \sin^2 \psi}} = \frac{4}{k'^2} \cdot (K - E),$$

wo K bzw. E die vollständigen elliptischen Integrale erster bzw. zweiter Gattung für den Modul k' bedeuten. Wir erhalten somit endgültig

$$A_\varphi = \sqrt{n} \cdot s_0,$$

mit

$$s_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot (1+h)}{\pi^2 \cdot h}} \cdot (K - E) \qquad \text{(X)}$$

und dem Modul

$$k'^2 = \frac{2 \cdot h}{1+h}.$$

Bild 5 zeigt den Verlauf der Funktion s_0 in Abhängigkeit vom Modul k'.

Um die eben abgeleitete Theorie etwas zu beleben, wollen wir nachstehend ein Zahlenbeispiel betrachten, dem wir eine Drosselspule mit der durch das Bild 2 dargestellten Magnetisierungskurve zugrunde legen wollen. Und zwar lautet die Gleichung der Wechselstrommagnetisierungskurve, wenn wir von den Effektivwerten zu Maximalwerten übergehen:

$$\breve{i} = 28{,}6 \cdot \breve{E} - 0{,}325 \cdot \breve{E}^3 + 0{,}0473 \cdot \breve{E}^5.$$

Nun nehmen wir der Einfachheit halber $z = 1$, ferner $\omega = 1$ an, es wird also dem Zahlenwert nach $\breve{E} = \breve{\varphi}$, und wir können die eben angeschriebene Gleichung unverändert auf den Zusammenhang zwischen $\breve{i}$ und $\breve{\varphi}$ übertragen. In die Differentialgleichung (IIIa) ist aber die Gleichung der Gleichstrommagnetisierungskurve einzuführen, die nach Gleichung (Ib) im vorliegenden Falle lautet:

$$i = 28{,}6 \cdot (\varphi - 0{,}01515 \cdot \varphi^3 + 0{,}00264 \cdot \varphi^5).$$

Nun sei bei ungesättigtem Eisen die Eigenschwingungszahl des betrachteten Schwingungskreises = 1, also gerade so groß als jene Frequenz, bei der die Wechselstrommagnetisierungskurve aufgenommen wurde. Wir haben also ferner noch

$$\frac{1}{C \cdot L} = 1, \qquad a = 0{,}01515, \qquad b = 0{,}00264.$$

Die eben getroffenen Festlegungen genügen für die Auswertung der Gleichungen (IV) bis (X); indem der Integrationskonstanten A beliebige Zahlenwerte beigelegt werden, läßt sich beispielsweise der genaue Verlauf von Eigenschwingungen verschiedener Amplituden berechnen. So zeigen in Bild 6 die ausgezogenen Kurven den zeitlichen Verlauf der Drosselspulenspannung unseres Schwingungskreises für 2 verschieden hohe Amplituden; sämtliche Spannungswerte sind durch $\sqrt{2}$ dividiert zu denken und auf die gleichbleibende Frequenz ω bezogen, d. h. die Amplitude ist, um besser mit Bild 2 vergleichen zu können, in Effektivwerten gemessen und mit $\frac{\omega}{\nu}$ multipliziert. Es fällt vor allem die außerordentlich flache Kurvenform auf,

insbesondere bei der unteren Kurve, die sich, wie ein Vergleich mit Bild 2 zeigt, schon auf recht hohe Eisensättigung bezieht. Die gestrichelt eingezeichneten Kurven stellen die mit Hilfe der Gleichung (X) berechnete Grundwelle der Drosselspulenspannung dar.

Bild 7 zeigt den Zusammenhang zwischen Amplitude der Grundwelle der Drosselspulenspannung und der Eigenschwingungszahl des Schwingungskreises, die mit wachsender Amplitude, also zunehmender Eisensättigung, wie nicht anders zu erwarten, sehr stark ansteigt.

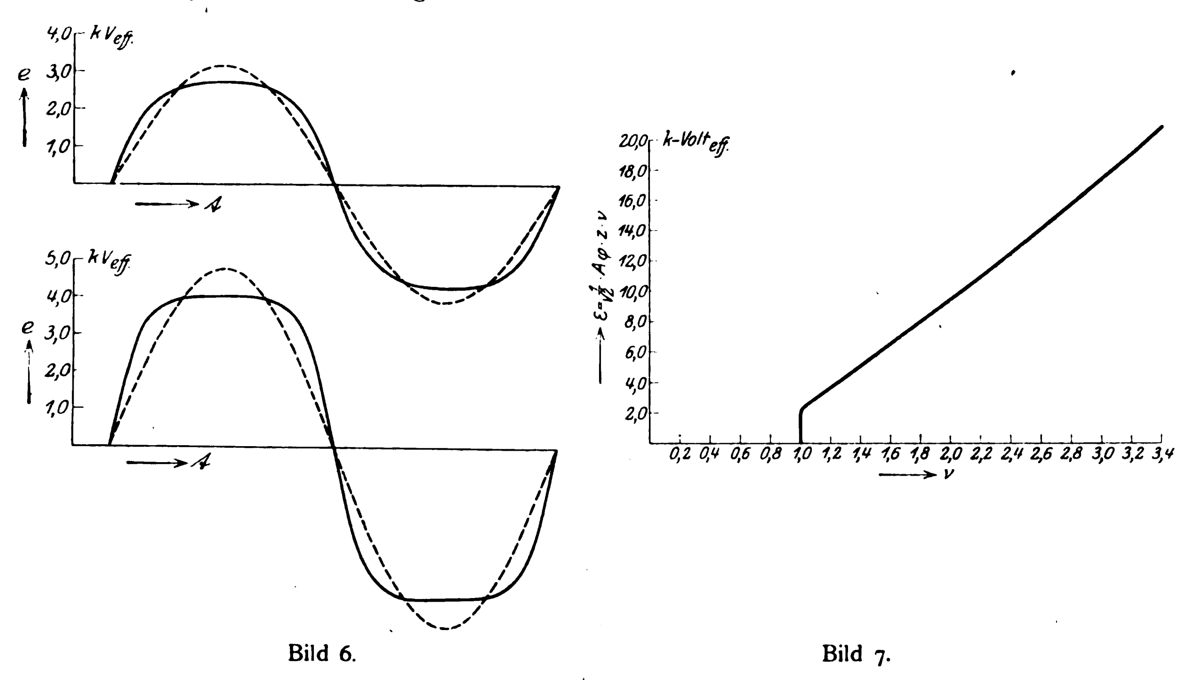


Bild 6. Bild 7.

4. Die erzwungenen Schwingungen des eisenhaltigen Schwingungskreises. Wird ein aus Selbstinduktion und Kapazität bestehender, sog. Thomsonscher Schwingungskreis an eine Wechselspannung gelegt, so wissen wir, daß an ihm unter Umständen recht hohe Resonanzüberspannungen auftreten können, nämlich dann, wenn seine Eigenschwingungszahl angenährt mit der Frequenz der angelegten Wechselspannung übereinstimmt. Stimmen Eigenfrequenz und aufgedrückte Frequenz genau miteinander überein, so wird die Höhe der Resonanzspannung nur mehr durch den Ohmschen Widerstand begrenzt; sie wächst bei vernachlässigbar kleinem Widerstand theoretisch über alle Grenzen an.

Der eisenhaltige Schwingungskreis muß sich nun grundverschieden hiervon verhalten. Einmal setzt die Eisensättigung an sich einem unbegrenzten Anwachsen der Spannung ein Ziel, ferner ist aber seine Eigenschwingungszahl stark mit der Höhe der Resonanzspannung veränderlich, so daß der Schwingungskreis, falls er sich einmal in Resonanz befunden hat, sich bei weiterem Anwachsen der Spannung wieder aus der Resonanzlage entfernt. Es flieht also, wie man sich ausdrückt, die Resonanz. Er kann nicht die Aufgabe der vorliegenden Arbeit sein, das Verhalten des fremderregten eisenhaltigen Schwingungskreises im einzelnen zu untersuchen, hier kann auf die grundlegenden experimentellen Arbeiten von Matthienssen verwiesen werden, wir wollen uns vielmehr mit der Berechnung der Höhe der Resonanzüberspannung begnügen.

Wir gehen zu dem Zwecke von den bekannten Gleichungen des Thomsonschen Schwingungskreises aus, die beispielsweise für den im Schwingungskreis



fließenden Strom lauten, wenn mit e die Höhe der angelegten Wechselspannung bezeichnet wird:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}}.$$

Seine Eigenfrequenz ist

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{C \cdot L} - \frac{r^2}{4 \cdot L^2}} = \sim \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}},$$

da der Ohmsche Widerstand, solange er nicht sehr hohe Werte annimmt, nur von verschwindend geringem Einfluß auf dieselbe ist. Wir können somit auch schreiben:

$$i = \frac{e}{L \cdot \omega \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{L \cdot \omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\omega_2}\right)^2}} \tag{XI a}$$

Bild 8.

und erhalten endlich für die Drosselspulenspannung

$$E = \frac{e}{\sqrt{\left(\frac{r}{L \cdot \omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\omega^2}\right)^2}}. \tag{XI b}$$

Die eben angeschriebene Gleichung enthält nun bereits alles, was wir brauchen. Denn es ist klar, daß die angelegte Wechselspannung nur in Resonanz mit der Grundwelle der Eigenschwingung des eisenhaltigen Schwingungskreises treten kann. Der Zusammenhang zwischen der Amplitude der Grundwelle $A_\varphi \cdot z \cdot \omega$ und der Eigenfrequenz ν ist uns aber durch die Gleichung (X) und (VI e) des vorigen Abschnittes bekannt. Wenn wir also diesen Zusammenhang in die Gleichung (XI b) einführen, so gestattet diese uns die Höhe der Resonanzspannung am eisenhaltigen Schwingungskreis zu bestimmen. Mit einer Einschränkung allerdings.

Die Gleichungen (X) und (VI e) setzen einen ganz bestimmten zeitlichen Schwingungsverlauf voraus, der eben dann eintritt, wenn der Schwingungskreis sich selbst überlassen ist, also tatsächlich „Eigenschwingungen" ausführt. Wird nun eine fremde Spannungsquelle in den Schwingungskreis eingeschaltet, so wird die Kurvenform der von demselben ausgeführten Schwingungen verändert, und zwar um so mehr, je höher die angelegte fremde Spannung ist. Damit ändert sich aber die Aussage der Gleichungen (X) und (VI e), allerdings, wie wir noch sehen werden, nicht sehr stark. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß wir die bei der Betrachtung der freien Schwingungen des eisenhaltigen Schwingungskreises gewonnenen Ergebnisse nur dann auf die erzwungenen Schwingungen übertragen dürfen, wenn

wir uns auf kleine Amplituden der erregenden Schwingung beschränken. Dies ist nun gerade der praktisch wichtigste Fall. Der bei Außerachtlassung dieser Einschränkung begangene Fehler ist übrigens nicht sehr groß.

Wir bedienen uns nun am besten der graphischen Methode und tragen, wie dies in Bild 8 geschehen, in ein Koordinatensystem eine mit Hilfe der Gleichung (XIb) errechnete Resonanzkurve ein, welche die von der Theorie des Thomsonschen Schwingungskreises her bekannte Form hat. In dasselbe Koordinatensystem wird ferner die mittels der Gleichungen (X) und (VIe) berechnete, den Zusammenhang zwischen Amplitude der Grundwelle und Eigenfrequenz des eisenhaltigen Schwingungskreises gebende Kurve eingetragen. Natürlich ist die Amplitude nicht wie in Bild 7, das sich auf Eigenschwingungen mit der Eigenfrequenz ν bezieht, gleich $A_\varphi \cdot z \cdot \nu$ zu wählen, sondern, da es sich um erzwungene Schwingungen mit der Frequenz ω handelt, gleich $A_\varphi \cdot z \cdot \omega$. Der Schnittpunkt beider Kurven gibt die gesuchte Höhe der Grundwelle der an der Drosselspule auftretenden Resonanzspannung.

Die beiden ausgezogenen Kurven, die sich auf den Fall beziehen, daß bei ungesättigtem Eisen Eigenfrequenz und erzwungene Frequenz gleich sind, der Schwingungskreis sich also gerade in Resonanz mit der angelegten Spannung befindet, schneiden sich nur einmal, und zwar im Punkte P. Es können aber, wie die gestrichelte Kurve andeutet, im Maximum 3 Schnittpunkte auftreten, von denen der zweite, P_2, wie K. W. Wagner nachgewiesen hat, jedoch keinen stabilen Gleichgewichtszustand ergibt. Der gestrichelten Resonanzkurve liegt der Fall zugrunde, daß in ungesättigtem Zustand die Eigenfrequenz dreimal kleiner ist als die aufgedrückte Frequenz. Es wird sich zunächst, wenn etwa die angelegte Wechselspannung langsam auf den angenommenen Wert gesteigert wird, der durch den Schnittpunkt P_1 charakterisierte Zustand einstellen, in welchem die Drosselspulenspannung annähernd gleich der angelegten Spannung ist, während die Spannung an der Kapazität, da die induktive Reaktanz bei weitem überwiegt, Drosselspulenspannung und angelegte Spannung also gleiche Richtung besitzen, annähernd Null ist. Dieser Zustand wird, wenn es durch keinen äußeren Eingriff gestört wird, für alle Zeiten bestehen bleiben. Nur wenn, beispielsweise durch einen Schaltvorgang oder durch vorübergehende Erhöhung der angelegten Spannung die Eisensättigung kurzzeitig bis über das Knie der Magnetisierungskurve getrieben wird, kann der Schwingungskreis sich weiter erregen, und zwar bis zu der durch den Schnittpunkt P_3 festgelegten Drosselspulenspannung. In diesem Zustand wird der Schwingungskreis, solange kein weiterer Eingriff von außen erfolgt, nun weiterhin verharren. Die Kondensatorspannung ist in diesem Zustand, da nun die kapazitive Reaktanz überwiegt, um den Betrag der angelegten Spannung größer als die Drosselspulenspannung.

Die ausgezogenen Kurven des Bildes 8 beziehen sich auf das im vorigen Abschnitt betrachtete Beispiel, die angelegte Spannung beträgt 1000 Volt, der Schwingungskreis besitzt in ungesättigtem Zustand 5 % Verluste. Trotzdem der Schwingungskreis gerade auf Resonanz abgestimmt ist, steigt die Amplitude der Grundwelle der Drosselspulenspannung auf nur 3100 Volt, die genaue Form der Drosselspulenspannung zeigt die obere Kurve in Bild 6. Dieses läßt nun erkennen, daß der für die Beanspruchung der Isolation maßgebende Scheitelwert der Drosselspulenspannung gar nur einer effektiven Spannung von 2700 Volt entspricht, während die normale Spannung der Drosselspule 2620 Volt ist. Trotzdem also die erregende Spannung volle 40 % der normalen Drosselspulenspannung ausmacht und der Schwingungskreis sich gerade in Resonanz befindet, tritt überhaupt keine Überspannung auf.

Überspannungen von mäßiger Höhe sind nur dann zu erwarten, wenn in ungesättigtem Zustande die Eigenfreqenz kleiner als die erzwungene Freqenz ist, die Induktivität der Drosselspule also größer ist, als der genauen Abstimmung entspricht. Das in dem Bild 8 gezeigte Beispiel, das auf die doppelte normale Drosselspulen-



spannung führt, ist zwar theoretisch sehr interessant, gibt aber praktisch nicht erreichbare extreme Verhältnisse wieder.

Die Kurvenform der an der Kapazität herrschenden Spannung ist, da sie sich von der Drosselspulenspannung nur um den jeweiligen Betrag der aufgedrückten Spannung unterscheidet, ganz ähnlich wie die der Drosselspulenspannung.

5. Näherungsweise Berechnung der Resonanzüberspannungen. Die im vorhergehenden entwickelte Theorie gestattet eine genaue Vorausberechnung des Verhaltens des eisenhaltigen Schwingungskreises und bedarf dazu allerdings ziemlich umfangreicher mathematischer Hilfsmittel. Die numerische Auswertung kongreter Beispiele ist daher nicht so einfach, wie der in der Praxis stehende Ingenieur es verlangen wird, und es soll daher im folgenden noch eine einfache Näherungsmethode entwickelt werden, wobei es uns vor allem auf eine Überwachung der mit derselben erzielbaren Genauigkeit ankommen wird.

Die strenge Theorie ergab uns einen in den Gleichungen (X) und (VI e) enthaltenen Zusammenhang zwischen der Amplitude der Grundwelle der Drosselspulenspannung und der Eigenfrequenz des Schwingungskreises, für den unser Beispiel die durch die beiden ersten Spalten der folgenden Tabelle gegebenen Zahlenwerte lieferte. Dabei ist die rasche Zunahme der Eigenfrequenz mit wachsender Amplitude durch die mit der Eisensättigung zusammenhängende Abnahme der Induktivität der Drosselspule bedingt. Für diese Induktivität können wir schreiben, wenn

$$i = \frac{1}{L_0 \cdot \omega} \cdot \left(E - a_0 . E^3 + b_0 . E^5\right) \tag{1}$$

die nach Schaltung Bild 1 aufgenommene Wechselstrom-Magnetisierungskurven der Drosselspule ist,

$$L = \frac{L_0}{\varepsilon} \tag{2 a}$$

mit

$$\varepsilon = 1 - a_0 . E^2 + b_0 . E^4. \tag{2 b}$$

Die Strom- und Spannungswerte sind dabei in Effektivwerten auszudrücken, L_0 ist, wie bereits früher erwähnt, die Induktivität der Drosselspule bei ungesättigtem Eisen.

Es sei ferner noch

$$\frac{1}{C \cdot \omega} = x \cdot L_0 \cdot \omega \tag{3}$$

die kapazitive Reaktanz des im Schwingungskreis liegenden Kondensators. Bei Resonanzabgleichung im ungesättigten Zustande, wie es bei unserem vorhin betrachtetem Beispiel der Fall war, ist $x = 1{,}0$; die Abweichung des Koeffizienten x von der Einheit gibt also, auf die Praxis übertragen, direkt den Grad der Verstimmung der Erdschlußspule an.

Es liegt nun nahe, folgenden Ansatz für die Eigenfrequenz des betrachteten Schwingungskreises zu versuchen

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot x}, \tag{4}$$

die aus dieser Gleichung sich ergebenden Werte sind für unser Beispiel mit $\omega = 1$, $x = 1$, $a_0 = 0{,}0227$ und $b_0 = 0{,}0066$ in die dritte Spalte der erwähnten Tabelle eingetragen worden; sie weichen, wie man sieht, nicht gerade erheblich von den in der zweiten Spalte stehenden Werten ab. Die bestehende Differenz läßt sich jedoch vollständig zum Verschwinden bringen, wenn die Gleichung (2 b) durch folgenden Ansatz verbessert wird:

$$\varepsilon' = 1 + \xi \cdot (-a_0 \cdot E^2 + b_0 \cdot E^4), \tag{2 c}$$

wie die mit $\xi = 1{,}18$ berechnete vierte Spalte der nun folgenden Tabelle erkennen läßt.



Effektivwert der Grundwelle der Drosselspulenspannung auf $\omega = 1$ bezogen $= E$	Eigenfrequenz des Schwingungskreises aus der strengen Theorie berechnet ν	Eigenfrequenz aus der Näherungsgleichung (4) und (2b) berechnet	Eigenfrequenz aus der korrigierten Näherungsgleichung (4) und (2c) berechnet
2,20 kVolt	1,02	1,015	1,025
3,77 „	1,46	1,42	1,46
4,44 „	1,84	1,70	1,86
5,05 „	2,31	2,17	2,32
5,95 „	3,14	2,92	3,14
6,70 „	3,95	3,66	3,95

Wir können also die Gleichung (4) in die Gleichung (XIb) einführen und erhalten dann eine sehr einfache Beziehung zur Berechnung der Höhe der Grundwelle der im eisenhaltigen Schwingungskreis auftretenden Resonanzspannung, nämlich

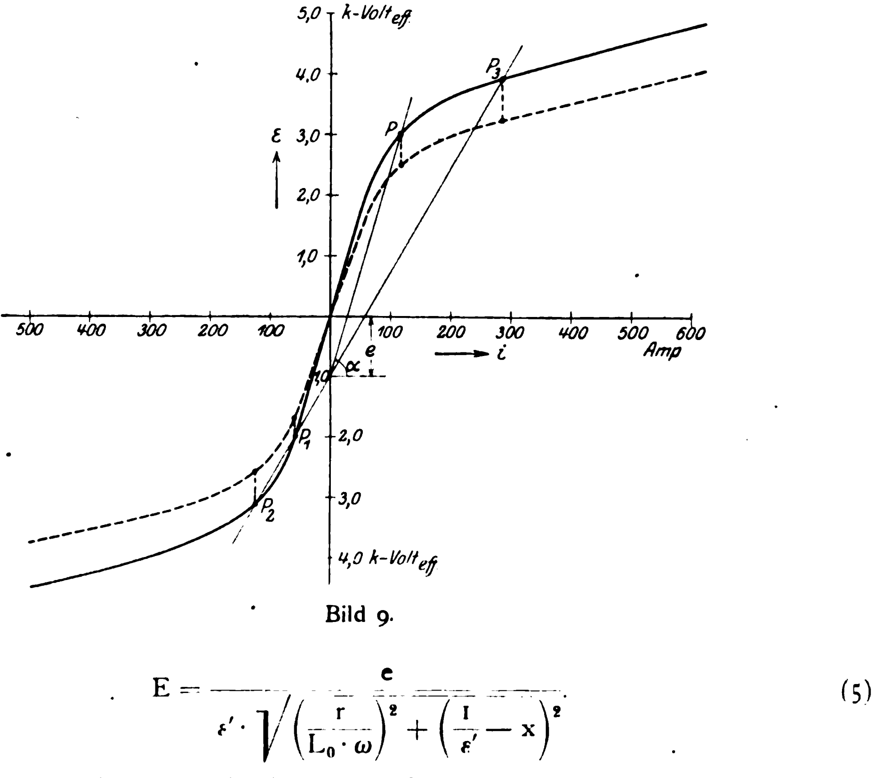


Bild 9.

$$E = \frac{e}{\varepsilon' \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{L_0 \cdot \omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon'} - x\right)^2}}. \tag{5}$$

Da diese Gleichung jedoch noch nicht nach E aufgelöst ist und sich auch nicht in einfacher Weise nach E auflösen läßt, wählt man für die Zahlenrechnung besser die folgende Schreibweise

$$e = E \cdot \varepsilon' \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{L_0 \cdot \omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon'} - x\right)^2}, \tag{5a}$$

bei der allerdings umgekehrt für vorgegebene Werte der Drosselspulenspannung die zugehörige Höhe der erregenden Spannung zu berechnen ist[1]).

Man kann sich nun durch Auswertung von Zahlenbeispielen davon überzeugen,

[1]) Die Gleichung (5a) ergibt natürlich nur jeweils einen Spannungswert, und zwar den dem Punkt P_3 des Bildes 8 entsprechenden höchstmöglichen Wert.



daß der Einfluß des Korrektionsfaktors ξ auf die erreichte Höhe der Resonanzüberspannung nur verhältnismäßig unbedeutend ist, und daß man bei Benutzung der unkorrigierten Gleichungen (2) und (4) einen Fehler begeht, der in der Größenordnung von nur wenigen Prozenten liegt. Der Korrektionsfaktor wird dadurch bedingt, daß die Näherungsrechnung sinusförmigen Verlauf von Spannung und Strom voraussetzt, während dies, wie das Bild 6 zeigt, in Wirklichkeit durchaus nicht der Fall ist. Daraus aber, daß das Rechnen mit so stark abweichenden Kurvenformen die Rechnungsergebnisse nur verhältnismäßig wenig zu fälschen vermag, können wir die Berechtigung der im 4. Abschnitt entwickelten Methode zur Berechnung des Verlaufes der erzwungenen Schwingungen ableiten; dort, wo die Einschaltung der fremden Spannungsquelle die Kurvenform der freien Schwingungen nur verhältnismäßig wenig beeinflußt, ist der bei der Berechnung der Amplitude der erzwungenen Schwingung begangene Fehler völlig verschwindend.

Weit bequemer als die eben vorgeführte Rechnung gestattet die meines Wissens zuerst von Petersen angegebene, im folgenden kurz angedeutete graphische Methode die angenäherte Bestimmung der am widerstandslosen eisenhaltigen Schwingungskreis auftretenden Resonanzüberspannungen. Wie in Bild 9 zu sehen, wird in ein Koordinatensystem die Magnetisierungskurve der betr. Drosselspule eingetragen, ferner wird auf der Ordinatenachse vom Nullpunkt aus nach unten die Höhe der den Schwingungskreis erregenden Spannung e aufgetragen. Von dem sich so ergebenden Punkt aus wird nun eine Gerade in solcher Richtung gezogen, daß sie mit der Horizontalen einen Winkel α einschließt, so daß

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E}{i} = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

der kapazitiven Reaktanz des im Schwingungskreis liegenden Kondensators entspricht. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Magnetisierungskurve legen die Amplitude der Grundwelle der an der Drosselspule auftretenden Resonanzspannung fest. Das Bild zeigt 2 Fälle, einmal ist auf ungesättigten Zustand bezogen die kapazitive Reaktanz gerade gleich der induktiven Reaktanz, und der sich ergebende einzige Schnittpunkt P läßt wiederum die trotz der vollkommenen Resonanz geringe Höhe der Drosselspulenspannung erkennen. Im zweiten Fall ist die kapazitive Reaktanz gegenüber dem ersten Falle nur halb so groß, es ergeben sich 3 Schnittpunkte, von denen der mittlere P_2 jedoch keinen stabilen Schwingungszustand ergibt.

Die folgende Tabelle enthält drei verschiedene Magnetisierungskurven der unserem Beispiel zugrunde liegenden Drosselspule. Die erste Spalte enthält die Klemmenspannung der Drosselspule, die zweite Spalte die mittels Wattmeters aufgenommenen Grundwellen J_0 des Magnetisierungsstroms, die dritte Spalte den mittels Amperemeters gemessenen Effektivwert des Magnetisierungsstroms der Drosselspule und die vierte Spalte endlich den mit Hilfe der Gleichung (2c) korrigierten Wert J_0' der Grundwelle des Magnetisierungsstroms. In das Diagramm Bild 9 müßte eigentlich die mit Hilfe der ersten und vierten Spalte gezeichnete Magnetisierungskurve eingetragen werden, um den genauen Wert der Grundwelle der Drosselspulenspannung zu erhalten. Nun zeigt aber die Tabelle, daß der Effektivwert des Drosselspulenstroms sich so wenig von der korrigierten Grundwelle J_0' unterscheidet, daß man in das Diagramm unbedenklich den ersteren einführen darf. Man erhält also bei Untersuchungen über den eisenhaltigen Schwingungskreis sehr genaue Werte der Grundwelle der an der

E	J_0	J_{eff}	J_0'
2,5 kVolt	75	75	75
3,0 „	113	113	115
3,5 „	170	180	185
4,0 „	275	310	305
4,5 „	425	475	473
5,0 „	650	740	743.



Drosselspule auftretenden Resonanzspannung, wenn man sich der durch Bild 9 charakterisierten höchst einfachen zeichnerischen Methode bedient und in das Diagramm die auf einfachstem Wege mittels Strom- und Spannungsmessung gewonnene Magnetisierungskurve der Drosselspule einträgt.

Nun ist aber zu bedenken, daß für die Beanspruchung der Isolation der Scheitelwert der Resonanzspannung maßgebend ist und daß daher der letztere in erster Linie interessiert. Er ist, wie Bild 6 erkennen läßt, in unserem Beispiel um rund 20% niedriger als die Amplitude der Grundwelle. Die in diesem Abschnitt entwickelten Näherungsmethoden geben also den Scheitelwert der Resonanzüberspannung um diesen Betrag zu hoch an und es wäre beispielsweise in das Diagramm Bild 9, um ein richtiges Bild von der Beanspruchung der Isolation der Anlage zu erhalten, nicht die durch Strom- und Spannungsmessung erhaltene ausgezogene Magnetisierungskurve einzutragen, sondern die um rund 20% tiefer liegende gestrichelte Kurve.

Über die Bestimmung der Höchsttemperatur stark isolierter Spulen.

Von

Max Jakob.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Ziel der Untersuchung.

Die von K. Lubowsky im Versuchsfeld der Großmaschinenfabrik der Allgemeinen Elektricitätsgesellschaft ausgeführten Versuche[1]) an einer Statorspule von 4 m mittlerer Windungslänge sind deshalb von besonderem Interesse, weil hierdurch die von Vidmar aufgestellte Regel

$$t_h = 2\,t_m - t_o \qquad (1)$$

zur Bestimmung der Höchsttemperatur t_h von Spulen an einem besonders extremen Fall geprüft wurde. Die Gleichung (1) erwies sich dabei nur dann als brauchbar, wenn nicht die Oberflächentemperatur, sondern die unter dem Spulenmantel gemessene Temperatur mit t_o bezeichnet wird. Lubowsky kommt daher, ebenso wie früher Rogowski und Vieweg[2]), zu dem Schluß, daß man Thermoelemente oder Widerstandsthermometer unter die Spulenhülle einbauen müsse, wenn man die Vidmarsche Regel bei stark isolierten Spulen anwenden wolle. Damit wäre freilich ihr Wert äußerst verringert. Ich habe mir nun die Frage vorgelegt, ob nicht auch im Fall dicker Umpressung die Höchsttemperatur t_h mit genügender Genauigkeit aus der Oberflächentemperatur t_o und der aus Widerstandsmessungen folgenden mittleren Temperatur t_m zu berechnen sei. Um das beurteilen zu können, mußte ich Lubowskys Ergebnisse durch einige einfache und überschlägige Berechnungen vervollständigen, über die zunächst berichtet werden soll. Es wird dann weiter eine einfache Formel entwickelt, die für den Fall starker Isolierung an Stelle von Gleichung (1) tritt. Zur Prüfung dieser Formel war endlich die Wärmeleitfähigkeit des Umpressungsmaterials von Lubowskys Spule zu messen.

[1]) K. Lubowsky, ETZ 41. S. 646. 1920.
[2]) W. Rogowski und V. Vieweg, Archiv f. Elektrotechn. 8. S. 329. 1919.

2. Einige Angaben und Bezeichnungen zu Lubowskys Versuchen.

Den Herren Dr. Böhm und Dr. Lubowsky von der AEG verdanke ich einige nicht veröffentlichte genauere Angaben über die von letzterem untersuchte Spule. Sie hatte einen reinen Kupferquerschnitt von 910 qmm, was bei einem Gesamtquerschnitt[1]) von 3230 qmm einem Füllungsfaktor von nur 28 % entsprach. Da die Spule zu einer Maschine für ungewöhnlich hohe Prüfspannung gehörte, hatte sie nämlich eine 6 mm dicke Umpressung aus „Mikartafolium" (einer Art Mikanit). Der Mantel der Spule hatte somit einen Querschnitt von 1560 qmm, die Spule ohne Mantel (Spulenkern) einen solchen von 1670 qmm.

In Bild 1 ist ein Stück von Lubowskys Spule im Längsschnitt gestreckt und im Querschnitt gezeichnet. Die Strecke $ab = l$ ist ein Viertel der Spulenlänge. Die von Lubowsky mit t_I, t_{II}, t_V, t_{VI} bezeichneten, innerhalb des Mikanitmantels angebrachten Widerstandsthermometer sind hier mit t_a', t_c', t_b', t_b'' bezeichnet (ebenso später die Temperaturen an diesen Stellen). Außerdem waren bei a und b je an einer äußeren Schmal- und Breitseite des Spulenquerschnittes Quecksilberthermometer

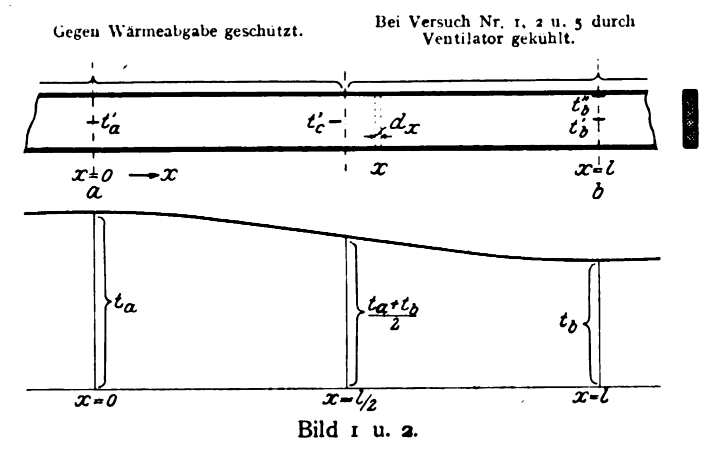


Bild 1 u. 2.

zur Messung der Oberflächentemperaturen angeordnet. Die Mittel dieser Temperaturen sind im folgenden t_a''' und t_b''' genannt. Die Temperatur an der Innenseite des Mikanitmantels wurde nur bei b gemessen. Dieser Temperatur t_b'' entspricht bei a eine Temperatur[2]) t_a''.

3. Berechnung von t_a''

t_a'' ist in erster Annäherung zu berechnen aus der Formel

$$t_m = \frac{\frac{t_a' + t_a''}{2} + \frac{t_b' + t_b''}{2}}{2} \qquad (2)$$

Aus Lubowskys Versuchen erhält man hiernach die Tabelle I.

Tabelle I.

t_a'' nach Gleichung (2) bei Lubowskys Versuchen.

Versuch Nr.	Wickelköpfe	J Amp.	t_m	t_a''
1 und 2	ventiliert	300	88,1°	93,8°
3 und 4	ventiliert	200	49,8	53,9
5	nicht ventiliert	300	101,1	103,0

[1]) 113 mm × 29 mm. Hiervon wurden 47 qmm für die Abrundung der Ecken abgezogen.

[2]) Es ist also durchweg die Temperatur in der Mitte des Wickelungsquerschnittes mit 1 Strich, die unmittelbar unter der Umpressung mit 2 Strichen, die Oberflächentemperatur mit 3 Strichen bezeichnet.

Da Gleichung (2) u. a. symmetrische Verteilung der Temperaturen längst der ganzen Spule voraussetzt, während nach Lubowskys Angaben die Temperaturen an dem zweiten Wickelkopf infolge der Wärmeableitung durch die Zuführungskabel beträchtlich niedriger waren als bei b, so wird im folgenden t_a'' nach einem von t_m unabhängigen Verfahren berechnet, das etwas genauer sein dürfte. Die Temperatur im Querschnitt des Spulenkernes verläuft zwischen a und b nach einem komplizierten Gesetz. Der achsiale Temperaturverlauf läßt sich aber sehr einfach näherungsweise durch jene Kurve 3. Grades darstellen, welche in a und b die Ordinaten $t_a = \frac{t_a' + t_a''}{2}$, bzw. $t_b = \frac{t_b' + t_b''}{2}$ und horizontale Tangenten hat (s. Bild 2)[1]). Die Gleichung dieser Kurve lautet:

$$t = t_a - \frac{3(t_a - t_b)}{l^2} x^2 + \frac{2(t_a - t_b)}{l^3} x^3. \tag{3}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird $t = \frac{t_a + t_b}{2}$ und $\frac{dt}{dx} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t_a - t_b}{l}$.

Ferner erhält man $\int_0^l t\,dx = l\frac{t_a + t_b}{2}$.

Die Berechnung von t nach Gleichung (3) und Lubowskys Versuchswerten für die Stelle c ergibt befriedigende Übereinstimmung mit den von ihm gemessenen Werten t_c'.

Nun berechnen wir die Wärmebilanz eines Elementes der Spule von der Länge dx. Wenn F den Querschnitt des Spulenkerns, q die in der Raumeinheit desselben pro Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge, λ seine mittlere Wärmeleitfähigkeit in achsialer Richtung und $\varphi(x)$ die von einem Stück seiner Oberfläche von der Länge 1 nach außen abgegebene Wärmemenge bedeutet, so lautet die Wärmebilanz[2]):

$$F \cdot q \cdot dx - \frac{F \lambda\, dt}{dx} = -F\lambda\left(\frac{dt}{dx} + \frac{d^2 t}{dx^2} dx\right) + \varphi(x)\, dx. \tag{4}$$

$\varphi(x)$ ist eine von den Kühlungsverhältnissen abhängige Funktion. Da wir aber die Form des Temperaturverlaufs nach Gleichung (3) angenommen haben, so ist $\varphi(x)$ gegeben. Aus (3) und (4) folgt nämlich

$$\varphi(x) = F\left[q + \frac{6\lambda}{l^2}(t_a - t_b)\left(\frac{2x}{l} - 1\right)\right]. \tag{5}$$

Für $x = 0$ wird

$$\varphi(0) = F\left[q - \frac{6\lambda}{l^2}(t_a - t_b)\right], \tag{5a}$$

für $x = l$ wird

$$\varphi(l) = F\left[q + \frac{6\lambda}{l^2}(t_a - t_b)\right], \tag{5b}$$

für $x = \frac{l}{2}$ wird

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = F \cdot q.$$

[1]) Wäre der Verlauf gegenüber den Ordinaten t_a und t_b völlig symmetrisch, so müßten die Tangenten hier horizontal sein. Da die Ursache der Symmetriestörungen in ziemlicher Entfernung von a und b liegt, so ist die Annahme horizontaler Tangenten bei a und b unbedenklich.

[2]) Genau genommen gilt sie nur für überall gleiche Temperatur oder gleiches Temperaturgefälle in jedem Querschnitt.

Die Integration $\int_0^l \varphi(x)\,dx$ ergibt die gesamte auf ein Viertel der Spulenlänge erzeugte Wärmemenge, nämlich $F\int_0^l q\,dx$ oder, wenn man q als konstant annehmen dürfte, Fql. Da aber die Temperatur der Spule von $x = 0$ bis $x = l$ wesentlich abnimmt, so muß die entsprechende Abnahme von q berücksichtigt werden. An einer Stelle x ist $q = q_0\,(1 + \alpha t)$, wenn q_0 die bei gleicher Stromstärke, jedoch der Temperatur von 0^0 in der Raumeinheit des Spulenkernes erzeugte Wärme, $\alpha = 0{,}004$ den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes bedeutet. Die Gleichungen (5a) und (5b) gehen somit über:

für $x = 0$ in

$$\varphi(0) = F\left[q_0(1 + \alpha t_a) - \frac{6\lambda}{l^2}(t_a - t_b)\right], \tag{6a}$$

für $x = l$ in

$$\varphi(l) = F\left[q_0(1 + \alpha t_b) + \frac{6\lambda}{l^2}(t_a - t_b)\right]. \tag{6b}$$

Es ist nun noch q_0 zu berechnen: Auf ein Viertel der Spulenlänge wird erzeugt die Wärmemenge[1])

$$\frac{Q}{4} = \frac{J^2R}{4} = \int_0^l F\cdot q\,dx = Fq_0\int_0^l (1 + \alpha t)\,dx.$$

Durch Einsetzen von t aus Gleichung (3) in diese Formel und Ausführung der Integration erhält man

$$\frac{Q}{4} = Fq_0 l\left\{1 + \alpha\frac{t_a + t_b}{2}\right\}$$

und somit

$$q_0 = \frac{Q}{4Fl}\,\frac{1}{1 + \alpha\dfrac{t_a + t_b}{2}}.$$

Da $\alpha\cdot\frac{t_a + t_b}{2}$ nur eine Korrekturgröße ist, so kann man hier $\frac{t_a + t_b}{2}$ genau genug durch die aus der Widerstandsmessung gewonnene Temperatur t_m ersetzen und erhält

$$q_0 = \frac{Q}{4Fl}\,\frac{1}{1 + \alpha t_m}. \tag{6c}$$

Da nun ferner

$$\lambda = \frac{F_{Cu}}{F}\lambda_{Cu} \tag{6d}$$

gesetzt werden kann, wenn F_{Cu} den reinen Kupferquerschnitt der Spule und λ_{Cu} die Wärmeleitfähigkeit des Kupfers bedeutet, so erhält man endlich aus den Gleichungen (6a) bis (6d)

für $x = 0$

$$\varphi(0) = \frac{Q}{4l}\,\frac{1 + \alpha t_a}{1 + \alpha t_m} - \frac{6F_{Cu}\lambda_{Cu}}{l^2}(t_a - t_b) \tag{7a}$$

---

[1]) Genau genommen wird auch hier [wie bei Gleichung (2)] zu Unrecht symmetrisches Verhalten längs der ganzen Spule vorausgesetzt, aber der Einfluß unsymmetrischer Verteilung der Wärmeabgabe nach außen und der Temperaturen auf die Wärmeerzeugung ist viel geringer, da eine Temperaturänderung um 1^0 die Wärmeerzeugung an der betreffenden Stelle erst um 4‰ verändert.

und für x = l

$$\varphi(l) = \frac{Q}{4l} \frac{1 + \alpha t_b}{1 + \alpha t_m} + \frac{6 F_{Cu} \lambda_{Cu}}{l^2}(t_a - t_b). \qquad (7b)$$

In diese Gleichungen wurde

$F_{Cu} = 9{,}10 [cm^2]$, $\lambda_{Cu} = 3{,}75 - 0{,}0008\, t_m$ [Watt·cm^{-1}Grad^{-1}], $t_a = \frac{t_a' + t_a''}{2}$, $t_b = \frac{t_b' + t_b''}{2}$

eingesetzt, wobei t_a', t_b' und t_b'' Lubowskys Tabellen entnommen und t_a'' zunächst probeweise gleich dem aus Gleichung (2) berechneten Wert der Tabelle I gesetzt wurde. Nun gilt aber ferner, weil der Temperaturabfall im Spulenmantel (senkrecht zur Oberfläche) an jeder Stelle x proportional der hier nach außen abgeführten Energie sein muß[1]),

$$\frac{\varphi(0)}{\varphi(l)} = \frac{t_a'' - t_a'''}{t_b'' - t_b'''}. \qquad (8)$$

Aus den Gleichungen (7a), (7b) und (8) läßt sich das probeweise angenommene t_a'' durch ein einfaches Näherungsverfahren genauer bestimmen.

4. Temperaturverteilung und Wärmeströmung in der von Lubowsky untersuchten Statorspule.

Die Tabelle II enthält die Mittelwerte des Stromes, Widerstandes und der Temperaturen nach Lubowskys Versuchstabellen und außerdem t_a'', $\varphi(0)$ und $\varphi(l)$ nach unseren Berechnungen.

Tabelle II.

Temperaturen und Wärmeabgabe in der von Lubowsky untersuchten Statorspule.

Versuch Nr.	Wickelköpfe	J Amp.	R Ohm	t_a'	t_a''	t_a'''	t_b'	t_b''	t_b'''
1 und 2	ventiliert	300	0,00484	111,3°	93,1°	87,2°	83,7°	63,6°	46,6°
3 und 4	ventiliert	200	0,00427	58,2	50,9	49,2	47,5	39,6	34,6
5	nicht ventiliert	300	0,00504	121,3	104,8	98,1	102,9	77,2°	62,5

Versuch Nr.	$\varphi(0)$ Watt/cm	$\varphi(l)$ Watt/cm	$t_a' - t_b'$	$t_a'' - t_b''$	$t_a''' - t_b'''$	$t_a' - t_a''$	$t_a'' - t_a'''$	$t_b' - t_b''$	$t_b'' - t_b'''$
1 und 2	0,56	1,62	27,6°	29,5°	40,6°	18,2°	5,9°	20,1°	17,0°
3 und 4	0,21	0,64	10,7	11,3	14,6	7,3	1,7	7,9	5,0
5	0,71	1,56	18,4	27,6	35,6	16,5	6,7	25,7	14,7

Dieser Tabelle kann man unmittelbar folgendes entnehmen: 1. Das achsiale Temperaturgefälle ist geringer in der Mitte des Spulenquerschnittes als am Rand. 2. An den Wickelköpfen wird auf der Längeneinheit der Spule bei Ventilation dreimal so viel Wärme, ohne Ventilation zweimal so viel Wärme abgeführt wie in der Mitte des gegen Wärmeabgabe geschützten Teiles der Spule, obwohl hier entsprechend der geringeren Temperatur weniger Wärme erzeugt wird. 3. Demgemäß ist das radiale Temperaturgefälle an den Wickelköpfen größer als in der Spulenmitte, in der Mikanitumpressung drei bzw. zweimal so groß bei b als bei a.

[1]) Die achsiale Wärmeströmung im Mantel kann nämlich vernachlässigt werden.

5. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Mikartafolium.

Aus den Angaben der Tabelle II läßt sich ferner das Wärmeleitvermögen λ_M des Mikartafoliums, des Materials des Spulenmantels, annähernd berechnen nach der Gleichung

$$\frac{Q}{4} = \frac{(t_a'' - t_a''') + (t_b'' - t_b''')}{2} \frac{l}{d} \frac{u'' + u'''}{2} \cdot \lambda_M. \quad (9)$$

Hier ist $l = 100$ cm ein Viertel der Gesamtlänge der Spule wie früher, $d = 0{,}6$ cm die Dicke des Spulenmantels, $u'' = 22{,}7$ cm sein innerer und $u''' = 27{,}5$ cm sein äußerer Umfang. Aus den Versuchen[1]) Nr. 1 und 2 erhält man so $\lambda_M = 0{,}00228$, aus dem 5. Versuch $\lambda_M = 0{,}00253$, im Mittel $\lambda_M = 0{,}00236$ [Watt · cm^{-1} · Grad^{-1}] oder 0,203 [k cal · m^{-1} Grad^{-1} Stde^{-1}].

Es wurde ferner eine genauere direkte Bestimmung von λ_M nach einer vor kurzem vom Verfasser veröffentlichten Methode[2]) ausgeführt. Zu diesem Zweck wurden von der AEG kreisrunde Mikartafolium-Platten von 117 mm Durchmesser hergestellt, deren eine von der mittleren Dicke 2,05 mm und dem Gewicht 32,8 g, also dem spezifischen Gewicht 1,49 zur Untersuchung benutzt wurde. Die Platte wurde zwischen die beiden Kupferplatten des Apparates gebracht. Um eine innige Berührung mit diesen zu erzielen, wurde beiderseits eine Ölschicht von je 0,02 bis 0,03 mm zwischengeschaltet, deren Dicke aus dem vorher gemessenen Volumen des Öls bestimmt wurde. Der Temperaturabfall in den Ölschichten wurde bei der Auswertung der Versuche berücksichtigt. Die Platte wurde etwa 3 Wochen lang in dem Versuchsapparat dauernd Temperaturen von 20 bis 60° ausgesetzt. Dabei stellte sich heraus, daß λ_M mit der Zeit (insbesondere nach der ersten Erwärmung auf 60°) zunahm. Nach 10 Tagen war so λ_M um etwa 10% gestiegen, in den folgenden 10 Tagen dagegen nahm es unter den gleichen Versuchsbedingungen kaum mehr zu. Die Ergebnisse der 4 letzten Versuche, die sich über diese Zeit erstreckten, sind in der Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III.

Gemessene Werte der Wärmeleitfähigkeit von Mikartafolium.

Versuch Nr.	Mittlere Temperatur	λ_M [kcal · m^{-1} Grad^{-1} Stde^{-1}]
6	24°	0,166
7	58	0,163
8	58,5	0,161
9	26	0,170

Der höhere bei Versuch 9 gewonnene Wert deutet vielleicht auf eine weitere zeitliche Zunahme hin; diese liegt aber in den Grenzen der Versuchsgenauigkeit, die ich auf etwa ± 3% schätze[3]). Der Mittelwert der obigen Versuche ist $\lambda_M = 0{,}165$

[1]) Die Versuche Nr. 3 und 4 sind für diesen Zweck nicht brauchbar, da hierbei $\frac{(t_a'' - t_a''') + (t_b'' - t_b''')}{2} = 3{,}3^0$ und somit kleiner war, als zur Erzielung der erwünschten Genauigkeit erforderlich.

[2]) M. Jakob, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1920. S. 406 und Annal. d. Phys. (4) 63. S. 537. 1920.

[3]) Die Versuchsgenauigkeit ist geringer als die a. a. O. bei der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers erzielte, vor allem weil dessen Wärmeleitfähigkeit mehr als das 3fache beträgt, die Wärmeverluste daher prozentuell geringer sind.

[k cal · m⁻¹ Grad⁻¹ Stde⁻¹] oder $\lambda_M = 0{,}00192$ [Watt · cm⁻¹ Grad⁻¹] bei 42°. Eine wesentliche Abhängigkeit des Wertes λ_M von der Temperatur konnte in den Grenzen von 20 bis 60° nicht festgestellt werden.

Gegenüber dem auf S. 52 aus Tabelle II berechneten Wert ist das direkt gemessene λ_M fast 19% kleiner. Ein Fehler von nur 2 bis 3° in der Bestimmung der mittleren Temperaturdifferenz $\frac{(t_a'' - t_a''') + (t_b'' - t_b''')}{2}$ würde diese Abweichung erklären. Nach dem an anderer Stelle über die Genauigkeit der vorschriftsmäßigen Messung von Oberflächentemperaturen Gesagten[1]) ist aber ein Fehler von mehreren Grad bei der Messung von t_a''' und t_b''' sehr wohl möglich.

6. Regel zur Bestimmung der Höchsttemperatur stark isolierter Spulen.

Die Kenntnis der Wärmeleitfähigkeit λ_M des Materials des Spulenmantels ermöglicht es uns nun, die Höchsttemperatur t_h einer stark isolierten Spule zu berechnen, ohne die Temperatur unter der Umpressung messen zu müssen. Schreibt man die Vidmarsche Regel in der Form

$$t_m = \frac{t_h + t_o}{2} \qquad (1\,a)$$

so erkennt man unmittelbar, daß sie im Grunde genommen nichts anders ist als der Ausdruck für die Annahme, daß die mittlere Temperatur das Mittel ist zwischen den Temperaturen der wärmsten und der kältesten Stelle der Spule. (t_o soll ja nach Vidmar die Temperatur an der kältesten Stelle der Oberfläche sein). Die Abänderungen, die vorgeschlagen wurden und sich auf Änderung des Quotienten 2 der Gleichnng (1 a) beziehen, besagen, daß die Mitteltemperatur t_m in bestimmten Fällen höher oder niedriger ist. Bei einer Spule mit starker Isolierung ist nach den Messungen von Lubowsky (in Übereinstimmung mit denen von Rogowski und Vieweg[2])) in der Gleichung (1 a) t_o zu ersetzen durch den von uns mit t_b'' bezeichneteu Wert; die Mittelbildung beschränkt sich also auf den Spulenkern. Man kann aber statt dessen, wie man leicht einsieht, mit ähnlicher Annäherung folgenden Mittelwertsatz anschreiben:

$$F \cdot l \cdot t_m + f \cdot l \left[\frac{(t_o)_{min} + (t_o)_{max}}{2} + \frac{\Delta t}{2} \right] = (F + f)\, l \cdot \frac{t_h + (t_o)_{min}}{2}. \qquad (10)$$

Dabei bedeutet F den Querschnitt, t_m die aus Widerstandsmessungen zu bestimmende Mitteltemperatur des Spulenkerns, Δt den mittleren radialen Temperaturabfall im Spulenmantel, $\left[\frac{(t_o)_{min} + (t_o)_{max}}{2} + \frac{\Delta t}{2}\right]$ daher dessen mittlere Temperatur, f seinen Querschnitt, $(t_o)_{min}$ und $(t_o)_{max}$ die niedrigste und die höchste Oberflächentemperatur des Mantels. Aus Gleichung (10) erhält man nun

$$t_h = \frac{2}{F + f} \left[F\, t_m + f \frac{(t_o)_{min} + (t_o)_{max} + \Delta t}{2} \right] - (t_o)_{min}. \qquad (10\,a)$$

Ebenso wie Vidmars einfache Formel (1) nur für kreisförmigen Querschnitt und rein radiale Wärmestörung streng richtig ist, ergibt auch Gleichung (10a) je nach der Querschnittsform und axialen Temperaturverteilung der Spule und der Dicke des Spulenmantels manchmal zu kleine, im allgemeinen aber etwas zu große Werte für t_h. Es empfiehlt sich daher, statt des Faktors 2 in Gleichung (10a) den Faktor 1,92 einzusetzen. Hiernach lautet die endgültige Formel für die Höchsttemperatur außen isolierter Spulen, deren Oberflächentemperatur in der Längserstreckung der Spule variiert:

[1]) M. Jakob, Archiv f. Elektrotechnik 8. S. 126 und S. 362. 1920.

[2]) W. Rogowski und V. Vieweg, a. a. O.

$$t_h = \frac{1{,}92}{F + f}\left[F\, t_m + f \cdot \frac{(t_o)_{min} + (t_o)_{max} + \Delta t}{2}\right] - (t_o)_{min}. \qquad (10b)$$

Dabei ist

$$\Delta t = \frac{d}{L \cdot u} \cdot \frac{Q}{\lambda_M} = \frac{d}{L \cdot u}\,\frac{J^2 R}{\lambda_M}, \qquad (10c)$$

wenn mit $L = 4l$ die Länge der Spule und mit $u = \frac{u'' + u'''}{2}$ der Umfang ihres Mantels (in mittlerer Tiefe gemessen) bezeichnet wird. Die Gleichungen (10b) und (10c) treten also für Spulen mit isolierender Hülle an die Stelle von Vidmars Gleichung (1); sie enthalten nur ohne weiteres zu bestimmende Größen mit Ausnahme von λ_M und $(t_o)_{max}$.

λ_M aber kann für die verschiedenen üblichen Isolierstoffe leicht ein für allemal gemessen werden. Wenn dann auch die verwendeten Stoffe individuelle Abweichungen von 10, 20 und mehr Prozent von dem gemessenen Wert λ_M haben, so macht dies wenig aus, weil Δt nur ein kleiner Korrekturwert ist.

Die Bestimmung der höchsten Oberflächentemperatur $(t_o)_{max}$ kann Schwierigkeiten machen, wenn die heißeste Stelle schwer zugänglich ist. Es genügen aber oft einfache Maßnahmen, um diese Stelle zugänglich zu machen, wie z. B. radiales Anbohren eines Stators zur Durchführung eines Thermoelementes oder anderen Meßgerätes bis in den Spalt zwischen Stator und Rotor (bei Maschinen ohne ausgeprägte Pole), soweit die Drähte nicht durch vorhandene Ventilationsschlitze geführt werden können. Notfalls kann auch auf die Messung von $(t_o)_{max}$ verzichtet und $(t_o)_{min} + (t_o)_{max}$ genau genug aus der Messung an einer Stelle gewonnen werden, an welcher schätzungsweise die mittlere Oberflächentemperatur herrscht, also z. B. in der meistens zugänglichen Mitte zwischen Statormitte und Wickelkopfmitte.

7. Anwendung der Regel zur Bestimmung der Höchsttemperatur auf experimentell untersuchte Spulen.

Bei Lubowskys Statorspule war $L = 4l = 400$ cm, $d = 0{,}6$ cm, $u = \frac{u'' + u'''}{2} = 25{,}1$ cm, $F = 16{,}70$ cm² und $f = 15{,}60$ cm². Aus Tabelle I ist t_m, aus Tabelle II ist $Q = J^2 R$, $(t_o)_{min} = t_b'''$ und $(t_o)_{max} = t_a'''$ zu entnehmen. Endlich ist nach unseren Messungen $\lambda_M = 0{,}00192$ [Watt · cm⁻¹ Grad⁻¹] zu setzen. Aus Gleichung (10b) und (10c) erhält man hiernach die Werte der Tabelle IV.

Tabelle IV.

Berechnung der Höchsttemperatur aus Lubowskys übrigen Versuchswerten.

Versuch Nr.	Wickelköpfe	J Amp.	Δt nach Gl. (10c)	t_h nach Gl. (10b)	t_h gemessen
1 und 2	ventiliert	300	13,6°	109,1°	111,3°
3 und 4	„	200	5,3	56,2	58,2
5	nicht ventiliert	300	14,1	118,9	121,3

Die berechneten und gemessenen Werte von t_h stimmen gut überein.

Rogowski und Vieweg[1]) haben ihre ringförmige Spule von quadratischem Querschnitt und 16,8 cm äußerem Durchmesser mit einer Doppellage von 0,03 cm dickem Leinenband umwickelt und die Temperatur außerhalb und innerhalb der

[1]) W. Rogowski und V. Vieweg, a. a. O.

Umwicklung gemessen. Die Hauptmaße der Spule waren $L = 39$ cm, $d = 0,06$ cm, $u = 17,8$ cm, $F = 19,4$ cm^2 und $f = 1,06$ cm^2, ihr Widerstand in kaltem Zustand etwa 11 Ohm. Die von den Verfassern mit 5a, 5b, 6a und 6b bezeichneten Versuche sind in der Tabelle V mit den laufenden Nummern 10 bis 13 versehen. Diese enthält in der 3. bis 6. und 9. Spalte die von Rogowski und Vieweg gemessenen Größen, in der 7. Spalte die nach unserer Gleichung (10b) berechnete Höchsttemperatur. Da die Oberflächentemperatur längs der Spule wohl überall gleich war, ist bei dieser Berechnung $(t_0)_{max} = (t_0)_{min} = t_0$ gesetzt worden.

Tabelle V.

Berechnung der Höchsttemperatur aus Rogowski und Viewegs übrigen Versuchswerten.

Versuch Nr.	Leinenband	J Amp.	t_m	t_o	Δt	t_h nach Gl. (10b)	t_h nach Gl. (11b)	t_h gemessen
10	ungetränkt	2,0	133,4°	99,9°	21,7°	154,1°	146,5°	152,5°
11	"	1,75	105,7	79,4	16,4	121,6	116,6	119,0
12	mit Isolierlack getränkt	2,0	120,0	93,5	13,8	135,1	134,0	137,8
13	"	1,75	96,3	74,8	11,3	109,4	107,6	108,8

In diesem Falle hätte man aber natürlich die nur näherungsweise gültige Gleichung (10b) nicht nötig gehabt, sondern t_h nach der (abgesehen von der Vernachlässigung des Einflusses der Krümmung der Spule) streng richtigen Formel

$$t_h = \frac{t_m - (1 - c)(t_0 + \Delta t)}{c} \qquad (11\,a)$$

berechnen können, die aus Vidmars Gleichung

$$t_h = \frac{t_m - (1 - c)\,t_0}{c} \qquad (11)$$

hervorgeht, wenn man statt t_0 den Wert $(t_0 + \Delta t)$, d. i. die Temperatur unter der Umwicklung einsetzt. Der Wert der Konstanten c ist einer früheren Abhandlung[1]) zu entnehmen; für quadratischen Querschnitt ist $c = 0,475$ und geht Gleichung (11a) über in

$$t_h = 2,106\,t_m - 1,106\,(t_0 + \Delta t). \qquad (11\,b)$$

Die hiernach berechneten Höchsttemperaturen sind in Spalte 8 der Tabelle IV aufgeführt. Sie stimmen (wohl zufällig) weniger genau mit den gemessenen Werten überein als die nach unserer Formel (10b) berechneten.

Endlich kann aus den Versuchswerten von Rogowski und Vieweg auch noch der Wärmeleitfähigkeit λ_M des Leinenbandes nach Gleichung (10c) annähernd berechnet werden. Die Wärmeleitfähigkeit des nicht getränkten Bandes wäre hiernach $\lambda_M = 0,00025$ [Watt cm^{-1} Grad^{-1}], also auffallend gering gewesen, die des getränkten Bandes etwa doppelt so groß.

8. Ergebnisse der Untersuchung.

Aus Versuchen, die Lubowsky an einer besonders stark isolierten Hochspannungsstatorspule angestellt hat, wurden weitere Schlüsse über Temperaturverteilung und Wärmeströmung in der Spule gezogen und die Wärmeleitfähigkeit λ_M des den Spulenmantel bildenden Isolierstoffes „Mikartafolium" annähernd berechnet. Es wurde ferner λ_M nach einer direkten Methode genauer gemessen und

[1]) M. Jakob, Archiv f. Elektrotechn. 8. S. 117. 1919.

dies Betimmung des Wärmeleitvermögens der verschiedenen in der Elektrotechnik gebräuchlichen Spulenisolierstoffe angeregt.

Kennt man nämlich λ_M, so läßt sich auch für eine dick ummantelte Spule, deren Oberflächentemperatur längs der Spule variiert, die Höchsttemperatur aus Widerstands- und Oberflächentemperaturmessungen für praktische Zwecke genau genug bestimmen nach einer einfachen Gleichung (10b), welche die bekannte Vidmarsche Formel ersetzt. Temperaturmessungen innerhalb des Spulenmantels, die nach den Versuchen von Rogowski und Vieweg sowie von Lubowsky bei stark isolierten Spulen erforderlich schienen, können hiernach erspart werden.

Die Brauchbarkeit der Formel (10b) wurde durch Berechnung der Höchsttemperaturen der von Lubowsky und von Rogowski und Vieweg untersuchten Spulen aus den Mittel- und Oberflächentemperaturen dieser Spulen nachgewiesen. Bei überall gleicher Oberflächentemperatur scheint es aber richtiger, nach der einfacheren Formel (11a) zu rechnen.

Ziehen und Oberwellen beim Zwischenkreis-Röhrensender.

Von

G. Glage und H. Edler.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

Einleitung.

In Heft 1 Bd. IX dieser Zeitschrift veröffentlichten wir vor kurzem eine experimentelle Untersuchung über den Zwischenkreis-Röhrensender. Jn vorliegender Abhandlung soll über den weiteren Verlauf der Versuche berichtet werden. Als nächstes stellten wir uns die Aufgabe, die Phasenverhältnisse beim Ziehen zu untersuchen.

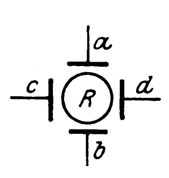


Bild 1. Anordnung der Ablenkungsbleche an der Braunschen Röhre.

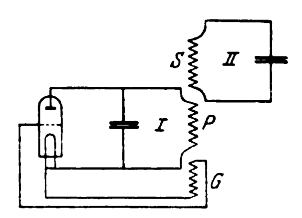


Bild 2. Schaltung des benutzten Senders.

suchen. Das geeignetste Hilfsmittel, das auch bei hochfrequenten Strömen benutzbar bleibt, war die Braunsche Röhre. Von der weiteren eingehenden Untersuchung an den langsamen Schwingungen wurde aus verschiedenen Gründen abgesehen und in der Hauptsache nur noch mit Hochfrequenz gearbeitet. Einmal war die Änderungsmöglichkeit der vielen in Betracht kommenden Faktoren wie Rückkoppelung, Koppelung zwischen Primärkreis und Sekundärkreis und die Messung der Schwingungszahlen bei den sehr großen Selbstinduktionen und Kapazitäten recht schwierig und bei Hochfrequenz leichter auszuführen, dann war es auch von Interesse, ob die bei Niederfrequenz aufgetretenen besonderen Erscheinungen sich auch bei Hochfrequenz zeigen würden. Notwendige Parallelversuche mit Niederfrequenz wurden natürlich ausgeführt.

Anordnung zur Feststellung der Phasenverhältnisse.

Benutzt wurde eine Braunsche Röhre der bekannten älteren Bauart, die durch eine Wehrsen-Influenzmaschine betrieben wurde und zwecks Regulierung der Härte dauernd mit einer Gaedepumpe in Verbindung blieb. Die Ablenkung der Kathodenstrahlen geschah nicht elektromagnetisch, sondern elektrostatisch, weil auf diese Weise das Arbeiten des Senders am wenigsten beeinflußt wurde. Die Spannung der auf ihre gegenseitige Phase zu untersuchenden Kreise wurde vom Kondensator abgehend an je zwei senkrecht zueinander angeordnete Ablenkungsplatten angelegt (vgl. Bild 1), von denen a—b mit der einen, c—d mit der anderen Spannung verbunden wurde. Die zur Ablenkung notwendigen Spannungen lagen zwischen 60—700 Volt. Wichtig für ein gutes Arbeiten der Röhre war einmal ein nicht zu hohes Vakuum und dann eine genaue Einstellung der Ablenkungsplatten; insbesondere mußte darauf geachtet werden, daß der Strahl in der Ruhelage genau in der Mitte zwischen den Blechen hindurchging, da sonst infolge der Inhomogenität der Felder Störungen eintraten. Gelegentlich wurde auch der Fleck durch ein longitudinales Magnetfeld konzentriert, allerdings wurde dabei immer darauf geachtet, daß die Figuren auf dem Schirm der Röhre vor und nach dem Einschalten des Hilfsfeldes dieselben blieben[1]).

Der benutzte Sender.

Zur Erregung der Schwingungen diente ein kleiner von Herrn Erich Schott in liebenswürdiger Weise überlassener Sender (der seinerzeit zum Prüfen von Sender-

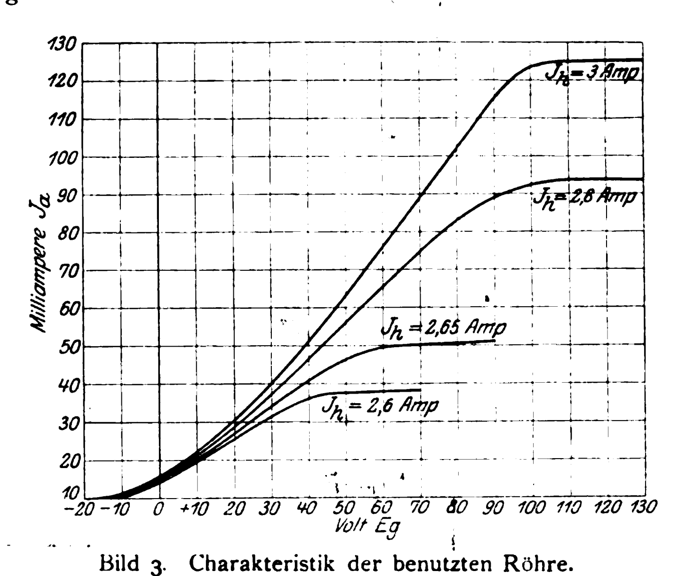


Bild 3. Charakteristik der benutzten Röhre.

röhren benutzt worden war). Die Schaltung war die von Bild 2, in dem der Übersichtlichkeit halber Anoden und Heizbatterie weggelassen sind. Die Gitterspule ließ sich über die Primärspule schieben und die Sekundärspule war innerhalb der Primärspule verschiebbar angebracht.

Die Daten des Senders waren:

Primärspule P 8 cm Durchmesser, 40 Windungen massiver Cu-Draht 1 mm Durchmesser. Windungslänge 5,2 cm. Selbstinduktion $L_1 = 13,2 \cdot 10^4$ cm C. G. S.

[1]) Bei harter Röhre zeigten nämlich mit dem rotierenden Spiegel untersuchte Schwingungskurven ganz andere Form, wenn die Verstärkung eingeschaltet war. Die Ursache scheint darin zu liegen, daß der Strahl durch das Hilfsfeld besondere Eigenschaften erhält. Es ist also bei der Konzentration des Flecks immerhin einige Vorsicht geboten. Die Erscheinung soll demnächst von anderer Seite genauer untersucht werden.



Sekundärspule S 5 cm Durchmesser, 100 Windungen massiver Cu-Draht 0,7 mm Durchmesser. Windungslänge 12,8 cm. $L_s = 19{,}2 \cdot 10^4$ cm C. G. S.
Gitterkreisspule G 9,3 cm Durchmesser, 25 Windungen 1 mm Cu-Draht. Windungslänge 3,4 cm. $L_g = 8{,}4 \cdot 10^4$ cm C. G. S.
Als Kondensatoren wurden Luftdrehkondensatoren von Telefunken benutzt. Sowohl im Primär- wie im Sekundärkreis lagen kleine Hitzdraht-Amperemeter von Hartmann und Braun, deren Genauigkeit für die doch mehr qualitativen Messungen ausreichend war. Die fast ausschließlich benutzte Röhre war die bereits in voriger Arbeit erwähnte Schottsche Röhre MM 5351 (3 Amp.). Ihre Charakteristik ist in Bild 3 beigefügt. Die Anodenspannung betrug immer 440 Volt.

Die Phase zwischen Primär- und Sekundärkreis.

Zur Sichtbarmachung derselben wurde die Spannung am Kondensator des Primärkreises (I) an die beiden Ablenkungsbleche c und d der Röhre, die Spannung

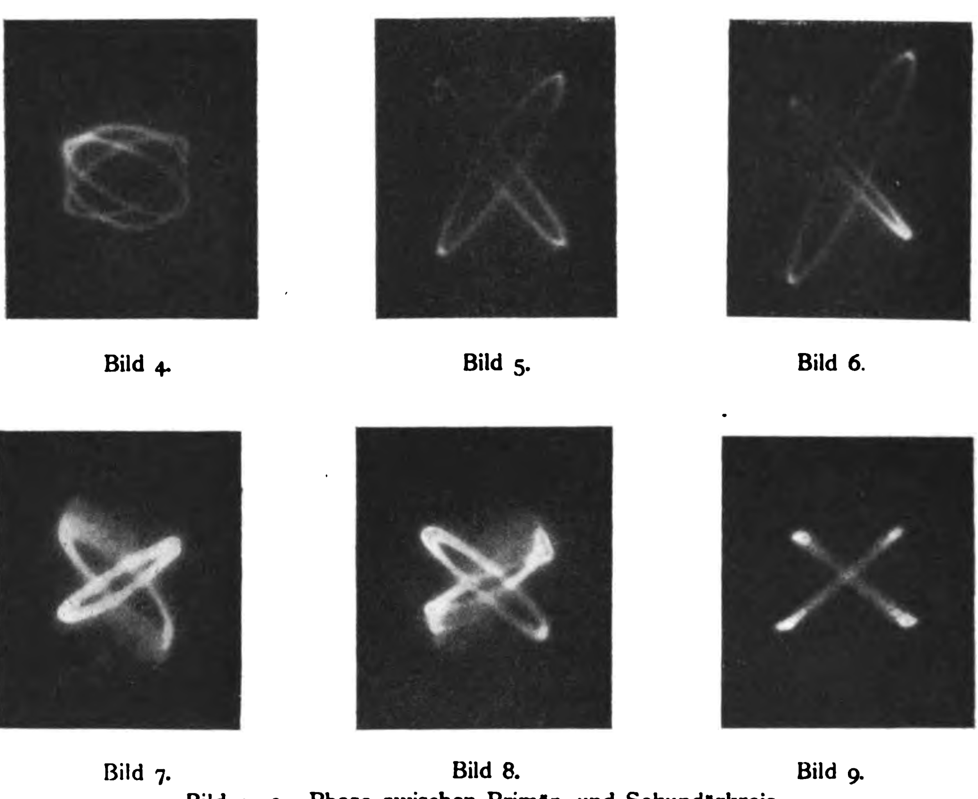


Bild 4. Bild 5. Bild 6.

Bild 7. Bild 8. Bild 9.

Bild 4—9. Phase zwischen Primär- und Sekundärkreis.

am Kondensator des Sekundärkreises (II) an die Ablenkungsbleche a—b gelegt. Wie zu erwarten, zeigte sich, daß die Phase bei extrem loser Koppelung zwischen I und II kontinuierlich durch 90^0 hindurchging. Bild 4 zeigt diese Verhältnisse. Die beiden Ellipsen sind kurz vor und nach der Resonanzstelle der Kreis (90^0 Phasenverschiebung) im Resonanzpunkt ($\varepsilon = 0$) aufgenommen. Wurde nun die Koppelung etwas fester gemacht ($k = 0{,}07$), so war es nicht mehr möglich die Phasenverschiebung von 90^0 zu erhalten, sondern die Phase sprang (vgl. Bild 5) von der einen Ellipse in die andre über. Bild 5 zeigt die beiden Ellipsen kurz vor und

unmittelbar nach dem Sprung beim Vorwärtsgehen (Variation im Sekundärkreis von kleinerer zu größerer Kapazität), Bild 6 dasselbe beim Rückwärtsgehen. Zur Verdeutlichung seien noch die Bilder 7 und 8 hinzugefügt, die dadurch erhalten wurden, daß der Kondensator des Sekundärkreises während der Aufnahme langsam gedreht wurde, bis der Sprung eintrat. Man sieht deutlich das langsame Aufrichten der Ellipsen bis zu der Stelle, wo der Sprung eintrat.

Schon hier ist ein Unterschied zwischen Vorwärtsgehen (7) und Rückwärtsgehen (6) (Ziehen) zu konstatieren. Die Sprungstellen liegen nicht gleichmäßig auf beiden Seiten der Resonanzstelle. Macht man die Koppelung zwischen I und II immer fester, so gelangt man schließlich zu einer Stelle, wo die Ellipsen in gerade Striche übergegangen sind (vgl. Bild 9). Vor dem Sprung haben wir Gleichphasigkeit, nach dem Sprung eine Phasenverschiebung von 180°. Die Koppelung, bei der keine Ellipsen mehr auftraten, betrug ungefähr $k = 0{,}08$. Die auftretenden Wellenlängen verhalten sich dabei ganz so, wie es die Wiensche Koppelungstheorie (vgl. unsere frühere Arbeit Heft 1, S. 22—24) erfordert. Bei extrem loser Koppelung haben wir beim Durchgehen durch den Resonanzpunkt ganz kontinuierliche Änderung. Es ist nur eine und zwar die schwächer gedämpfte Koppelwelle vorhanden. Ist dagegen die Koppelung fester, so tritt in der Nähe des Resonanzpunktes ein Wechsel zwischen den beiden möglichen Koppelwellen ein, indem die nummehr schwächer gedämpfte sprunghaft die Oberhand gewinnt, und zwar ist vor dem Springen die tiefere und nach dem Sprung die höhere Koppelwelle vorhanden. Bei den photographischen Aufnahmen waren die Ablenkungsbleche der Braunschen Röhre stets so mit den Kondensatoren verbunden, daß (vgl. Bild 9) der Strich oder die Figur vor dem Springen immer von links oben nach rechts unten geneigt war. Es ist daher auf den Aufnahmen sofort zu ersehen, ob die Aufnahme vor oder nach dem Springen gemacht wurde.

Als Resultat dieses Teiles der Untersuchung kann folgendes festgsetellt werden:

Bei extrem loser Koppelung geht die Phase (I und II) im Resonanzpunkte kontinuierlich duch 90° hindurch.

Bei festerer Koppelung tritt ein Springen von der tieferen in die höhere Koppelwelle ein. Eine Phasenverschiebung von 90° ist nicht mehr erreichbar. Bei noch festerer Koppelung ist vor dem Sprung nur noch Phasengleichheit und nach dem Sprung eine Phasenverschiebung von 180° vorhanden.

Auftreten starker harmonischer Oberwellen bei fester Koppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis.

Während der Untersuchung der Phasenverhältnisse zeigte sich eine bemerkenswerte Erscheinung. Bei gewissen Stellungen des Sekundärkreiskondensators erschienen auf dem Schirm der Röhre Lissajousche Figuren, die sofort erkennen ließen, daß zwei harmonische Schwingungen vorhanden waren. (vgl. die Bilder 11 ff.). Zur Besprechung der Aufnahmen empfiehlt es sich, gleichzeitig die graphische Darstellung der Verhältnisse zu betrachten, unter denen die Bilder 11—20 erhalten wurden. In Bild 10 sind als Abszissen die Kondensatorgrade des Sekundärkreises, als Ordinaten die Stromstärken im Primär- und Sekundärkreis und die Wellenlängen λ aufgetragen. Die Meßreihe ist zwecks besserer Übersichtlichkeit nur bis zum Springen der Frequenz gezeichnet. (Weitere Angaben siehe unter Bild 10.)

Die Hauptwelle λ_1 wächst kontinuierlich von 300—1130 m, wo der Sprung in die höhere Koppelwelle (240 m) eintritt.

Bei der Kondensatorstellung $C_2 = 20^0$ ging der Strich (Bild 9) in Bild 11, beim Weiterdrehen des Kondensators C_2 in Bild 12 und bei $C_2 = 22{,}5$ in Bild 13 über. Beim Weiterdrehen bis 25° erschien zunächst wieder Bild 12, dann Bild 11 und endlich wieder der Strich, alles in kontinuierlichem Übergang von einem Bild zu



andern. Die Vermutung, daß hier zwei Wellen im genauen Verhältnis 1 : 2 vorhanden seien, wurde durch Wellenmessung in der Nähe des Senders bestätigt. Außer der Hauptwelle λ_1 war noch die zweite Harmonische λ_2 vorhanden. Während des Auftretens der Oberwellen änderte sich auch der Verlauf der Hauptwelle und der Oberwelle, wie aus Bild 10 hervorgeht. Die λ- Kurven zeigen an diesen Stellen leichtes Ausbiegen. Wir können es als ein gegenseitiges Festhalten der beiden Wellen ansehen. Ganz analog trat bei der Kondensatorstellung 45—65° als zweite Welle die dritte Harmonische λ_3 (s. Bild 14—16) und bei den Kondensatorstellungen 95°—108° die vierte Harmonische λ_4 (s. Bild 17—20) zu der Hauptwelle hinzu. Bei einer Röhre von Telefunken gelang es, diese Oberwellen bis zur 6. Harmonischen zu verfolgen. Die Amplituden der Oberwellen nahmen aber bei den höheren Harmonischen merklich ab. Der Verlauf der Stromstärken im Primär- und Sekundärkreis beim

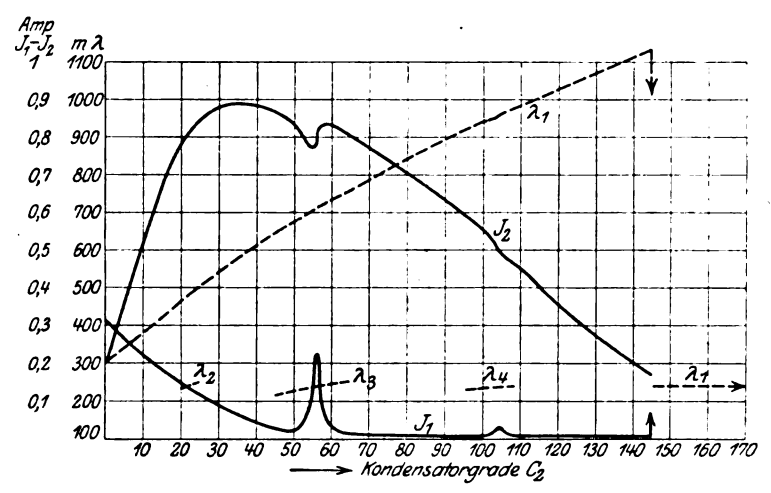


Bild 10. Graphische Darstellung der Verhältnisse beim Auftreten der Oberwellen.
Primärkreiskondensator 0°, Eigenschwingung 280 m λ.
Heizung 2,7 Amp.
Koppelung Primär-Sekundär k = 0,43.
" Gitter-Primär k = 0,18.
" Gitter-Sekundär k = 0,28.
Resonanzstelle ungefähr bei 0° C_2.
J_2 steigt nach dem Sprung auf 0,12 Amp.
Steigt bis 0,15 Amp. bei $C_2 = \infty$.

Auftreten dieser Oberwellen ist aus Bild 10 zu ersehen. Auffallend ist die Zunahme des Primärstromes und eine Abnahme des Sekundärstromes. In Bild 21 ist noch einmal das genaue Verhalten der Wellenlänge und der Stromstärken während des Auftretens der dritten Harmonischen gezeichnet. Die Verhältnisse sind allerdings dort ein klein wenig anders als in Bild 10.

Betrachten wir zunächst Bild 14. Bei dieser Aufnahme ist gleichzeitig das Achsenkreuz mit aufgenommen, indem nach der eigentlichen Aufnahme abwechselnd jedesmal das eine Paar Ablenkungsplatten abgeschaltet wurde, so daß nur der eine Kreis wirkte. Nur im Primärkreis waren Umkehrpunkte vorhanden, die auf das Vorhandensein einer mehrwelligen Schwingung schließen ließen. Die Schwingungen des Sekundärkreises (vertikale Ablenkung) waren offenbar nahezu oder ganz rein sinusförmig, d. h. einwellig[1]). Dieselbe Erscheinung ist auch an den Bildern 13, 16, 17 und 18 zu sehen. Unter dieser Voraussetzung wurde nun Bild 14 zerlegt, und

[1]) Nur bei starker Heizung traten die Oberwellen auch in dem anderen Kreis, allerdings bedeutend schwächer hervor.

zwar (vgl. Bild 22) in die Schwingung a des Sekundärkreises, die als sinusförmig angenommen wurde, und die Schwingung b des Primärkreises, die sich daraus ergab. Diese Form b ist nun nichts anderes als eine Schwingung, die sich aus einer Grund-

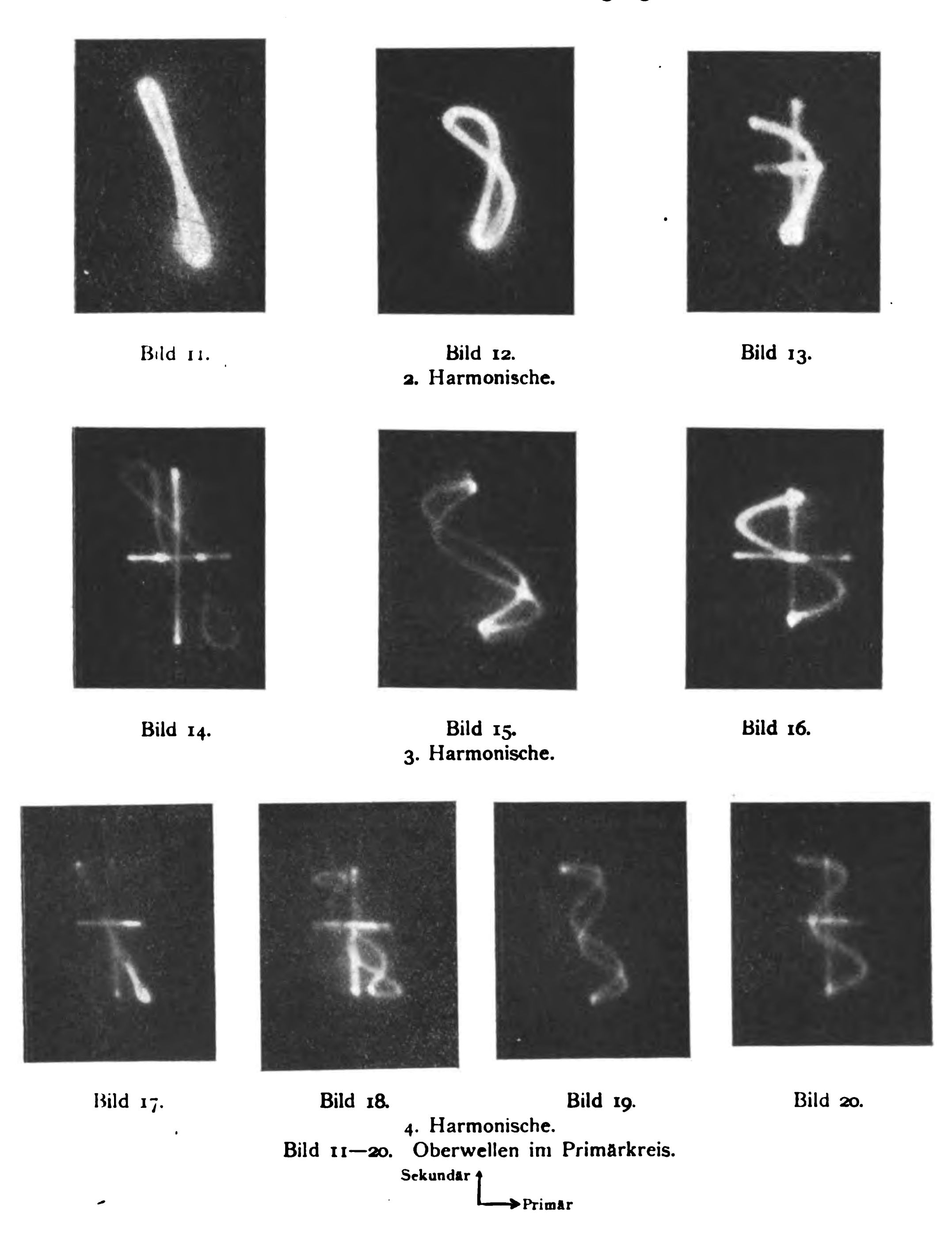


Bild 11. Bild 12. Bild 13.
2. Harmonische.

Bild 14. Bild 15. Bild 16.
3. Harmonische.

Bild 17. Bild 18. Bild 19. Bild 20.
4. Harmonische.
Bild 11—20. Oberwellen im Primärkreis.

welle von derselben Frequenz wie die Schwingung a und ihrer dritten Harmonischen zusammensetzt (vgl. dazu auch Bild 24_1).

Zur genaueren Einsicht in die Phasenverhältnisse betrachten wir nun Bild 23 (1—4), wo eine sinusförmige Grundwelle a mit ihrer zweiten Harmonischen a_1, und

zwar bei verschiedener Phase zwischen a und a_1, zu der Schwingung b kombiniert und die aus a (bezw. der ihr gleichen Schwingung des anderen Kreises) und b resultierende Lissajousche Figur gezeichnet wurde.

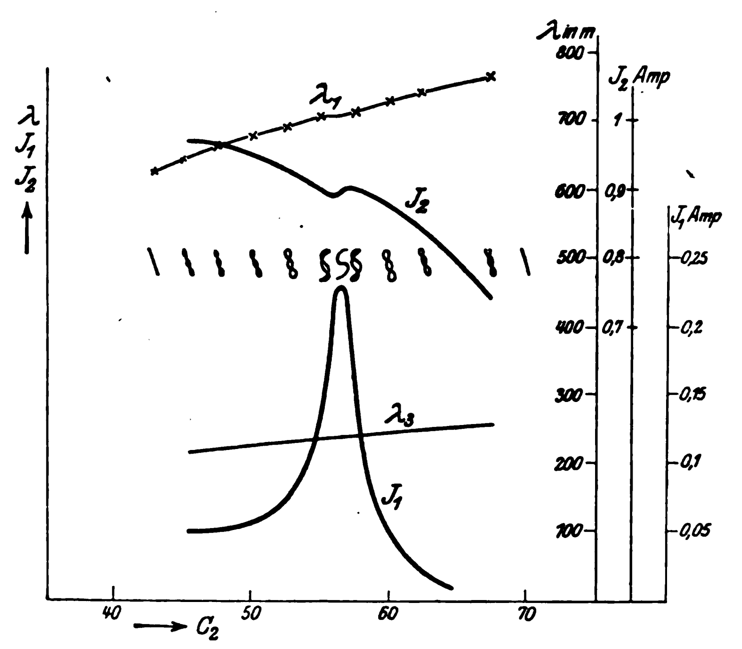


Bild 21. Verhalten beim Auftreten der dritten Harmonischen.

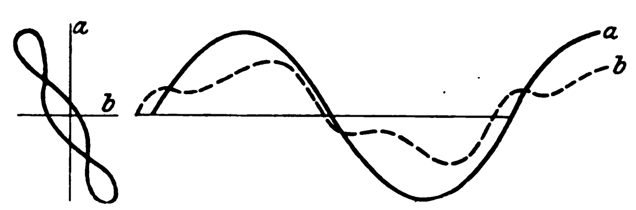


Bild 22. Analyse der Kurve des Primärkreises.

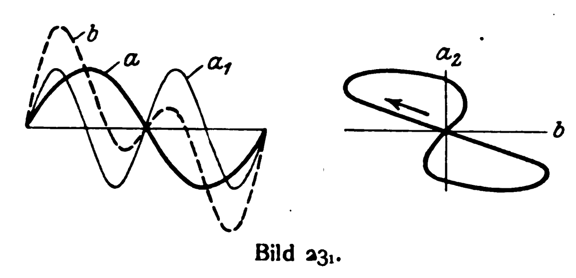


Bild 23_1.

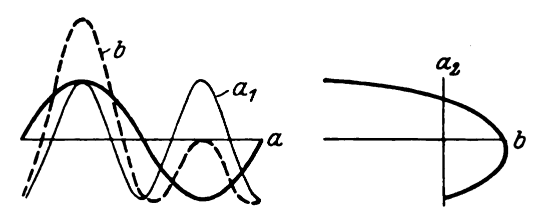


Bild 23_2.

Bild 23_{1-4}. Schwingungsform und Phase beim Auftreten der zweiten Harmonischen.

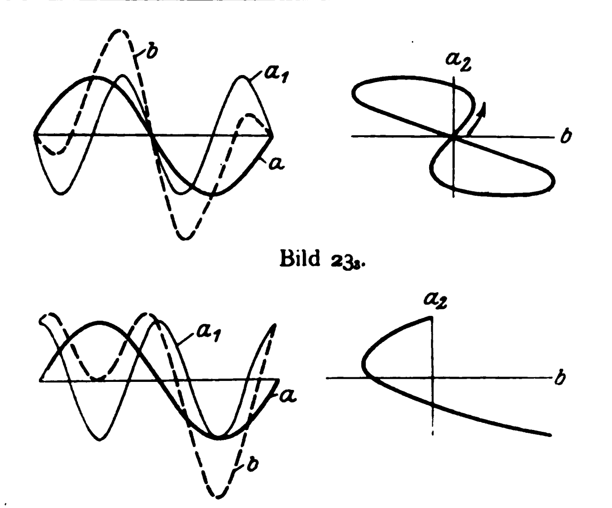


Bild 23_3.

Bild 23_4.

Bild 23_{1-4}. Schwingungsform und Phase beim Auftreten der zweiten Harmonischen.

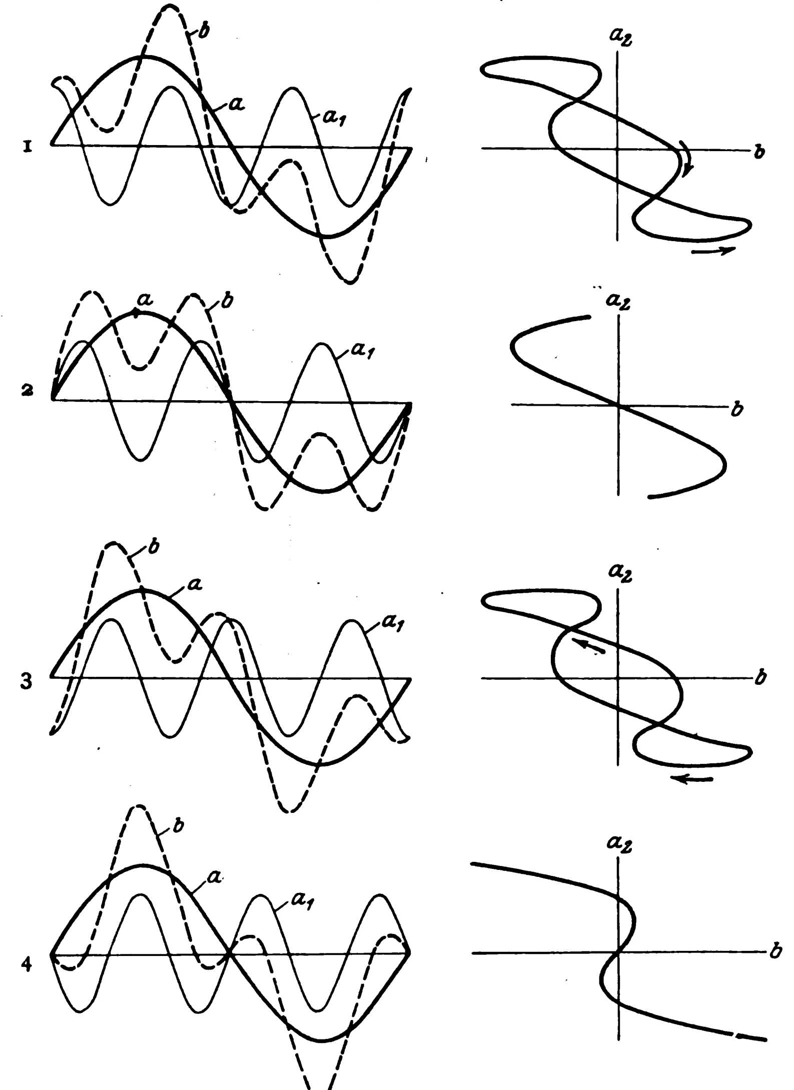


Bild 24_{1-4}. Schwingungsform und Phase beim Auftreten der dritten Harmonischen.

Beim ersten Auftreten der Figur (Bild 11) haben wir die Verhältnisse von Bild 23_1. Grundwelle a und Oberwelle a_1 im Primärkreis sind phasengleich. Daraus resultiert die Schwingung b, die nun mit der Schwingung a_2 des Sekundärkreises, die um 180° gegen die Schwingung im Primärkreis verschoben ist, aber gleiche Schwingungsdauer hat wie a, die daneben gezeichnete liegende 8 ergibt. Verschiebt sich nun die Oberwelle gegenüber ihrer Grundwelle und zwar, z. B. um 90° ihrer eigenen Wellenlänge, so erhalten wir Bild 23_2. Bei weiterer Verschiebung um 90°, also im ganzen um 180° der Oberwelle erscheint wieder dieselbe liegende 8 wie in Bild 23_1, nur mit dem Unterschied, daß jetzt die Figur in anderem Sinne durchlaufen wird. Damit sind die in diesem Zusammenhang auftretenden Figuren erschöpft. Wenn die Oberwelle noch weiter verschoben würde, so müßte die in Bild 23_4 gezeichnete Figur auftreten, was aber unmöglich ist, da nach dem Durchlaufen der 180° Phasenverschiebung die Amplitude der Oberschwingung bereits wieder gleich Null geworden ist.

In ganz gleicher Weise wie in Bild 23 ist nun in Bild 24 (1—4) die Zusammensetzung der beim Auftreten der dritten Harmonischen entstehenden Figuren gezeichnet. Auch hier sehen wir, daß bei den tatsächlich auftretenden Figuren die Oberwelle gegenüber ihrer Grundwelle eine Phasenverschiebung von 180° durchläuft. Unter den Bildern 14–16 ist die dem Bild 24_4 entsprechende Figur, die bei weiterer Verschiebung erscheinen müßte, nicht vorhanden. Wohl aber trat diese Figur in anderem Zusammenhange auf (vgl. z. B. Bild 26 Oberschwingungen im Sekundärkreis), wobei aber dann Bild 24_2 nicht erhalten wurde.

Oberwellen im Sekundärkreis.

Aus dem eben Gesagten geht schon hervor, daß die Oberwellen auch allein im Sekundärkreis erhalten werden konnten. Diese Verhältnisse sind in den Bildern 25—27 festgehalten. Dort sieht man deutlich, daß die Umkehrpunkte jetzt im

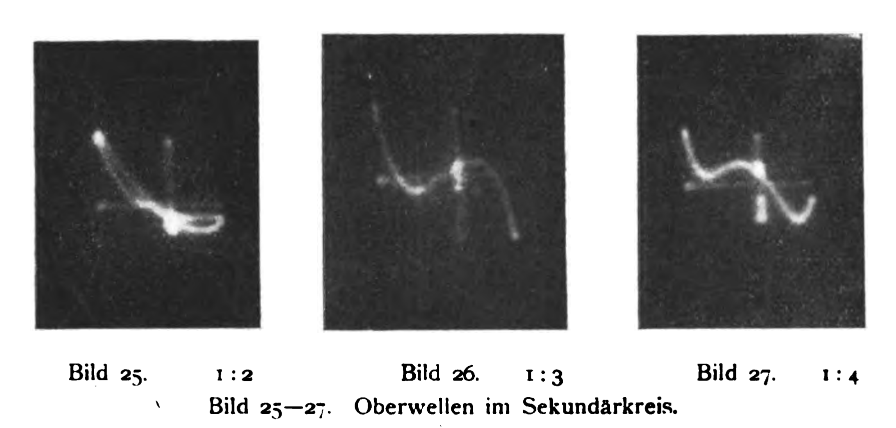


Bild 25. 1 : 2 Bild 26. 1 : 3 Bild 27. 1 : 4

Bild 25—27. Oberwellen im Sekundärkreis.

Sekundärkreis (vertikaler Strich) liegen. Die Bedingung für das Auftreten dieser Oberwellen war die, daß dem Primärkreis von vorherein die langsamere Eigenschwingung gegeben wurde, mit anderen Worten, daß wir uns vor der Resonanzstelle befanden. Z. B. stand bei diesen Aufnahmen der Kondensator des Primärkreises konstant auf 171,5°. Die genaueren Daten der einzelnen Aufnahmen sind übrigens in einer besonderen Tabelle beigefügt (vgl. Seite 65). Auch bei Niederfrequenz wurden mit dem Oszillographen diese Verhältnisse kontrolliert und festgestellt, daß auch dort die Oberwellen stets nur in dem Kreis auftraten, der die kleinere Eigenschwingung hatte. In den Aufnahmen ist nur eine Auswahl aus der zweiten bis vierten Harmonischen gegeben.

Aufmerksam machen möchten wir noch darauf, daß die Bilder 26 und 27 in ihrer Zusammensetzung Bild 24_4 entsprechen, was sich zwanglos erklärt, wenn wir bedenken, daß die beiden Koppelwellen immer um 180^0 phasenverschoben sind.

Hervorzuheben ist noch, daß die Amplituden der Oberwellen bis zu der halbkreisförmigen (Bild 13) bezw. den s-förmigen Figuren (Bild 16 bezw. 20) zu- und dann wieder abnehmen. Auch konnte festgestellt werden, daß die Intensität, mit der die Oberwellen auftraten, im allgemeinen um so kleiner war, je höher die Ordnungszahl der Oberwelle war[1]).



Bild 28. 2:5

Die genauere Nachprüfung der Wellenlängen ergab, daß Grundwelle und Oberwelle stets die von der Theorie verlangten Koppelwellen waren, so daß wir auf Grund dieser Feststellung folgendes formulieren können. Jedesmal dann, wenn die beiden nach der Theorie möglichen Koppelwellen in einem ganzzahligen Verhältnis stehen, tritt zu der zunächst allein vorhandenen tieferen die andere höhere Koppelwelle als Oberschwingung hinzu, und zwar nur in dem Kreise, der an und für sich die höhere Eigenschwingung hat. Wenn die höhere Koppelschwingung allein vorhanden ist, treten keine Oberschwingungen auf.

Tabelle.

Gemessene Werte zu den Aufnahmen mit der Braunschen Röhre

(Bild 11—31).

Bild Nr.	Jh	Koppelung (k)			Eigenschwingung		Gemessene Wellen		JPrim.	JSek.	Bemerkungen
		Primär-Sekundär	Gitter-Primär	Gitter-Sekundär	Primär	Sekundär	λ_1	λ_2			
	Amp.				γ_1	γ_2	m	m	Amp.	Amp.	
11	2,7	0,43	0,44	0,35	530	825	435	870	0,6	0,75	
12	„	„	„	„	530	832	436	872	0,5	0,9	
13	„	„	„	„	530	835	436,5	873	0,4	1,0	
14 (33)	2,65	0,43	0,18	0,28	280	690	230	690	0,07	0.9	
15 (34)	„	„	„	„	280	705	235	705	0,2	0,9	
16 (35)	„	„	„	„	280	714	238	714	0,23	0,91	
17	2,65	0,43	0,18	0,28	280	880	222	888	0,02	1,3	
18	„	„	„	„	280	915	232	928	0,01	1,2	
19	„	„	„	„	280	930	235	940	0,16	1,2	*)
20	„	„	„	„	280	940	238	952	0,15	1,15	
25	2,78	0,26	0,46	0,1	567	1018	510	1020	1,62	0,17	
26	„	„	„	„	390	1018	340	1020	1,62	0,1	
27	„	„	„	„	320	1018	255	1020	1,6	0,05	
28	2,7	0,47	0,5	0,32	340	700	290	725	—	—	
30	2,75	0,36	0,6	0,225	280	700	175	525	0,25	0,45	
31	„	„	„	„	280	700	175	513	0,25	0,45	

[1]) Vergl. Bild 11—19.

*) Die Aufnahmen 19 und 20 sind zu anderer Zeit gemacht wie 17 und 18, daher die Unterschiede im Primärstrom, der an dieser Stelle kurz vor dem Springen sehr stark von der Heizung und der Variation von C_2 abhängig ist.



Daß tatsächlich nur ein ganzzahliges Verhältnis zwischen den beiden Koppelschwingungen vorhanden zu sein braucht, damit Oberschwingungen auftreten können und nicht nur ganze vielfache, erhellt aus Bild 28, in dem die beiden Wellen im Verhältnis 2:5 stehen. Figuren dieser Art sind allerdings experimentell schwer zu erhalten[1]). Über die weiteren Bedingungen des Auftretens der Oberwellen wird weiter unten noch die Rede sein.

Verhältnis der Oberschwingungen zum Ziehen und Springen.

Bei unseren früheren Untersuchungen mit langsamen Schwingungen war es uns aufgefallen, daß, wenn z. B. der Primärkreis von vornherein langsamere Schwingungsdauer hatte als der Sekundärkreis und wenn man den Sekundärkreis von kleiner

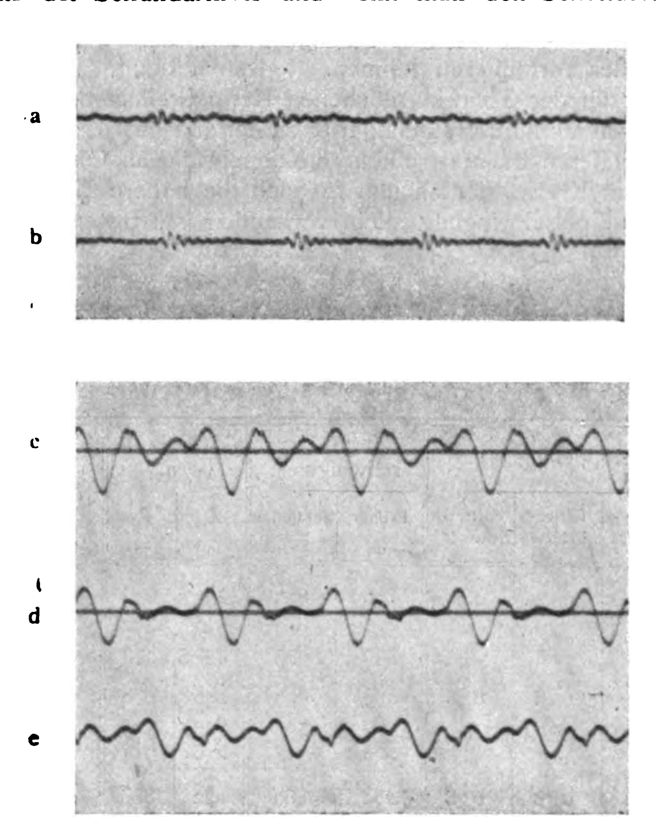


Bild 29. Oszillogramme mit Oberwellen bei Niederfrequenzen.

Eigenschwingung an variierte, besonders am Anfang neben dem normalerweise auftretenden Ton bei verschiedenen Kondensatorstellungen Tonänderungen auftraten, die den Anschein erwecken konnten, als ob man es hier mit einem mehrmaligen Springen zu tun hätte, besonders da das Einsetzen z. T. recht stoßweise erfolgte. Es lag die Vermutung nahe, daß diese hohen Töne nichts anderes seien, als die bei Hochfrequenz bereits festgestellten Oberschwingungen. Bei der Analyse mit dem Oszillographen zeigte sich, daß wir tatsächlich beim Auftreten der Obertöne eine Kurvenform mit sehr starken Oberschwingungen hatten und daß, wie schon

[1]) Es besteht die Möglichkeit, daß bei diesen Oberschwingungen der Gitterkreis eine Rolle mitspielt. Die Eigenschwingung des Gitterkreises lag in unmittelbarer Nähe der höheren Koppelwelle. Eine Entscheidung konnte aber nicht getroffen werden, da nicht genügend Material über diesen Fall vorliegt.

oben bemerkt wurde, diese Oberschwingungen im Primärkreis auftraten, wenn er die schnellere Eigenschwingung hatte und im Sekundärkreis, wenn letzterer die schnellere Eigenschwingung hatte. Die bei Niederfrequenz aufgenommenen Oszillo-

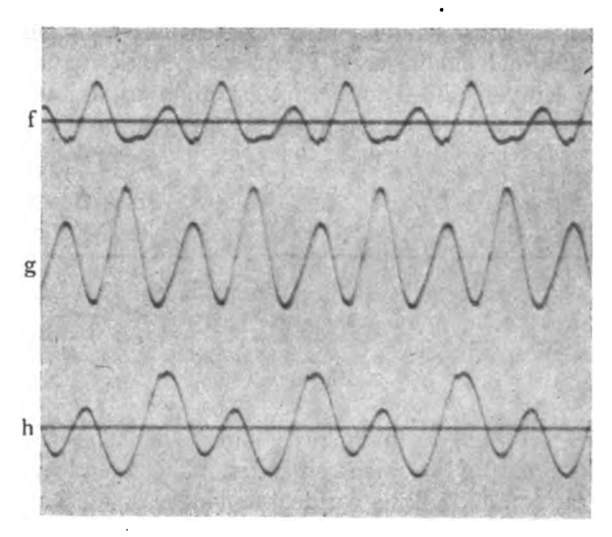


Bild 29f—h.

gramme zeigen genau dieselbe Kurvenform, wie sie die Analyse der Oberschwingungen bei Hochfrequenz ergeben hatte. Die Oszillogramme (Bild 29a—o) sind bei ca. 50 Perioden aufgenommen. Der Primärkreis hatte konstant eine Kapazität

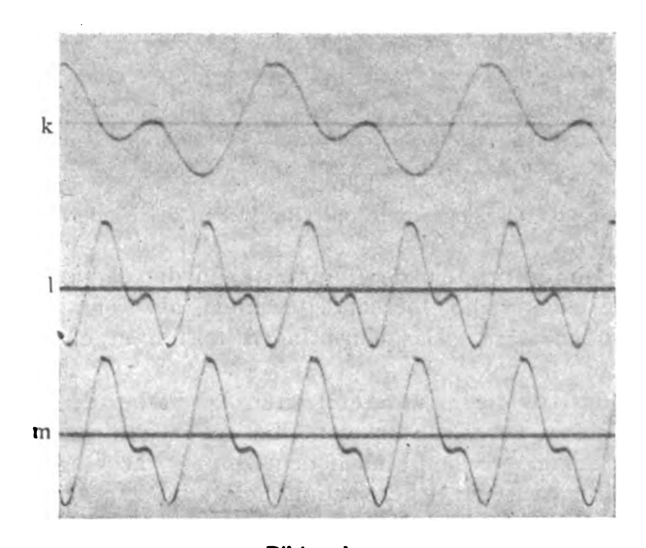


Bild 29k—m.

Bild 29a—o. Oszillogramme mit Oberwellen bei Niederfrequenz.

von 35800 cm. Der Sekundärkreis wurde allmählich von 0 bis 45000 cm variiert, wo das Springen der Frequenz eintrat. Die Aufnahmen geben die Kurvenform im Sekundärkreis mit allmählich wachsender Sekundär-Kapazität. Wir sehen zuerst (Aufnahme a, b, c) sehr rasche Oberschwingungen. Die Grundschwingung tritt hier noch kaum hervor. Bei der Aufnahme d (sekundär 4800 cm Kapazität) haben wir die vierte Harmonische, bei der nächsten die dritte; ebenso bei der nächsten. Bei

der Aufnahme g und den folgenden haben wir dauernd die zweite Harmonische. Die letzte Aufnahme gibt die Kurve nach dem Springen.

In einigen Fällen gelang es uns übrigens auch, die Kurven bei Hochfrequenz mit der Braunschen Röhre direkt sichtbar zu machen, indem die horizontale Ablenkung des Fleckes (Zeitachse) durch einen zweiten unabhängigen Röhrensender von ungefähr vier- bis fünfmal niedrigerer Frequenz bewirkt wurde. Leider war es nicht möglich, diese Kurven photographisch festzuhalten, weil es nicht gelang, die Figuren lange genug stehend zu erhalten.

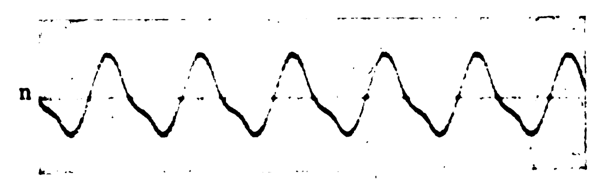


Bild 29 n.

Bemerkenswert an den Aufnahmen g—m ist noch, daß mit wachsender Kapazität C_2 die Umkehrpunkte sich einander nähern und nach unten wandern. Dieses Wandern der Umkehrpunkte wurde bei Hochfrequenz auf der Braunschen Röhre in ganz derselben Weise beobachtet. Damit dürfte der Nachweis erbracht sein, daß auch bei Niederfrequenz dieselbe Erscheinung vorhanden ist. Springen der Frequenz und die auftretenden Oberwellen sind zwei ganz verschiedene Erscheinungen, deren Auftreten allerdings auch zeitlich zusammenfallen kann, ja durch die Verhältnisse

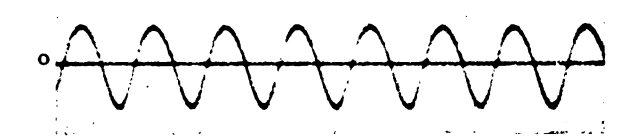


Bild 29 o.

Bild 29 a—o. Oszillogramme mit Oberwellen bei Niederfrequenz.

begünstigt wird. Beim Auftreten der Figuren kann die dadurch schon vorhandene höhere Koppelwelle leichter die Oberhand gewinnen, als wenn nur allein die tiefere Koppelwelle vorhanden wäre. Das Umspringen mitten in einer Figur wurde sehr oft beobachtet.

Die Vermutung, daß die in unserer letzten Arbeit bei den Aufnahmen 7 a und 8 a aufgetretenen Zacken auf diese Art von Oberwellen zurückzuführen seien, scheint sich nicht zu bestätigen, da sonst nach dem Sprung die Oberwelle verschwunden sein müßte. Allerdings ist in Übereinstimmung mit dem früheren die anormale Kurvenform nur im Primärkreis als dem mit der tieferen Eigenschwingung vorhanden. Die Zacken können hier vielleicht auf die stoßförmige Anregung durch den Anodenstrom erklärt werden. Eine sichere Entscheidung ist jedoch nicht möglich, da wir es in diesem Falle infolge der hohen Windungszahl und der Eigenkapazität der verwendeten Spulen nicht mehr mit quasistationären Strömen zu tun haben.

Dagegen ist bei der Aufnahme 11 b unserer vorigen Arbeit sehr wahrscheinlich, daß wir es dort mit dem Auftreten der höheren Koppelwelle als zweiter Harmonischen zu tun haben. Die Schwingungskurve ist jedenfalls vollkommen identisch mit denen von Bild 23_2 und Oszillogramm Bild 29 g. Der Sprung in die höhere Koppelwelle erfolgt noch innerhalb des Auftretens der Oberwelle.

Der in dem angeschalteten Telephon hierbei auftretende merkwürdige tiefe Ton hat, wie wir nachweisen konnten, mit den Vorgängen in den Schwingungskreisen selbst nichts zu tun. Wir machten dazu folgenden Versuch: Von zwei kleinen Summern wurde der eine auf die höhere Oktave des anderen eingestimmt und die Ströme durch zwei getrennte Spulen eines kleinen Transformators geschickt, während ein Telephon an die dritte Spule desselben Transformators angeschlossen war. Bei geringer Variation des einen Summers gelang es sehr leicht, im Telephon die tiefere Oktave des tieferen von beiden Summertönen mit recht starker Amplitude zu erhalten. Wurde das Telephon abgeschaltet, so waren nur die beiden ursprünglichen Töne zu hören.

Oberwellen nach dem Springen.

Die bisher beschriebenen Oberwellen traten nur vor dem Springen auf. Damit auch die höheren Harmonischen erhalten wurden, war es notwendig, das Ziehen sehr stark zu machen, d. h. dafür zu sorgen, daß die Sprungstelle sehr weit hinter die



Bild 30.



Bild 31.

Resonanzstelle zu liegen kam. In Bild 10 liegt sie ungefähr bei $C_2 = 0$. Über die Ursache, warum man die Sprungstellen so weit verlegen kann, wird an späterer Stelle die Rede sein.

Es tritt also zu der vorhandenen tieferen Schwingung eine höhere Harmonische hinzu. Mit anderen Worten, es kann zu der tieferen Koppelschwingung die höhere als Oberschwingung hinzutreten, aber nicht umgekehrt. Es war daher anzunehmen, daß nach dem Springen, wenn also die höhere Koppelwelle vorhanden war, Oberschwingungen nicht mehr auftreten würden. Dennoch gelang es, auch nach dem Springen Oberwellen zu erhalten. Nur mußte in diesem Fall der Gitterkreis abstimmbar gemacht werden. Bild 30 und 31 geben diese Oberwellen wieder. Die Lage der Figuren ist charakteristisch dafür, daß wir uns nach dem Sprung befinden. Die Grundwelle ist aber hier die Welle des Gitterkreises und die Oberwelle die höhere Koppelschwingung. Wir haben es hier also mit abnormen Verhältnissen zu tun. Der Sekundärkreis spielt nur eine untergeordnete Rolle, so daß wir im wesentlichen eine Wirkung zwischen Gitter und Primärkreis vor uns haben. Es war daher von Interesse, Gitter und Primärkreis allein ohne Sekundärkreis zu untersuchen.

Oberwellen im Gitter und Primärkreis.

Zu diesem Zwecke wurde parallel zur Gitterspule ein Drehkondensator geschaltet, der Sekundärkreis entfernt und an die Ablenkungsbleche der Röhre Gitterkreiskondensator C_3 und Primärkreiskondensator gelegt. Wie erwartet zeigten sich die Oberwellen auf dem Schirm der Röhre jedesmal dann, wenn die Schwingungs-

zahl eines der beiden Kreise ein Vielfaches der des anderen war, und zwar sowohl, wenn der Primärkreis die höhere, als auch, wenn er die tiefere Eigenschwingung hatte. Die Figuren zeigten dieselbe Form wie bei den Aufnahmen 11—20 und konnten ohne Schwierigkeit bis zur 9. Harmonischen verfolgt werden. Interressant war, daß auch hier die Oberwelle immer nur in dem Kreise vorhanden war, der die höhere Eigenschwingung hatte. Wir haben es also offenbar mit zwei verschiedenen Erscheinungen zu tun. Die oben beschriebenen Oberwellen sind hervorgerufen durch die Koppelwelle des Primär- bzw. Sekundärkreises, hier handelt es sich um die Eigenschwingungen des Gitter- und Primärkreises, die durch die relativ schwache Koppelung zwischen beiden nicht wesentlich verändert sind. Es ist daher erklärlich, daß außer den durch die Koppelung zwischen Primärkreis und Sekundärkreis bedingten Oberwellen auch der Gitterkreis Anlaß zu solchen geben kann.

Verhalten des Gitterkreises beim Auftreten der (durch die Koppelung zwischen I und II bedingten) Oberwellen.

An den vertikalen Ablenkungsblechen der Röhre lag jetzt das Gitter (Kathode-Gitter), an den horizontalen der Primärkreis. Sonst waren die Verhältnisse dieselben wie beim Auftreten der Bilder 11—20. Eine Auswahl der erhaltenen Figuren zeigen

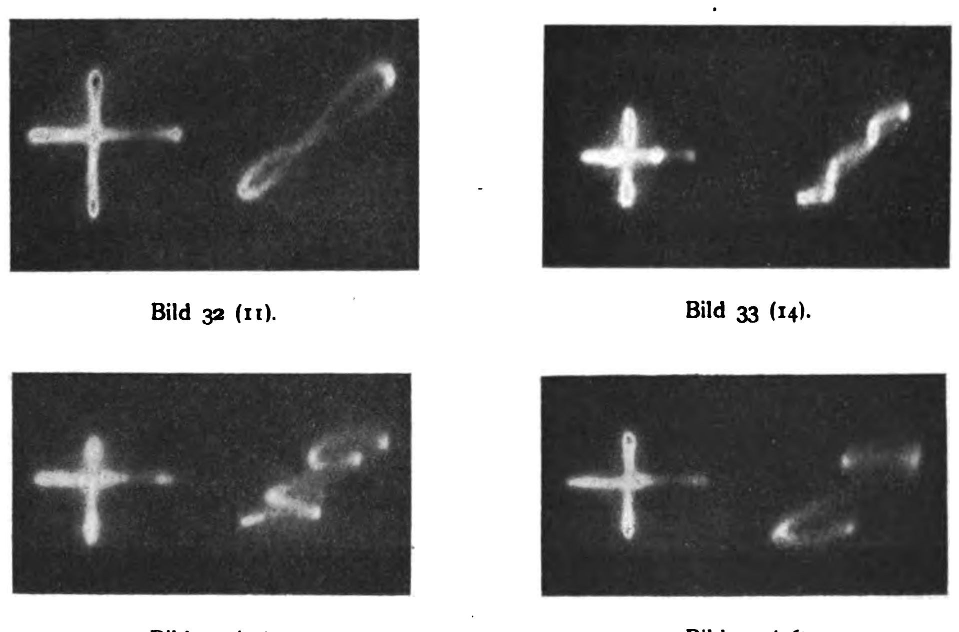


Bild 32 (11). Bild 33 (14).

Bild 34 (15). Bild 35 (16).

Bild 32–35. Verhalten des Gitterkreises beim Auftreten der Oberwellen.

Gitter ↑ → Primär

die Bilder 32—35, die den Aufnahmen Bild 11, 14, 15 und 16 entsprechen. Die Umkehrpunkte liegen sowohl im Primärkreis wie im Gitterkreis. Daß der Gitterkreis die Oberschwingungen mitmacht, wird dadurch erklärlich, daß er dieselben verstärkt.

Dadurch kommen wir zu der mutmaßlichen tieferen Ursache der Oberschwingungen. Es liegt nahe, daß durch die besondere Form des Anodenstromes jedesmal die durch die Koppelung veränderte Eigenschwingung des höheren der beiden verkoppelten Kreise angestoßen wird und sich dann ausschwingt. Diese Ansicht konnte experimentell bestätigt werden. Betrachten wir Bild 17, so fällt uns auf, daß die

Figur oben bedeutend schmäler ist wie unten. Analysiert man eine solche Figur, so erhält man eine Kurve, auf der sich deutlich über die Grundwelle die gedämpfte Oberwelle lagert. Auch Bild 18 zeigt, wenn auch weniger auffallend, diese Erscheinung. Sehr schön war sie bei Niederfrequenz mit dem rotierenden Spiegel und der Braunschen Röhre zu beobachten. Manchmal erweckte die Kurve den Eindruck, als ob man es überhaupt nur mit gedämpften Schwingungen zu tun hätte. Mit dem Oszillographen waren die Kurven nicht aufzunehmen, da die Stromamplitude bei den höheren Harmonischen, wo die Erscheinung besonders deutlich hervortrat, nicht groß genug war, während die Spannung an der Röhre vollkommen ausreichend war. Aber auch in den bei Niederfrequenz aufgenommenen Oszillogrammen ist sie, wenn auch nicht so ausgesprochen, zu sehen (Aufnahmen Bild 29 a, b, d und e). Je weiter wir in der Ordnungszahl der Oberwellen herabgehen, desto mehr ist die Möglichkeit vorhanden, daß die Oberwelle zu einer ungedämpften wird, wie es bei der zweiten und dritten Harmonischen fast immer der Fall ist.

Die Phase zwischen Gitter und Primärkreis.

Bei der verwendeten Anordnung lag es nahe, auch die Phase zwischen Gitter und Primärkreis zu untersuchen. Wie zu erwarten zeigte sich, daß zwischen beiden



Bild 36.

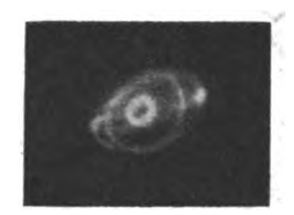


Bild 37.

Phase Gitter-Primärkreis.

eine Phasenverschiebung von 180° herrscht. Dies zeigt Bild 36. Die Anordnung war dieselbe wie bei den Bildern 32—35. Der vertikale Strich ist die Ablenkung durch das Gitter allein. Die beiden anderen Striche zeigen die Phase von 180° und sind bei verschiedener Sekundärkapazität erhalten, der größere Strich vor, der kleinere nach dem Springen der Frequenz. Nur beim Auftreten der Oberwellen ging der Strich in die Bilder 32—35 über.

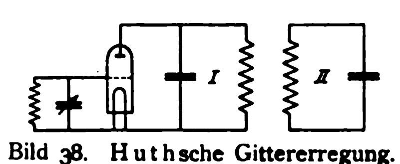


Bild 38. Huthsche Gittererregung.

Ein ganz anderes Phasenbild erhielten wir, als an Stelle der gewöhnlichen Rückkoppelung die sogenannte Huthsche Gittererregung[1]) untersucht wurde. Bei dieser erhält bekanntlich ein abstimmbarer Gitterkreis seine Energie aus den Pulsationen des Anodenstromes, mit dem er innerhalb der Röhre lose gekoppelt ist (vgl. Bild 38). Die Gitterphase betrug hier nicht 180°, sondern kam, wie aus Bild 37 hervorgeht, an 90° heran. Bei der Aufnahme war der Sekundärkreis abgeschaltet. Variiert wurde der Primärkreis. Der Gitterkreis hatte eine Eigenschwingung von 750 m = konst. Bei $C_1 = 80^0$ wurde der kleine Kreis erhalten (λ gemessen = 725 m),

[1]) Jahrbuch der drahtl. Telegraphie 1920, Heft 1, Seite 79.

bei $C_1 = 83{,}5^0$ der größere Kreis ($\lambda = 736$ m). Bei $C_1 = 91^0$ ging der Kreis in die große Ellipse über ($\lambda = 761$ m). Bei $C_1 = 110^0$ erhielten wir die liegende Ellipse ($\lambda = 830$ m). Bei der günstigsten praktisch in Betracht kommenden Einstellung beträgt also hier die Phase keineswegs 180^0, sondern bedeutend weniger.

Zusammenfassung.

In dem vorliegenden Teil der Arbeit werden

1. Oberwellen beschrieben, die bei fester Koppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis auftreten, wenn die Schwingungszahl der höheren Koppelwelle ein ganzes Vielfaches der der tieferen ist, und die im allgemeinen nur in dem Kreise auftreten, der die tiefere Eigenschwingung hat;
2. Oberwellen, bei denen der Gitterkreis eine mitbestimmende Rolle spielt;
3. wird außer der Phase zwischen Primär- und Sekundärkreis auch die Gitterphase untersucht, u. a. auch bei der Huthschen Gittererregung.

In dem nächsten Teil der Untersuchung wird über den Einfluß der verschiedenen möglichen Gitterkoppelungen auf das Ziehen und die Oberwellen berichtet werden.

Archiv für Elektrotechnik

X. Band. 3. u. 4. Heft. 1921.

Über die Geräuschbildung bei elektrischen Maschinen.

Von

Hubert Fritze, Breslau.

A. Einleitung.

Es ist eine allgemein bekannte Erscheinung, daß Wechsel- und Drehfeldmaschinen mitunter brummen, und daß Asynchronmotoren mit Käfigläufern bei gewissen Zähnezahlverhältnissen heulen oder brüllen. Auch bei Gleichstrommaschinen sind manchmal ähnliche auffällig starke Geräuschbildungen beobachtet worden. Vielfach sind mit solchen akustischen Erscheinungen Erzitterungen der Maschine verbunden. Man hat dann entsprechend den Erfahrungen der Praxis diese für den Betrieb höchst nachteiligen Nebenerscheinungen in Fällen der ersten Art richtigerweise durch Vermeidung von unsymmetrischen Wicklungen zu verhüten gewußt, bei den Asynchronmotoren die geräuschbildenden Zähnezahlverhältnisse vermieden und bei Gleichstrommaschinen durch praktisch erprobte Formgebung der Pole eine Besserung zu erzielen versucht. In vorliegendem Aufsatze werden die Ursachen insbesondere für die bisher unaufgeklärten auffällig starken Geräuschbildungen angegeben, und es wird gezeigt, wie man ihnen beim Entwurfe der Maschine begegnen kann. Dieser Aufsatz stellt eine Erweiterung der Arbeit des Verf. „Über die Verzerrung der Feld-, Spannungs- und Stromkurve des Dreiphasen-Induktionsmotors"[1]) dar.

B. Theoretische Grundlagen.

I. Asynchronmaschinen[1]). Bei einer symmetrischen Wicklung verläuft die MMK- und Feldkurve stets unter allen Polkurven in demselben Sinne periodisch, und sie erzeugt bekanntlich neben dem Grundfelde noch Oberfelder ungerader Ordnung

$$\nu = (\pm)(2\,m\,x \pm 1) \tag{1}$$

(m = Phasenzahl, x = ganze positive Zahl, vordere Vorzeichen = Drehsinn; die Drehrichtung der Grundwelle sei positiv und im Drehsinne des Uhrzeigers). Bei einer unsymmetrischen Wicklung verläuft stets die MMK- und Feldkurve nicht unter allen Grundpolen in demselben Sinne periodisch, und es entstehen, wenn sich die Aperiodizität auf $a \cdot 2\,p$ (a = bel. ganze Zahl, p = Grundpolpaare) erstreckt, bezogen auf diese die Oberfelder

$$\nu' = (\pm)(2\,m' x \pm 1) \tag{2}$$

und

$$\nu' = (\pm)(2\,m' x \mp 2) \tag{3}$$

(m' = Phasenzahl einer zusätzlichen Wicklung, durch deren Fortnehmen oder Hinzufügen die unsymmetrische Wicklung symmetrisch wird, jedoch bezogen auf $a \cdot 2\,p$). Für $a = p$ erhalten wir bezogen auf $2\,\tau_1$ (τ_1 = Grundpolteilung) die Ordnungen $\nu = \nu'/p$. Da hier ν' jede ganze Zahl sein kann, so werden neben Oberfeldern ungerader Ordnung noch solche gerader und unter Umständen gebrochener Ordnung erzeugt. Bei einem Käfigläufer mit Z_2 Nuten oder Stäben ist die Phasenzahl

[1]) Dissertation eingereicht bei der T. H. Berlin im Jahre 1918 mit Versuchen aus dem Jahre 1910.

gleich der Stabzahl auf eine Halbwelle des betrachteten Feldes, und die Felder des Ständergrundfeldes haben die Ordnungen

$$\nu_2 = (\pm)\left(\frac{Z_2}{p}\,x \pm 1\right) \tag{4}$$

und die eines Ständeroberfeldes ν_1 die Ordnungen (bezogen auf ν_1)

$$\nu_2 = (\pm)\left(\frac{Z_2}{\nu_1 \cdot p}\,x \pm 1\right). \tag{5}$$

Die Drehrichtung dieser Felder ist derart, daß das Grundfeld (x = 0) im Sinne des erzeugenden ν_1 umläuft und zu diesem stillsteht.

Wir stellen das Zahnfeld eines genuteten Eisenkörpers (des Ständers oder Läufers) mit Z gleich weit voneinander entfernten Zähnen als Wechselfeld dar, dessen Amplitude der jeweiligen örtlichen Sättigung des betrachteten wirksamen (sinusförmigen) Feldes proportional ist, zerlegen es in das räumlich sinusförmige Zahngrundfeld und überlagerte sinusförmige Zahnoberfelder, und nehmen dabei an, daß die Amplituden aller Harmonischen mit der örtlichen Sättigung proportional anwachsen. Für das Grundfeld (von der Grundpolteilung τ_p) ist die Ordnung des Zahn(haupt)grundfeldes $\nu_{z_1} = Z/p$ und für die der Zahnoberfelder gleich

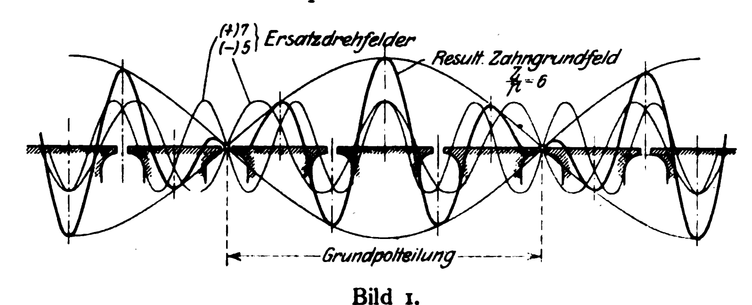


Bild 1.

$\nu = \frac{Z}{p} \cdot z_\nu$, wo z_ν hauptsächlich die Werte 2 und 3 hat. Die resultierenden Zahnfelder jeder Ordnung haben die Gestalt von Interferenzwellen. Das Zahn(haupt)-grundfeld des Grundfeldes läßt sich in 2 gegenläufige, kreisförmige, sinusförmige Drehfelder

$$\nu_{z_1} = (-)\left(\frac{Z}{p} - 1\right) \tag{6}$$

und

$$\nu_{z_1} = (+)\left(\frac{Z}{p} + 1\right) \tag{7}$$

zerlegen, deren Amplituden einander gleich und gleich der Hälfte von der des Zahnwechselfeldes sind; vgl. Bild 1 für $\frac{Z}{p} = 6$ (z. B. 3—Phasen—1—Lochwicklung).

Für das Zahnoberfeld, ν_{z_ν}, des Grundfeldes gilt

$$\nu_{z_\nu} = (-)\left(\frac{Z}{p}\,z_\nu - 1\right), \tag{8}$$

$$\nu_{z_\nu} = (+)\left(\frac{Z}{p}\,z_\nu + 1\right) \tag{9}$$

und für die Zahnfelder, z. B. des Läufers eines Oberfeldes ν_1 des Ständers

$$\nu_{z_\nu} = (-)\left(\frac{Z_2}{p}\,z_\nu \mp \nu_1\right) \tag{10}$$

und

$$\nu_{z_{\nu}} = (+) \left(\frac{Z_2}{p} z_{\nu} \pm \nu_1 \right). \tag{11}$$

Die oberen Vorzeichen gelten dabei für rechtsläufige, die unteren für linksläufige ν_1.

Sämtliche Zahnfelder eines Teiles der Maschine haben die relative Frequenz des Stromes, von welchem sie erzeugt werden; ihre Ersatzdrehfelder sind daher von der Art der Wicklungsoberfelder eines Grundstromes. Wir können jetzt beim Zahnfeld genau so wie bei den Wicklungsoberfeldern desselben Teiles der Maschine rechnen.

Der Wicklungsfaktor eines Wicklungsoberfeldes des Grundstromes von der Ordnung der Zahngrund- und Oberdrehfelder ist stets gleich dem des Grundfeldes der betr. Wicklung. Diese Wicklungsoberfelder sind daher stärker als alle anderen. Ähnliches gilt für einen beliebigen Oberstrom.

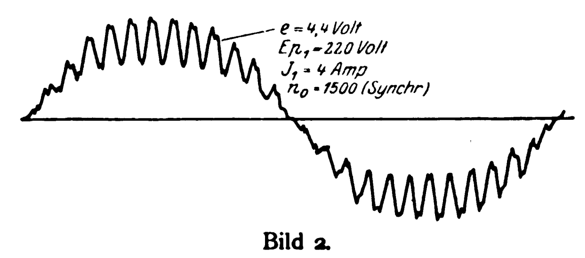


Bild 2.

Die MMK-Kurve eines Käfigs für ein beliebiges Ständerfeld ist derart zusammengesetzt, daß die Amplitude einer ihrer Harmonischen ν_2 gleich dem $\nu_2$ten Teile von der der betr. Grundwelle ist.

Beispiel für die Auswertung eines Oszillogrammes zur Ermittlung der Zahn- und Wicklungsoberfelder des Käfigs[1]). Es wurde untersucht: Dreiphasenmotor der SSW, 7 PS, 220 Volt, Sternschaltung, 4 Pole, 50 Per., 48 Ständerzähne mit 3,5 mm Schlitz, 53 Läuferzähne mit 2,5 mm Schlitz, im Ständer symmetrische 4-Lochwicklung, Käfig mit geraden Nuten und isolierten Stäben und Ringen, mittlerer Ø im Luftspalt 244,6 mm, Luftspalt 0,4 mm, Eisenlänge einschl. Isolation 80 mm.

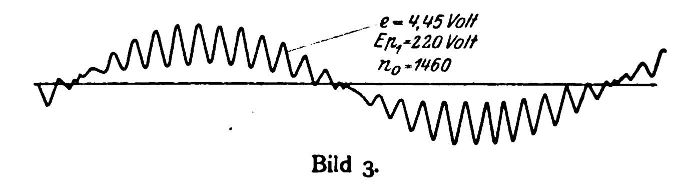


Bild 3.

In der Kurve der EMK, Bild 2, welche bei Synchronismus und 220 Volt ($B_1 = 5050$, $B_L = 4760$) in einer 4-Loch-Prüfschleife von τ_1 Breite (in welcher die 2. und 3. Zahnharmonische fast verschwinden) auf dem Ständer lagert sich über die Grundwelle eine Interferenzwelle $\frac{51}{2} c_1 + \frac{55}{2} c_1$ (c_1 = Grundfrequenz). Diese werden hauptsächlich von den Läuferzahndrehfeldern $\nu_2 = (-) \frac{51}{2}$ und $(+) \frac{55}{2}$ (durch $\nu_1 = 1$), daneben noch von einigen Wicklungsoberfeldern herrührend von den Ständeroberfeldern induziert, die wir aber wie beim Phasenanker voneinander nicht trennen können und zur Annäherung mit 25% Anteil in Rechnung stellen wollen. Nach der a. a. O. angegebenen Auswertungsmethode erhalten wir für den Effektivwert der Oberspannung

[1]) siehe a. a. O.

$$e_{\frac{51}{2}} + e_{\frac{55}{2}} = 1{,}13 \text{ Volt}$$

und daher

$$e_{z_{\frac{51}{2}}} + e_{z_{\frac{55}{2}}} \cong 0{,}75 \cdot 1{,}13 \cong 0{,}85 \text{ Volt}$$

und ferner mit Hilfe der Formel

$$e_\nu = 4{,}44 \cdot f_{w_\nu} \cdot c_\nu \cdot w \cdot \varnothing_\nu \cdot 10^{-8} \text{ Volt},$$

$$0{,}85 \cdot 10^8 = 4{,}44 \cdot 0{,}641 \cdot \frac{51}{2} \cdot 50 \cdot 4 \cdot \varnothing_{z_{\frac{51}{2}}} + 4{,}44 \cdot 0{,}386 \cdot \frac{55}{2} \cdot 50 \cdot 5 \cdot \varnothing_{z_{\frac{55}{2}}}.$$

Da sich nun die Kraftflüsse der Zahnfelder umgekehrt wie ihre Ordnungen verhalten, bekommen wir

$$\varnothing_{z_{\frac{51}{2}}} = 3700, \ \varnothing_{z_{\frac{55}{2}}} = 3400, \ B_{z_{\frac{51}{2}}} = B_{z_{\frac{55}{2}}} = 900.$$

Bei Vollast des Motors unter sonst gleichen Verhältnissen ergab sich Oszillogramm. Bild 3. Hierin ist

$$e_{\frac{51}{2}} + e_{\frac{55}{2}} = 1{,}95 \text{ Volt},$$

und es beträgt die von den Zahngrunddrehfeldern und gleichpoligen Wicklungsoberfeldern $(-)\frac{51}{2}$ und $(+)\frac{55}{2}$ induzierte EMK etwa $1{,}95 - 0{,}25 \cdot 1{,}13 = 1{,}67$ V.

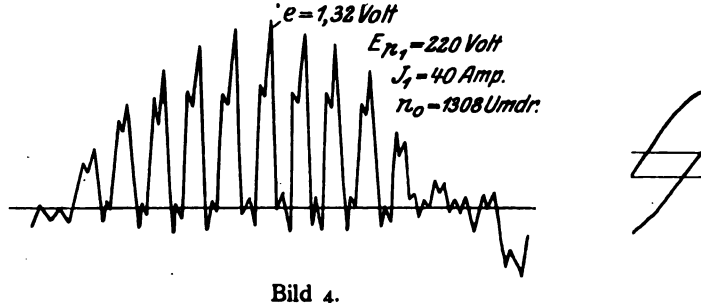


Bild 4.

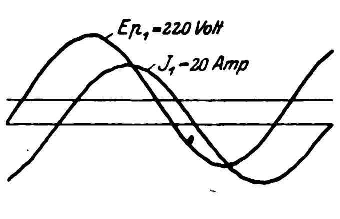


Bild 5.

Da die MMK des Läufergrundstromes in der Nähe von Synchronismus nahezu um $\pi/2$ hinter dem Grundfelde nacheilt, und die beiden Zahngrunddrehfelder nahezu in Phase mit dem Grundfelde sind (wobei wir die Phasengleichheit zweier Felder mit verschiedenen Polzahlen dahin festsetzen wollen, daß die gleichgerichteten Höchstwerte in einem Augenblick zusammenfallen, was natürlich nur Sinn hat, wenn wir mehr als 2 Felder betrachten), können wir mit einer Phasenverschiebung der beiden Felderarten von $\pi/2$ rechnen und wollen sie bei der Summe der Amplituden und Kraftflüsse durch den Faktor 0,75 berücksichtigen. Es ist daher

$$1{,}67 \cdot 10^8 = 4{,}44 \cdot 0{,}641 \cdot 24{,}77 \cdot 50 \cdot 4 \,(\varnothing_{w_{\frac{51}{2}}} + 3700)\, 0{,}75 +$$

$$+ 4{,}44 \cdot 0{,}386 \cdot 26{,}77 \cdot 50 \cdot 4 \,(\varnothing_{w_{\frac{55}{2}}} + 3400) \cdot 0{,}75.$$

Die Kraftflüsse der Wicklungsoberfelder verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Ordnungen, so daß wir endlich erhalten

$$\varnothing_{w_{\frac{51}{2}}} = 6350, \ \varnothing_{w_{\frac{55}{2}}} = 5450, \ B_{w_{\frac{51}{2}}} = 1500, \ B_{w_{\frac{55}{2}}} = 1400.$$

Bei Vollast ist daher

$$B_{\frac{51}{2}} \cong \left(B_{w_{\frac{51}{2}}} + B_{z_{\frac{51}{2}}}\right) 0{,}75 \cong (1500 + 900)\, 0{,}75 \cong 1800,$$

$$B_{\frac{55}{2}} \cong \left(B_{w_{\frac{55}{2}}} + B_{z_{\frac{55}{2}}}\right) 0{,}75 \cong (1400 + 900)\, 0{,}75 \cong 1400.$$

Bild 4. (EMK in einer 1-Loch-Prüfschleife) bei doppelter Last zeigt das gewaltige Anwachsen dieser Oberfelder mit zunehmendem Läufergrundstrome.

Um diese Wicklungsoberfelder annähernd zu berechnen, ermitteln wir die MMK des Läufergrundstromes bei Normallast (w_1 = Windungszahl je Ständerphase, f_1 = Wicklungsfaktor)[1])

$$F_1^{II} \cong 0{,}9 \cdot F_1^{I} = 0{,}9 \frac{0{,}45 \cdot m_1 \cdot w_1 \cdot f_1 \cdot J_1}{p} = 0{,}9 \frac{0{,}45 \cdot 3 \cdot 112 \cdot 0{,}96 \cdot 20}{2} = 1300.$$

Dann wird

$$F_{\frac{51}{2}}^{II} = \frac{F_1^{II}}{\frac{51}{2}} = 51.$$

Wir wollen den Eisenweg und den um Schlitz und Nutenraum vermehrten Luftweg für die Kraftröhren dieser Oberfelder durch eine Erhöhung des Luftspaltes δ um 10 % berücksichtigen und bekommen

$$B_{w_{\frac{51}{2}}} = \frac{F_{\frac{51}{2}}^{II}}{0{,}8 \cdot 1{,}1 \cdot \delta} = \frac{51}{0{,}8 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}04} = 1450,$$

$$B_{w_{\frac{55}{2}}} = \frac{51}{55} 1450 = 1350.$$

Der eingesetzte Faktor 1,1 ist also für solche Oberfelder brauchbar. Weil die Ordnungen dieser Oberfelder gebrochen sind, bleiben die Kurven der verk. Spannung und des Stromes im symmetr. Ständer bei Vollast, Bild 5, glatt wie die Kurven des Generators bei induktionsloser Belastung.

Da sich die Phase des Ständergrundstromes zum Grundfelde vom Anlauf bis zum Synchronismus ändert, so verschieben sich die sich zusammensetzenden Wicklungs- und Zahnfelder gleicher Polzahlen während der Anlaufperiode gegeneinander, und ihre result. Amplitude verändert sich stark, zumal, da der Strom beim Anlauf nicht konstant bleibt. Wir ersehen daraus, daß Größe und Wirkung dieser Oberfelder ganz wesentlich vom Betriebszustande der Maschine abhängen.

II. Synchronmaschinen. Für den genuteten Ständer gelten die Gleichungen (1) bis (3) und (6) bis (11). Der Läufer mit ausgeprägten Polen erzeugt Oberfelder ungerader Ordnung nur bei völlig symmetrischer Ausführung und symmetrischem Aufbau der Feldpole, anderenfalls bilden sich noch Oberfelder gerader und unter Umständen noch gebrochener Ordnung aus. Dasselbe tritt bei einer Dämpferwicklung ein, deren Stäbe Teile einer unsymmetrischen (Käfig-) Wicklung sind.

III. Gleichstrommaschinen. Für das Erregerfeld gilt das bei den Synchronmaschinen für das Feldsystem Gesagte, nur tritt an Stelle der Dämpferwicklung die Kompensationswicklung. Bei Anwendung von Hilfspolen ist völlige Symmetrie nur dann vorhanden, wenn immer zwischen je 2 Hauptpolen ein Hilfspol angeordnet ist.

Das Zahnfeld des Ankers ist wie das des Ständers einer Synchronmaschine zusammengesetzt.

Das Ankerfeld von Treppenform schließt das Eigenfeld der von den Bürsten kurzgeschlossenen Spulen in sich. Wenn wir letzteres zunächst ausschalten, so kann die Treppenkurve in eine dreieckförmige Kurve mit überlagertem sägezahnförmigem Diagramm mit gleichen Höchstwerten und wechselndem Schnitt zerlegt werden. Erstere steht im Raume still, ihr Höchstwert befindet sich an der Stelle der Bürsten und schwankt um einen kleinen Betrag. Diese Dreieckkurve ist nur dann symmetrisch, wenn der Bürstenabstand überall gleich, d. h. gleich τ_1 ist; sie wird unsymmetrisch und enthält Oberfelder gerader und unter Umständen gebrochener Ordnung, wenn ihr Abstand an einer Stelle größer als τ_1 ist.

[1]) Arnold, W. T. V. 1.

Das Sägezahndiagramm zwischen zwei Bürsten, also von gleichem Schnitt, besteht aus den reinen Harmonischen $\nu_s = \frac{Z}{p} a_s$, wo a_s jede ganze Zahl ist, wobei der Höchstwert einer Harmonischen ν_s den $\nu_s$ten Teil von dem der Grundwelle $\frac{Z}{p}$ beträgt. Wir betrachten eine solche beliebige Harmonische mit dem Höchstwerte F_{ν_s}. Da sich eine periodische Rechteckkurve mit dem Höchstwerte F_{ν_s} in der Form schreiben läßt

$$f_n = \frac{4 \cdot F_{\nu_s}}{n \cdot \pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{4 \cdot F}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right),$$

so können wir diese Harmonische in bezug auf eine Achse durch die Bürste folgendermaßen darstellen:

$$f'_{\nu_{s_x}} = \frac{4}{\pi} F_{\nu_s} \cdot \cos\left(a_s \frac{Z}{p} \cdot \frac{x}{\tau_1}\pi\right) \cdot \left(\cos\frac{x}{\tau_1}\pi - \cos\frac{3x}{\tau_1}\pi + \cos\frac{5x}{\tau_1}\pi \dots\right).$$

Dies sind sämtlich Interferenzwellen, von denen die Grundwelle am stärksten ist. Die Welle $\cos\frac{x}{\tau_1}\pi$ wandert zum Anker mit der relativen Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Ständergrundfeldes in bezug auf den Anker, daher können wir schreiben

$$f_{\nu_{s_x}} = \frac{4}{\pi} F_{\nu_s} \cdot \sin\left(\omega_1 t - \frac{x}{\tau_1}\pi\right) \cdot \cos\left(a_s \frac{Z}{p} \cdot \frac{x}{\tau_1}\pi\right)$$

oder

$$f_{\nu_{s_x}} = \frac{2}{\pi} F_{\nu_s} \cdot \sin\left[\omega_1 t + \left(\frac{Z}{p} a_s - 1\right)\right] + \frac{2}{\pi} F_{\nu_s} \cdot \sin\left[\omega_1 t - \left(\frac{Z}{p} a_s + 1\right)\right].$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhalten wir für die Wellen 3-, 5-, 7-...facher Polteilungen. Die beiden Summanden des letzten Ausdruckes stellem 2 gegenläufige, kreisförmige sinusförmige Dreh-MMKen von den Ordnungen $(\pm)\left(\frac{Z}{p} a_s \pm 1\right)$ dar, deren Wicklungsfaktoren gleich dem der Grundwelle, und von denen die beiden Wellen $(\pm)\left(\frac{Z}{p} \pm 1\right)$ am stärksten sind.

Das Eigenfeld wird erzeugt durch eine Wechsel-MMK, welche mit der Frequenz der sekundlich vorbeieilenden Lamellenzahl schwankt. Die gleichzeitig in und aus dem Kurzschluß tretenden Spulen unterstützen sich im allgemeinen in ihrer Wirkung. Die MMK-Kurve kann unsymmetrisch werden, wenn bei ungerader Lamellenzahl je Polpaar (wo also der Kurzschluß beider Spulen nacheinander erfolgt), die beiden Leiter der kurzgeschlossenen Spule nicht um τ_1 entfernt sind. Diese Unsymmetrie nimmt mit wachsender Verkürzung des Wicklungsschrittes zu. Aber auch bei gleichzeitigem Kurzschluß an den Bürsten entstehen Unsymmetrien, wenn die kurzgeschlossenen Leiter, für sich betrachtet, keine symmetrische Wicklung bilden. Dasselbe gilt in verringertem Maße, wenn von einer Bürste gleichzeitig mehrere Spulen kurzgeschlossen werden, weil die Schwankungen des Eigenfeldes durch die Übereinanderlagerung verkleinert werden.

Das Ankerfeld kann sich jedoch nur dort stark ausbilden, wo dem Anker Eisen der Haupt- und Hilfspole gegenübersteht; daher hat das Feld der dreieckförmigen MMK-Kurve starke Einsattlungen zwischen den Polen und ist nur dann in demselben Sinne periodisch und aus Harmonischen ungerader Ordnung zusammengesetzt, wenn die Bürsten in bezug auf die Pole, in demselben Sinne betrachtet, immer dieselbe Lage haben und wenn alle 2 p Hilfspole vorhanden sind, anderenfalls entstehen noch Oberfelder gerader und unter Umständen gebrochener Ordnung. Die Harmonischen der ruhenden Ankerfeldkurve setzen sieh mit den gleichpoligen des Erregerfeldes, und ferner die Ankeroberfelder der Sägezahnkurve mit den gleich-



poligen Zahnfeldern zusammen, wobei sie sich zum Teil aufheben oder verstärken können[1]).

IV. Wechselstrom-Kommutator-Maschinen. Für die Wicklungs- und Zahnoberfelder des Ständers und Läufers (ohne Eigenfeld) gelten wiederum die Ansätze Gleichung (1) bis (3) und (6) bis (11), bzw. die sinngemäß übertragenen, bei der Gleichstrommaschine angestellten Überlegungen. Die Zahnfelder und gleichpoligen Wicklungsoberfelder sind hier wie bei der Asynchronmaschine stark. Die Eigenfelder der kurzgeschlossenen Ankerspulen bilden bei einer Dreiphasenmaschine, da die Bürstenströme um je $2\pi/3$ zeitlich verschoben sind, zusammen ein Dreiphasensystem und erzeugen ein Drehfeld, welches unsymmetrisch ist und geradzahlige und unter Umständen gebrochene Oberfelder enthält, wenn die kurzgeschlossenen Spulen, für sich betrachtet, keine symmetrische Wicklung bilden. Bei den einphasigen Maschinen ist das Eigenfeld ein Wechselfeld. Da der Ständer lamelliert ist, ist die Dämpfung des Eigenfeldes nicht groß, und es kann sich im Gegensatz zur Gleichstrommaschine stark ausbilden, zumal da auch die Luftspaltlängen im Vergleich zur Gleichstrommaschine sehr klein sind.

C. Die mechanischen (magnetischen) Wirkungen der Oberfelder.

Während zwei räumlich sinusförmige Felder jeweilig nur ungerader, gerader oder gebrochener Ordnung beim Zusammenwirken an entgegengesetzten Stellen des Luftspaltes stets gleich große resultierende Sättigungen hervorrufen, ändern sich die Verhältnisse, sobald die Felder gemischte Ordnungen haben. Es kann nun der Fall eintreten, daß infolge der an entgegengesetzten Stellen des Luftspaltes verschieden großen Feldstärken auf den Läufer einseitige magnetische Zugkräfte ausgeübt werden, deren Größe für 2 beliebige Felder ν' und ν'' mit den Polpaarzahlen p' und p'' berechnet werden soll.

Wir nehmen zuerst an, daß die beiden Felder zueinander stillstehen und an einer Stelle mit ihren Höchstwerten B' und B'' zusammenfallen. Wir legen an dieser senkrecht oben gedachten Stelle eine Achse durch die Läufermitte. Der Läufer habe einen Durchmesser von D cm und eine ideelle Länge von l cm. Dann beträgt die magnetische Zugkraft dk, welche in Richtung dieser Achse auf einen Flächenstreifen $\frac{D}{2} \cdot dx \cdot l\ cm^2$ des Läufers im Winkelabstande x von der Achse ausgeübt wird, wenn dort die Sättigung B_x herrscht,

$$dk = \frac{B_x^2 \cdot \frac{D}{2} \cdot dx \cdot l \cdot \cos x}{8\pi} \text{ Dynen},$$

und die Kraft, welche auf eine Hälfte des Läufers ausgeübt wird,

$$K_\nu = 2\int_{x=0}^{x=\pi/2} dk = \frac{D \cdot l}{8\pi}\int_0^{\pi/2} B_x^2 \cdot \cos x \cdot dx \text{ Dynen}.$$

Nun ist für die obere Läuferhälfte

$$B_{x_{oben}} = B' \cdot \cos p' x + B'' \cdot \cos p'' x,$$

und für die untere Läuferhälfte

$$B_{x_{unten}} = B' \cdot \cos p' x - B'' \cdot \cos p'' x,$$

so daß wir für die einseitig wirkende Kraft erhalten

[1]) R. Rüdenberg nimmt in E. u. M. 1907, Seite 622 ein sinusförmiges Ankerfeld Z/p an, dessen f_w gleich 1 und größer als der des Grundfeldes, $2/\pi$, ist. Hiernach müßte also eine Wicklung mit geradzahligem Z/p, d. i. eine symmetrische Wicklung, geradzahlige Oberfelder erzeugen, was natürlich unmöglich ist. Die von Rüdenberg hieran geknüpften Erwägungen sind daher unzutreffend.

$$K = K_{v_{oben}} - K_{v_{unten}} = \frac{D \cdot l \cdot B' \cdot B''}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos p' x \cdot \cos p'' x \cdot \cos x \cdot dx = C \cdot J.$$

Zur Lösung dieses Integrales J fassen wir zunächst die beiden ersten cos-Glieder zusammen und bekommen

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(p' - p'') x \cdot \cos x \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(p' + p'') x \cdot \cos x \cdot dx,$$

und nach Wiederholung dieses Verfahrens

$$J = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos(p' - p'' - 1) x \cdot dx + \int_0^{\pi/2} \cos(p' - p'' + 1) x \cdot dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\pi/2} \cos(p' + p'' - 1) x \cdot dx + \int_0^{\pi/2} \cos(p + p + 1) x \cdot dx \right\}.$$

Das Intregal J gilt nur in den beschränkten Fällen, wo einseitige Züge überhaupt möglich sind, d. h. sobald die beiden Felder an entgegengesetzten Stellen ungleiche Sättigungen entstehen lassen. Nun stehen sich bei ungerader Polpaarzahl immer Pole entgegengesetzter Polaritäten und bei gerader immer solche gleicher Polaritäten gegenüber, d. h. es können an entgegengesetzten Stellen ungleiche res. Sättigungen nur dann auftreten, wenn bei geradem p' das p'' ungerade, oder wenn bei ungeradem p' das p'' gerade ist. Die Klammerausdrücke in den letzten 4 Integralen sind daher beim Auftreten von einseitigen Zügen stets gerade ganze Zahlen, und wollten wir die Integrale auflösen, so erhielten wir dann immer Null, was jedoch keine eindeutige Lösung darstellt. Wir müssen vielmehr sagen: Eins oder mehrere Integrale verschwinden nicht, und wir bekommen eine einseitige Kraft, wenn das cos-Glied eines der 4 Integrale gleich 1 ist, d. h. wenn $p' - p'' - 1 = 0$, oder $p' - p'' + 1 = 0$, oder $p' + p'' - 1 = 0$, oder $p' + p'' + 1 = 0$ ist. Da die letzten beiden Fälle nicht möglich sind, ergibt sich als Bedingung für das Entstehen einseitiger magnetischer Zugkräfte

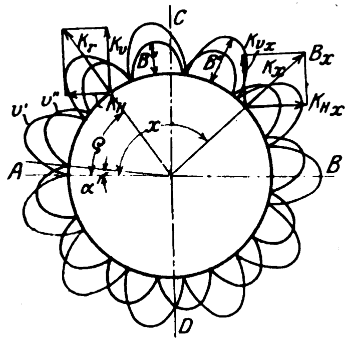


Bild 6.

$$p' = p'' \pm 1 \text{ oder } \nu' \cdot p = \nu'' \cdot p \pm 1. \qquad (12)$$

Die Polpaarzahl der Felder muß also um 1 verschieden sein. Das Integral J ergibt für Bedingung (12) stets $\pi/8$, und es wird die einseitige Kraft

$$K = \frac{D \cdot l \cdot B' \cdot B''}{16\pi} \text{ Dynen}$$

oder

$$K = \frac{D \cdot l \cdot B' \cdot B''}{16 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5} \text{ kg}. \qquad (13)$$

Dieser Wert ist bemerkenswerterweise unabhängig von der Ordnung der magnetisch wirksamen Felder.

Wenn wir alle Felder in Drehfelder zerlegen und dieselben mit verschiedenen Geschwindigkeiten und in verschiedenen Richtungen umlaufen lassen, können wir folgendermaßen vorgehen: In Bild 6 sind die beiden Felder mit dem veränderlichen Winkelabstande α am Umfange eines den Läufer darstellenden Kreises aufgetragen. Wir denken uns das rechtwinklige Achsenkreuz A—B / C — D in starrer Verbindung mit dem einen Oberfeld, beispielsweise mit ν' mit der Amplitude B' und mit diesem

umlaufen. Im Winkelabstande x von der Achse A — B herrsche die Sättigung B_x. Zerlegen wir nun die stets radial wirkenden Zugkraftelemente K_x in Vertikal- und Horizontalkomponenten K_{v_x} und K_{H_x} in bezug auf das Achsenkreuz, so können wir schreiben, da für die obere Läuferhälfte

$$B_{x\,oben} = B' \cdot \sin p'x + B'' \cdot \sin (p''x - p''\alpha)$$

und für die untere

$$B_{x\,unten} = B' \cdot \sin p'x - B'' \cdot \sin (p''x - p''\alpha)$$

ist,

$$K_v = K_{v\,oben} - K_{v\,unten} = \frac{D \cdot l \cdot B' \cdot B''}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin (p'x) \cdot \sin (p''x - p''\alpha) \sin x \cdot dx.$$

Die Lösung des Integrales, welches wie das entsprechende bei Stillstand auch nur für $p' = p'' \pm 1$ gilt, ergibt $\frac{\pi}{4} \sin (p' \pm 1)\alpha = \frac{\pi}{4} \sin p''\alpha$, und wir bekommen für die Vertikalkomponente

$$K_v = \frac{D \cdot l \cdot B' \cdot B''}{16\pi} \sin p''\alpha = K \cdot \sin (p' \pm 1)\alpha = K . \sin p''\alpha.$$

Für die Horizontalkomponente ergibt sich auf ähnliche Weise

$$K_H = K_{H\,links} - K_{H\,rechts} = \frac{D \cdot l \cdot B' \cdot B''}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin p'x \cdot \sin (p''x - p''\alpha) \cdot \cos x \cdot dx$$

oder

$$K_H = K \cdot \cos (p'\alpha \pm 1)\alpha = K \cdot \cos p''\alpha,$$

und es wird die einseitige Zugkraft

$$K_r = \sqrt{K_v^2 + K_H^2} = K = \text{konstant}.$$

Nennen wir ϱ den Winkelabstand der Richtung der Kraft K_r von der Nullachse, so gilt

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{K_v}{K_H} = \operatorname{tg} (p' + 1)\alpha = \operatorname{tg} p''\alpha,$$

d. h., es ist

$$\varrho = (p' \pm 1)\alpha = p''\alpha.$$

Wir kommen zu folgendem Ergebnis:

Bei gegenseitiger Verschiebung von zwei räumlich sinusförmigen Feldern, deren Polpaarzahlen um 1 verschieden sind, entsteht eine einseitige, radial wirkende, magnetische Zugkraft, welche eine gleichbleibende Größe hat und mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit im Drehsinne des Feldes mit höherer Polpaarzahl umläuft. Diese Winkelgeschwindigkeit ist gleich der relativen Winkelgeschwindigkeit dieser beiden Felder gegeneinander, multipliziert mit der Polpaarzahl des Feldes von höherer Ordnung.

Die gewonnenen Ergebnisse sollen nunmehr an mehreren Beispielen aus der Praxis geprüft werden, wobei wir es zunächst als Tatsache hinnehmen, daß die umlaufende, einseitig wirkende Zugkraft die Ursache für die starke Geräuschbildung ist.

D. Praktische Beispiele.

I. Käfigwicklungen für asynchrone Maschinen.

Stiel[1]) hat bei der Untersuchung der Drehmomentverhältnisse von Käfigen mit verschiedenen Stabzahlen lehrreiche Beobachtungen gemacht, welche zur Illu-

[1]) Forschungsarbeiten (V. d. J.) Heft 212, 1919.

stration der hier behandelten Vorgänge herangezogen und z. T. ausgewertet werden sollen. Untersucht wurde ein Dreiphasenmotor Type MD 21—1500 der SSW, von 1 PS, mit 4 Polen, 1500 Umdr. synchr., 120 Volt bei Dreieckschaltung, 24 Ständernuten mit 2 mm Schlitz. In den Ständer wurden Käfige mit den Stabzahlen 18, 19, 20, 22, 25, 27, 29, 38, 41 und 42 gesetzt.

Wir verfahren nun in der Weise, daß wir das Feld bzw. die MMK der Ständer- und Läuferwicklung zerlegen[1]) und nachprüfen, ob zusammen irgendwo zwei Harmonische auftreten, die der Bedingung für das Entstehen von einseitigen magnetischen Zügen entsprechen.

Die Käfige mit gerader Stabzahl, 18, 20, 22, 28, 38 und 42, müssen alle geräuschlos arbeiten, weil die nach Gleichung (4), (6), (7) ermittelten Polpaarzahlen ihrer Oberfelder stets **gerade** sind, und diese weder miteinander, noch mit Feldern des symmetrischen Ständers eine einseitige Kraft bilden können, was mit den Beobachtungen übereinstimmt. Wir befassen uns daher mit den Käfigen 19, 25, 27, 29 und 41, bei denen geräuschbildende Oberfelder auftreten.

1. **Läufer** 19. Die Ständerwicklung erzeugt folgende Oberfelder des Grundstromes

$$\nu_1 = (+)1;\ (-)5;\ (+)7;\ (-)11;\ (+)13;\ (-)17;\ (+)19;\ (-)23;\ (+)25 \ldots$$

mit $p' = 2;\ \underline{10};\ 14;\ \underline{22};\ 26;\ \underline{34};\ 38;\ \underline{46};\ 50 \ldots$

Die Läuferoberfelder des Ständergrundfeldes sind

$$\nu_{2_1} = (\pm)\left(\frac{19}{2}x \pm 1\right) = (+)1;\ \underbrace{(-)\frac{17}{2};\ (+)\frac{21}{2}}_{\text{Zahngrundfeld}};\ \underbrace{(-)18;\ (+)20}_{\text{2. Zahnharm.}};\ \underbrace{(-)\frac{55}{2};\ (+)\frac{59}{2}}_{\text{3. Zahnharm.}};\ \underbrace{(-)37;\ (+)39}_{\text{4. Zahnharm.}} \ldots$$

mit $p'' = 2;\ \underset{\bullet}{17};\ \underset{\bullet}{\underline{21}};\ 36;\ \underset{\bullet}{40};\ 55;\ 59;\ 74;\ \underset{\bullet}{78} \ldots$

die des Standoberfeldes $(-)5$:

$$\nu_{2_5} = (\mp)\left(\frac{19}{2}x \pm 5\right) = (-)5;\ (+)\frac{9}{2};\ (-)\frac{29}{2};\ (+)14;\ (-)24;\ (+)\frac{47}{2};\ (-)\frac{57}{2};\ (+)33;\ (-)43;\ (+)\frac{85}{2};\ (-)\frac{105}{2} \ldots$$

mit $p'' = \underset{\bullet}{10};\ \underset{\bullet}{\underline{9}};\ \underset{\bullet}{29};\ \underset{\bullet}{28};\ \underset{\bullet}{48};\ \underset{\bullet}{\underline{47}};\ 57;\ 66;\ \underset{\bullet}{86};\ \underset{\bullet}{85};\ 105 \ldots$

die des Ständeroberfeldes $(+)7$:

$$\nu_{2_7} = (\pm)\left(\frac{19}{2}x \pm 7\right) = (+)7;\ (-)\frac{5}{2};\ (+)\frac{33}{2};\ (-)12;\ (+)26 \ldots$$

mit $p'' = 14;\ 5;\ \underline{33};\ 24;\ 52 \ldots$

die des Ständeroberfeldes $(-)11$:

$$\nu_{2_{11}} = (-)11;\ (+)\frac{3}{2};\ (-)\frac{41}{2};\ (+)8;\ (-)30 \ldots$$

mit $p'' = \underset{\bullet}{22};\ 3;\ \underset{\bullet}{41};\ \underset{\bullet}{16};\ 60 \ldots$

und die des Ständeroberfeldes $(+)13$:

$$\nu_{2_{13}} = (+)13;\ (-)\frac{7}{2};\ (+)\frac{45}{2};\ (-)6;\ (+)32 \ldots$$

mit $p'' = 26;\ 7;\ \underline{45};\ 12;\ 64 \ldots$ usw.

---

[1]) Die von **Stiel** vorgenommene Zerlegung ist falsch. Auf andere Unrichtigkeiten in dieser Arbeit, die insbesondere die theoretischen Betrachtungen über das Zahnfeld betreffen, kann hier nicht eingegangen werden. Sie ergeben sich ohne weiteres aus der vorliegenden und obengenannten Arbeit des Verfassers.

Wir sehen, daß zunächst eine große Anzahl von im Läufer erzeugten Oberfeldern zusammen, und dann noch mehrere Ständer- und Läuferoberfelder zusammen um 1 verschiedene Polpaarzahlen aufweisen und Geräusche verursachen müssen. Erstere sind durch einen Punkt, letztere durch einen Strich unter der Polpaarzahl kenntlich gemacht.

In die (stark ausgezogene) Kurve D = funkt (n_0), Bild 7, hat Stiel die punktierte Spitze a als Gegenstück zur negativen Spitze eingetragen, in der Annahme, daß die Einsattlung durch ein generatorisch wirkendes Drehmoment eines Oberfeldes hervorgerufen wird. Die Überlegung, daß es ein Oberfeld mit einem synchronen Punkte bei 520 Umdrehungen nicht gibt, und im übrigen die Spitze (a) auf der linken Seite des Sattels liegen müßte, sagt uns, daß diese Erscheinung mit der starken Geräuschbildung zusammenhängen muß. Von den magnetisch wirksamen Drehfeldern sind am stärksten die Oberfelder (—) 11 des Ständers und $(+)\frac{21}{2}$ des

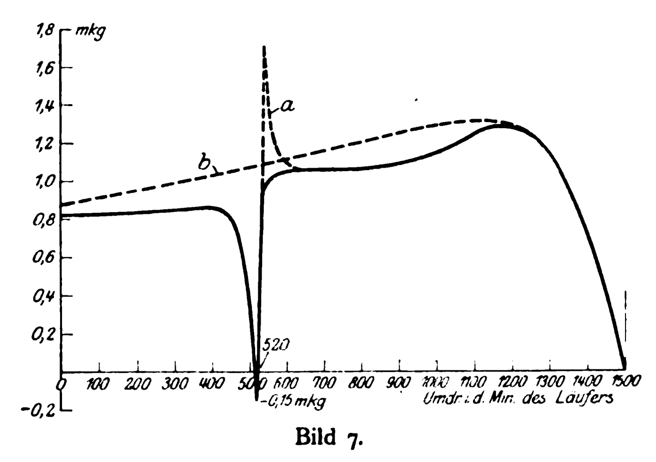


Bild 7.

Läufers, die wir angenähert berechnen wollen. Die MMK von $\nu_1 = (-)\,11$ ist bei 256 Windungen je Phase und 6 Amp. Ständerstrom

$$F^{I}_{11} = \frac{F^{I}_{1}}{11} = \frac{0{,}45 \cdot 3 \cdot 256 \cdot 0{,}96 \cdot 6}{2 \cdot 11} = \frac{1000}{11} \cong 90,$$

und bei einem um 30% erhöhten Luftspaltwege für dieses Oberfeld das Wicklungsoberfeld

$$B_{w11} \cong \frac{F^{I}_{11}}{0{,}8 \cdot 1{,}3 \cdot \delta} \cong \frac{90}{0{,}8 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}03} \cong 2900.$$

Es ist $B_1 \cong 5400$ und $B_{z\,max} \cong 10000$, wofür wir entsprechend den früheren Erfahrungen für die Zahngrunddrehfelder des Ständers annehmen: $B_{z_{11}} = B_{z_{13}} \cong 700$. Bei cos $\varphi_1 = 0{,}85$ im Ständer sind die beiden Felder $B_{w_{11}}$ und $B_{z_{11}}$ um etwa 124° el. phasenverschoben, und das result. Feld wird $B_{11} \cong 3300$.

Die MMK des Läuferoberfeldes $(+)\frac{21}{2}$ beträgt

$$F^{II}_{\frac{21}{2}} = \frac{F^{II}_{1}}{\frac{21}{2}} \cong \frac{0{,}95 \cdot F^{I}_{1}}{\frac{21}{2}} \cong \frac{950}{\frac{21}{2}} \cong 90,$$

und bei einem halben Kraftlinienweg von 1,25 δ das Feld

$$B_{w\frac{21}{2}} \cong \frac{90}{0{,}8 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}03} \cong 3000.$$

Für die Läuferzähne nehmen wir an $B_{z\frac{17}{2}} = B_{z\frac{21}{2}} \cong 900$, und bekommen

$$B_{\frac{21}{2}} \cong (B_{w\frac{21}{2}} + B_{z\frac{21}{2}}) \cdot 0{,}8 \cong (3000 + 900) \cdot 0{,}8 \cong 3100.$$

Jetzt wird

$$K = \frac{12 \cdot 5,45 \cdot 3300 \cdot 3100}{16 \cdot 9,81 \cdot 10^5} \cong 43 \text{ kg (!)}$$

Die Kraft K, welche hier mehr als das 7-fache Läufergewicht (5,8 kg) ausmacht, und das Läufergewicht setzen sich zu einer umlaufenden result. Kraft (vgl. Seite 89) zusammen, die etwa zwischen den Werten 37 und 49 kg schwankt.

Das Feld $\nu_1 = (-)\,11$ dreht sich in bezug auf den Ständer mit $\frac{-n_1}{\nu_1} = \frac{-1500}{11} = -136,364$ Umdr. i. d. Min., und das Feld $\nu_2 = (+)\,^{21}/_2$ in bezug auf $\nu_1 = (-)\,11$ bei der in den Versuchen als kritisch bezeichneten Läuferdrehzahl von 520 Umdr. i. d. Min. mit

$$+\frac{n_1}{\nu_1} + \frac{n_1 - n_0}{n_0} + n_0 = \frac{1500}{11} + \frac{1500 - 520}{520} + 520 = 749,697 \text{ Umdr. i. d. Min.}$$

Daher dreht sich K bezogen auf $\nu_2 = (+)\,^{21}/_2$ mit $-22 \cdot 749,697 = -16493,333$ Umdrehungen und bezogen auf den Ständer mit $-16493,333 + 613,333 = -15880$ Umdr. i. d. Min. $= -264,67$ Umdr. i. d. Sek. Dies ist zugleich die Anzahl der Pulsationen der Kraft, die auf den ruhend gedachten Läufer wirkt. Es liegt nun die Vermutung nahe, daß hier Resonanz zwischen der pulsierenden einseitigen Kraft und der Eigenschwingungszahl der durch das Läufergewicht belasteten Welle vorhanden ist. Fassen wir die Welle als einen in den Lagermitten lose aufliegenden Stab auf, der in der Mitte durch das Läufergewicht und das halbe Wellengewicht belastet ist, so haben wir

$$P = \frac{48 \cdot E \cdot J \cdot x}{l^3} = c \cdot x \text{ und } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}},$$

worin bedeuten: Pkg = Belastung, E = 2 200000 kg/cm² = Elastizitätsmodul für Stahl, $J = \frac{1,95^4}{64}$[1] $= 0,71$ cm⁴ = Trägheitsmoment in Richtung der Schwingung, $l = 16,7$ cm[1] = Entfernung der Auflagepunkte, x mm = Durchbiegung in der Mitte, c = Federkonstante, Tsek = Eigenschwingungszeit und mkg = Masse. Hier wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{5,8}{9,81}}{\frac{48 \cdot 2\,200000 \cdot 0,71}{16,7^3}\,100}} = 0,00381 \text{ Sek.,}$$

und die Eigenschwingungszahl

$$\omega = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,00381} = 262,5 \text{ i. d. Sek.}$$

Diese Zahl stimmt mit der oben errechneten Umlaufzahl der einseitigen magnetischen Zugkraft überein; wir haben hier also tatsächlich mechanische Resonanz, und es wird jetzt auch leicht das Verhalten dieses Käfigs verständlich.

Die in Bild 7 sichtbare starke Einsattlung ist daher kein negatives Drehmoment eines Oberfeldes, sondern eine Art negativer Resonanzkurve, und die Spitze a muß fortgelassen werden. Die Kurve des Drehmomentes würde demnach, wenn die momentverzehrende Wirkung der Läuferschwingung nicht vorhanden wäre, etwa den gestrichelten Verlauf b haben. Die jetzt sichtbare zweite, weniger tiefe, breite Einsattlung bei etwa 850 Umdrehungen ist ein zweiter Resonanzpunkt und wird in den folgenden Beispielen deutlicher zum Ausdruck kommen. Bei 525 Umdrehungen ist ein stabiler Leerlauf beobachtet worden, weil der abfallende Teil der Momentenkurve stabil ist.

[1]) Der Motorzeichnung entnommene Werte.

Da $B_{w_{\frac{11}{2}}}$ beim Synchronismus mit der Grundwelle verschwindet, wird es bei normalem Leerlauf klein, ebenso nimmt $B_{w_{11}}$ mit abnehmendem Strome ab. Wir sind außerdem von der Resonanzstelle weit entfernt, und der Motor wird, wie auch beobachtet wurde, ruhiger arbeiten. Bei Stillstand beträgt die Umlaufzahl der Kraft 100 in der Minute, d. h. dieser Motor muß schon bei Stillstand sehr laut brummen.

Gegenüber den beiden soeben behandelten Oberfeldern treten die anderen noch wirksamen zurück, weil ihre MMKen und Felder klein sind.

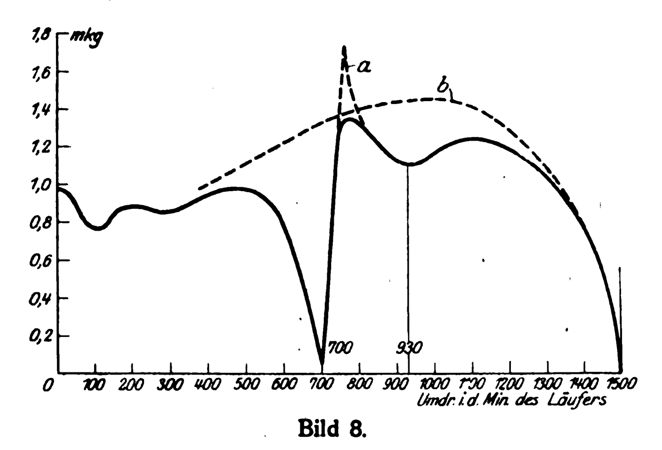


Bild 8.

2. Läufer 25. Wir sehen die Drehmomentenkurve dieses Käfigs in Bild 8. Die Einsattlungen bei niedrigen Drehzahlen rühren von synchronen Punkten gewisser Oberfelder her. Bei den Einsattlungen bei 700 und 930 Umdrehungen ist wieder Hauptresonanz bzw. Resonanz mit der Oberschwingung $^4/_3$ vorhanden. Hier

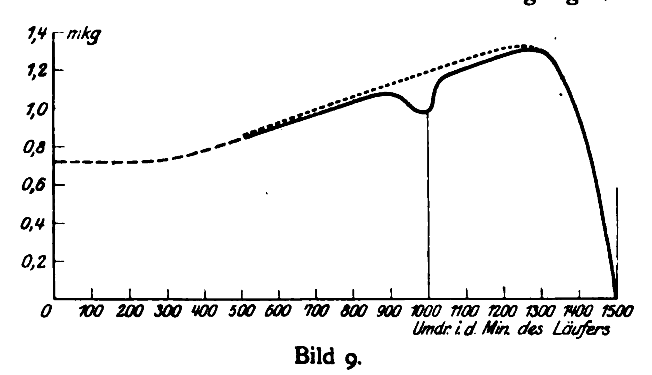


Bild 9.

werden alle 4 Zahngrundfelder des Ständers und Läufers magnetisch wirksam, ferner u. a. auch das Grundfeld mit den Käfigoberfeldern $^3/_2$ und $^1/_2$ der Ständeroberfelder 11 und 13. Hier ist wieder die Einzeichnung einer Spitze a fehlerhaft. Bezüglich Kurve b siehe Beispiel 1.

3. Läufer 27. Hier wurde die Drehmomentenkurve Bild 9 erhalten. Der Hauptresonanzpunkt liegt bei 750 Umdrehungen, ist jedoch wegen der schwierig gewesenen Messung nicht gezeichnet, die kleinere Einsattlung bei rund 1000 Umdrehungen entspricht wieder einer Oberschwingung $^4/_3$. Da wieder 2 Zahngrundfelder wirksam sind, müssen die Geräusche sehr laut sein.

4. Läufer 29. Auch hier werden 2 Zahngrundfelder magnetisch wirksam, für welche sich ein Resonanzpunkt bei 760 Umdrehungen ergibt. Hierbei muß die Lautstärke am größten sein, was mit den Beobachtungen in Einklang steht.

5. Läufer 41. Da hier die geräuschbildenden Oberfelder klein sind, können



deren Züge nicht groß werden und keine nennenswerten Geräusche verursachen, was auch der Fall war.

6. Dreiphasenmotor wie beschrieben Seite 75 mit 4 Polen, 1500 Umdrehungen synchron, **48** Ständerzähnen, **53** Läuferzähnen. Hier werden die beiden Oberfelder $\nu_1 = 25$ und $\nu_2 = {}^{51}/_2$ wirksam, welche zugleich Zahngrundfelder sind. Wir setzen $B_{z25} \cong 1000$,

$$B_{w25} \cong \frac{B_1}{25} \frac{J_1}{J_0} = \frac{5050}{25} \cdot \frac{20}{4} \cong 1000 \quad (J_0 = \text{Ständerstrom bei Synchronismus}),$$

und kommen dann bei $\cos \varphi_1 = 0{,}867$ auf eine Phasenverschiebung der beiden Felderarten von etwa 246°. Damit ergibt sich $B_{23} \cong 550$ und mit dem früher ermittelten $B^{51/2} = 1800$ die Kraft $K \cong 12$ kg. Dies ist nicht ganz die Hälfte des Läufergewichtes von 26 kg. Die Geräusche dieses Motors waren mäßig, einmal, weil K kleiner als das Läufergewicht ist, und wahrscheinlich auch, weil die stark ausgeführte Welle und das kräftige Statorgehäuse die Schwingungen abdämpfen. Dieser Motor ist daher bei nicht zu hohen Anforderungen hinsichtlich der Geräuschbildung für die Praxis brauchbar.

7. Polumschaltbarer Dreiphasen-Asynchronmotor mit Käfigläufer mit schrägen Nuten (Oerlikon)[1] 500 Volt; 12, 8, 6, 4 Pole; 50 Perioden; 9, 12, 18, 25 PS; **72** Ständerzähne, **100** Läuferzähne. Obwohl im Ständer (mit 2 Gleichstromwicklungen) nur die Oberfelder 2, 4, 5, 7, 8, 10 usw. entstehen können und Z_2 gerade ist, machte sich beim Anlauf in der ersten Stufe und beim Übergang von einer Stufe zur anderen ein unangenehmes, lautes Geräusch bemerkbar. Dies liegt daran, daß die Kurzschlußringe unisoliert auf 6 Rippen der Preßplatten sitzen. Dies stellt schematisch einem zusätzlichen parallel geschalteten Käfig mit **fünf** Stäben dar, welcher durch die Ständerfelder und die Felder des Hauptkäfigs eine große Anzahl von magnetisch wirksamen Oberfeldern erzeugt. Dieser Käfiganker kann daher trotz der geraden Zähnezahl und der Abschrägung der Läuferzähne nicht geräuschlos arbeiten; der Motor ist also durch ein scheinbar nebensächliches, falsch ausgeführtes Konstruktionsglied zu einer unvollkommenen Maschine geworden.

8. 3-Stab-Käfigläufer im 4-poligen Ständer[1]). Ein durch Abänderung des Phasenläufers eines 4-poligen Dreiphasenmotors erhaltener 3-Stab-Käfig lief von selbst unter starkem Brummen im Drehsinne des Grundfeldes an. Dabei zeigten sich heftige Erzitterungen der ganzen Maschine, die ihren Höhepunkt bei 1000 Umdrehungen erreichten. Die Käfigfelder durch das Grundfeld haben die Polpaarzahlen 1, 2, 4, 5, 7, 8 usw., d. h. hier werden alle Felder des Läufers mit anderen des Läufers und Ständers magnetisch wirksam und müssen sehr laute Geräusche verursachen (siehe ferner Seite 89).

Das um 1000 Umdrehungen herum sich zeigende starke Pendeln des Läufers ist auf das Verhältnis der Umlaufzahl der Kraft zu der des Grundfeldes zurückzuführen, und nicht etwa auf ein negatives Moment des Läuferoberfeldes $^1/_2$, welches zufällig bei dieser Drehzahl gegenüber dem Ständer stillsteht; denn dieses Oberfeld kann im symmetrischen Ständer nichts induzieren. Die kritische Drehzahl für diesen Läufer liegt höher als der Umlaufzahl der Kraft bei 1000 Umdrehungen des Läufers entsprechen würde; daher kann das Pendeln auch nicht von Resonanzerscheinungen herrühren.

II. Spulenwicklungen für ein- und mehrphasigen Wechselstrom.

9. Dreiphasenwicklung mit Fehlstäben[1]). Von der dreiphasigen Läuferwicklung großer Asynchronmotoren waren, um die Verbindungen der Phasen auf die beiden Stirnflächen verteilen zu können, die in Bild 10 angedeuteten 6 Stäbe fortgelassen worden und diese Nuten unbewickelt geblieben (Sonderfall der Wick-

[1]) Siehe a. a. O.



lung Beispiel 8). Die Größenverhältnisse eines Motors waren: 875 kW, 4 Pole, 1500 Umdrehungen, im Ständer 6-Lochwicklung, im Läufer 5-Lochwicklung mit 6 Fehlstäben, 800 mm Ständerbohrung, Eisenlänge einschließlich Isolation und sechs Luftschlitzen von je 10 mm Breite gleich 560 mm, 72 Nuten im Ständer, 60 Nuten im Läufer.

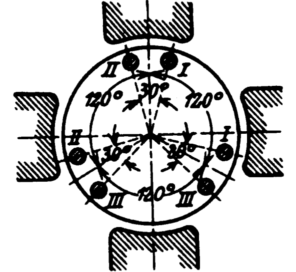


Bild 10.

Dieser Läufer mit Fehlstäben erzeugt neben den Oberfeldern ungerader Ordnung noch solche gebrochener Ordnung (aber keine gerader Ordnung), von denen das Oberfeld $^1/_2$ mit 2 Polen für die Geräuschbildung am wichtigsten ist. Aus den Abmessungen der Maschine errechnen wir $B_1 \cong 5300$. Wenn wir zur Vereinfachung annehmen, daß sich die AW des Grundfeldes und des Oberfeldes $^1/_2$ einfach zusammensetzen, so bekommen wir etwa $B_{\frac{1}{2}} \cong 1900$. Mit diesen Werten ergibt sich $K \cong 2700$ kg (!). Das Läufergewicht beträgt etwa 2100 kg. Selbst bei geringerer Größe würde die Kraft ausreichen, um die Maschine in Kürze in Trümmer zu legen, und es wird verständlich, daß bei einem Motor noch nicht bei Vollast ein Lager brach, bei einem anderen das Fundament zerstört wurde. Nach Einsetzen der Fehlstäbe liefen die Motoren einwandfrei. (Vgl. ferner Seite 89.)

E. Die akustischen Wirkungen der Oberfelder.

a) Die Wirkung eines Oberfeldes allein[1]. Durch die mit den relativen Periodenzahlen aller Oberfelder erfolgenden Ummagnetisierungen des lamellierten Eisenkörpers, insbesondere am Luftspalt, wo die Oberfelder am größten sind, und wo die dünnen und wenig festen Zahnecken und -Köpfe der magnetischen Anziehungskraft ausgesetzt sind, werden letztere in Schwingungen versetzt und dadurch Töne erzeugt. Zugleich unterliegen die in den Nuten liegenden stromführenden Leiter der elektrodynamischen Einwirkung der einzelnen Oberfelder und geraten ebenfalls in Schwingungen, welche den Ton verstärken.

Da, wie wir sahen, insbesondere beim Käfiganker beim Anlauf einzelne Oberfelder stark sind, kann bei ihnen die Lautstärke ziemlich bedeutend sein. Bei den Synchron- und Gleichstrommaschinen werden die Oberfelder durch den großen Luftspalt und durch den massiven Pol wirksam abgedämpft; denn das Eigenfeld schwingt bei letzteren etwa in der Richtung der Polachsen. Immerhin kann die Tonwirkung bei ganz offenen Nuten und lamellierten Polschuhen beträchtlich sein.

Oberfeld des Ständers	Tonhöhe im Läufer	Oberfeld des Läufers	Tonhöhe im Ständer
(—) 5	300	(—) $^{17}/_2$	425
(+) 7	300	(+) $^{21}/_2$	525
(—) 11	600	(—) 18	900
(+) 13	600	(+) 20	1 000
(—) 17	900	(+) $^9/_2$	525
(+) 19	900	(—) $^5/_2$	425
(—) 23	1 200	(+) $^3/_2$	675
(+) 25	1 200	(—) $^7/_2$	575

Durch Übereinanderlagerung der Töne aller Oberfelder, welche mit wachsender Maschinendrehzahl an Höhe zunehmen, entstehen außerdem noch Differenz- und Summationstöne, welche ein Singen erzeugen, wie wir es häufig bei Käfigläufern und Kommutatormaschinen vernehmen können. In der obigen Tabelle sind für

[1] Siehe a. a. O.

den Käfigläufer 19 des Beispiels 1 die durch die wichtigsten Oberfelder des Ständers und Läufers erzeugten Töne bei Synchronismus (wenn alle Oberfelder hierbei vorhanden wären), angegeben, wobei die stärksten Felder durch starke Zahlen kenntlich gemacht sind.

b) Die Wirkung zweier Oberfelder, welche zusammen eine einseitige magnetische Zugkraft ergeben. Diese Wirkung kann im allgemeinen — wenigstens bei raschlaufenden Maschinen — erheblich stärker als die unter a) genannte sein. Zwei solche Oberfelder ergeben, wenn wir zur Vereinfachung ihre Amplituden als gleich groß annehmen, eine resultierende Welle, deren Ordnung bezogen auf einen Umgang der Maschine gleich der mittleren Ordnung der beiden Felder ist (Welle a), und deren Höchstwerte auf einer Sinuslinie von der Teilung gleich dem Umfange der Maschine liegen (Welle b), wie Bild 11 für $p = 4$, $p' = 9$ ($\nu' = 9/2$) und $p'' = 10$ ($\nu'' = 5$) für einen Augenblick zeigt; denn es ist die Sättigung B_x im Abstande x von der Achse A — B für Stillstand der Felder

$$B_x = B_\nu \cdot \cos p'x + B_\nu \cdot \cos p''x = 2 \cdot B_\nu \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{p' + p''}{2} x.$$

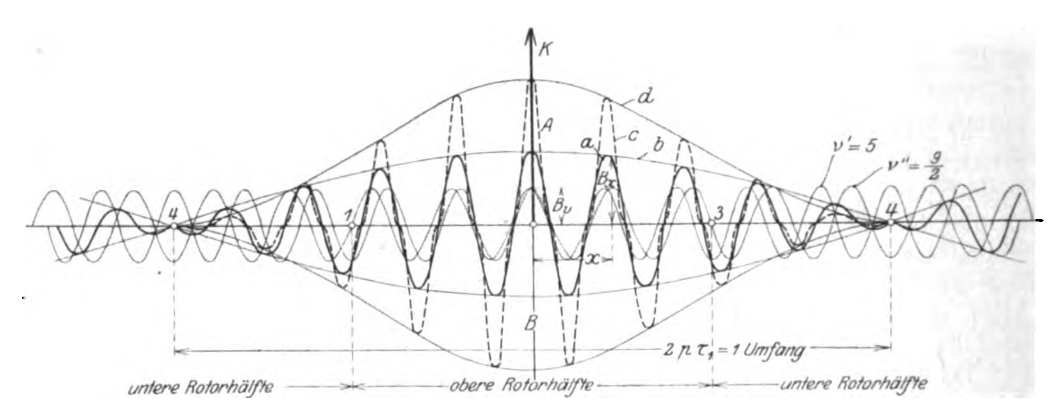


Bild 11.

Welle b schreitet mit der Winkelgeschwindigkeit und im Drehsinne von K fort. Für die magnetischen Züge kommt jeweils das Quadrat der Sättigung in Betracht; dies wäre also eine Welle c, deren Höchstwerte auf einer Hüllkurve d gelegen sind[1]), und die das Zustandekommen der einseitig wirkenden Kraft zeigt. Die Höchstwerte werden unter Umständen im höheren Teile noch dadurch verstärkt, daß der Läufer durch die Kraft K nach einer Seite hingezogen und hier eine Verkleinerung des Luftspaltes bewirkt wird[2]).

Die Tonwirkung kommt nun einmal durch die Einwirkung der resultierenden Welle insbesondere im Scheitel der Hüllkurve auf die lamellierten Eisenkörper und stromführenden Leiter zustande — dies ist also eine starke Wirkung der unter Ea genannten Art, welche bei etwaiger Durchbiegung der Welle und Verkleinerung des Luftspaltes verstärkt wird — und ferner durch den mit der Umlaufzahl von K schwingenden Ständer und Läufer. Für letzteren kommt außerdem noch die relative Umlaufzahl von K in Betracht. Die mit ω_K in bezug auf den Raum umlaufende Kraft K und das senkrecht nach unten wirkende Läufergewicht G setzen sich zu einer resultierenden Kraft R zusammen, welche für $K \geqq G$ eine umlaufende

[1]) Die Ordinaten der Welle c, d. h. die magnetischen Züge, sind natürlich in Wirklichkeit auf der einen Rotorhälfte sämtlich nur positiv, auf der anderen negativ.

[2]) Vgl. E. Rosenberg, E. T. Z. 1918, Seite 1.

Kraft ist, die zwischen den Werten $K - G$ und $K + G$ schwankt, vgl. Bild 12. Ist aber $K < G$, so ergibt sich, wie aus Bild 13 hervorgeht, eine zwischen den Punkten $a - b$, d. h. in dem durch Bogen ab abgegrenzten Teile des Luftspaltes hin- und herpendelnde Kraft R, welche in dem Bild in 2 Stellungen gezeichnet ist. Nach einem Umlauf von K ist R zweimal zwischen $a - b$ hin- und hergependelt. Dieser Bogen wird um so größer, je größer K im Vergleich zu R wird und ist für $K = G$ gleich dem vollen Umfange. Mit wachsendem Bogen nimmt auch die Lautstärke zu. Sie muß im übrigen mit wachsendem Ausschlage des Läufers zunehmen, und ist daher am stärksten bei der kritischen Läuferdrehzahl, wo die Schwingungszahl der Kraft gleich der Eigenschwingungszahl des ruhenden Läufers ist. Daneben können, wie wir sahen, Resonanzerscheinungen mit höheren Eigenschwingungszahlen auftreten. Für den Ständer gibt es ebenfalls eine Eigenschwingungszahl, und die Lautstärke der Geräusche würde beim Zusammenfallen der Schwingungszahl der Kraft mit derselben anschwellen. Wir sahen an den Drehmomentkurven Bilder 7,

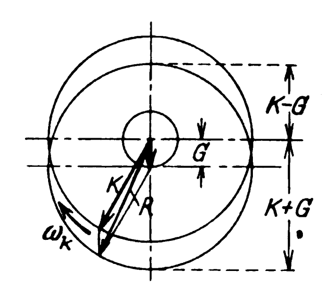


Bild 12.

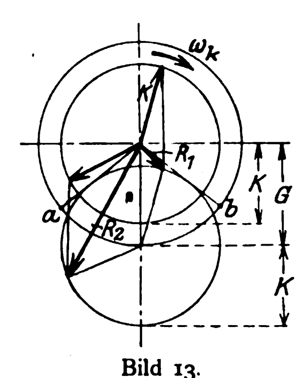


Bild 13.

8 und 9, daß in der Nähe der Resonanzstelle das Motordrehmoment durch ein negatives Drehmoment ganz oder z. T. aufgezehrt wird, was von der Motordrehzahl abhängt.

Wenn die Umlaufzahl der Kraft hoch ist, wie wir es bei den Käfigläufern gesehen haben, so bekommen wir, wie die Erfahrung lehrt, ein Heulen oder Brüllen zu hören, dessen Tonhöhe für gewisse Oberfelderpaare bei Stillstand der Maschine gleich Null und für andere niedrig (bei 50 Netzperioden gleich 100 i. d. Sek.) ist und bis zum Synchronismus ansteigt. Dabei verändert sich die Lautstärke während der Anlaufperiode, weil die Amplitude der Oberfelder vom Betriebszustande der Maschine abhängt.

Ist die Ordnung der zusammenwirkenden Felder sehr niedrig und die Drehzahl von K klein, so ist der erzeugte Ton tief, und wir hören ein starkes Brummen. Wir wollen z. B. das häufig bei Wechselstrommaschinen mit unsymmetrischen 4-poligen Wicklungen auftretende Oberfeld $\frac{1}{2}$ betrachten, wenn es vom Läufer erzeugt wird. Die Umlaufzahl von K bezogen auf den Ständer und den Raum ist (n_1 = synchrone Drehzahl)

$$n_K^I = 2\left[-\left(-\frac{n_1 - n_0}{\frac{1}{2}} + n_0\right) + n_1\right] + \left(-\frac{n_1 - n_0}{\frac{1}{2}} + n_0\right) = 4\,n_1 - 3\,n_0 \text{ i. d. M.}$$

Dies ergibt

bei $n_0 =$	0	$n_K^I =$ 100 Umdr. i. d. Sek.
	500	75 „ „ „ „
	1000	50 „ „ „ „
	1500	25 „ „ „ „

Mit dieser Schwingungszahl n_K^I schwingen die Vertikalkomponente von R, der ruhend gedachte Läufer und der Ständer. Da die Drehzahl des Ständergrundfeldes

$^{1500}/_{60} = 25$ Umdr. i. d. Sek. bezogen auf den Ständer und Raum beträgt, so schwingt bei den genannten Läuferdrehzahlen die Vertikalkomponente von R derart, daß sie immer eine ganze Schwingung vollführt hat, wenn eine oder mehrere ganze Halbwellen des Grundfeldes vorbeigeeilt sind. Bei diesen Läuferdrehzahlen treten daher Höchstwerte der Ausschläge und Schwingungen von Ständer und Läufer ein, und die Geräusche, die in einem Brummen von der Tonhöhe n_K^I bestehen, müssen am stärksten sein. In bezug auf den sich drehenden Läufer ist die Drehzahl von K

$$\frac{n_K^I - n_0}{60} = \frac{4 n_1 - 4 n_0}{60} = \frac{4 \cdot n_s}{60} \text{ i. d. Sek.}$$

Dies ist beim 4-poligen Induktionsmotor aber gleich der doppelten Schlupffrequenz des Grundfeldes. Diese Schwingungen lagern sich über die zuerst genannten. Beide Arten sind sehr deutlich bei den Beispielen 8 und 9 beobachtet worden. Gerade die langsamen Schwingungen können, wie das Beispiel 9 zeigte, verhängnisvoll werden.

Ist aber im Gegensatz zur bisherigen Annahme trotz sorgfältigster Lagerung und Auswuchtung des Läufers von vornherein eine Exzentrizität vorhanden, so bekommen wir zusätzliche Schwingungen der Kraft, weil das Grundfeld und insbesondere die Oberfelder ganz niedriger Ordnung in ihren einzelnen Halbwellen beim Vorbeieilen an der Stelle des geringsten Luftspaltes verstärkt (zugespitzt) und an der Stelle des größten abgeschwächt (abgeflacht) werden können.

Da die Amplituden des resultierenden Feldes aus zwei geräuschbildenden Feldern über den ganzen Umfang der Maschine groß sind, so sind mit lauten Geräuschen stets auch hohe zusätzliche Eisenverluste verbunden. Die Erfahrung bestätigt dies.

F. Schlußfolgerungen für die Praxis.

Wir müssen bestrebt sein, diejenigen Felder, welche zur Erzeugung von Tönen Anlaß geben können, nach Möglichkeit zu verkleinern oder ihr Entstehen überhaupt zu verhüten. Wir sahen im Abschnitt Ea, daß alle Oberfelder Töne erzeugen. Diese Art von Tönen läßt sich, da bei jeder Wicklung Oberfelder entstehen, nicht beseitigen, sondern nur in ihrer Stärke mildern. Es ist also unsere Aufgabe, dafür zu sorgen, daß die stärksten Oberfelder, das sind in der Regel die Zahngrundfelder und gleichpoligen Wicklungsoberfelder des Grundstromes, in ihrer Größe relativ zum anderen Teile der Maschine möglichst klein werden. Die Verkleinerung ist jedoch im allgemeinen nur bei den Zahnfeldern möglich, und es stehen uns dafür folgende Mittel zur Verfügung[1]):

1. starke Verringerung oder starke Erhöhung der maximalen Zahnsättigung,
2. Verkleinerung der Schlitzbreite, durch Wahl von geschlossenen Nuten oder von Eisenkeilen,
3. möglichst starke Zahnecken bei geschlossenen oder halbgeschlossenen Nuten,
4. flacher Übergang des Zahnkopfes in den Steg bei geschlossenen oder halbgeschlossenen Nuten unter Berücksichtigung des Punktes 1,
5. Wahl eines günstigen Verhältnisses zwischen mittlerer Zahnbreite und mittlerer Nutbreite,
6. Wahl eines günstigen Verhältnisses zwischen mittlerer Nutbreite und Nuthöhe,
7. Vergrößerung des Luftspaltes,
8. Abschrägung der Ständerzähne oder Läuferzähne bzw. der Polschuhe.

Der lamellierte Eisenkörper muß einen möglichst starren Zusammenhang haben (starke Endbleche und Preßplatten, hoher Preßdruck), und die Leiter müssen in den Nuten möglichst starr gelagert sein.

[1]) Siehe a. a. O.

Die im Abschnitt Eb behandelten Geräusche lassen sich immer beseitigen. Wir wollen dies bei den einzelnen Maschinen- bezw. Wicklungsarten untersuchen.

I. Käfigwicklungen.

Wir stellen uns die Frage: Bei welchem Zähnezahlverhältnis im Ständer und Läufer müssen Geräusche entstehen? Setzen wir, was ja meistens der Fall ist, eine symmetrische Ständerwicklung voraus, so ist die Polpaarzahl eines beliebigen Ständerfeldes ν_1' gleich $p' = p \cdot \nu_1'$, und die der durch ein beliebiges Ständerfeld ν_1'' im Läufer erzeugten Felder ν_2 gleich $p'' = p \cdot \nu_2 = Z_2 \cdot x \pm \nu_1'' \cdot p$. Es entsteht also eine einseitige Kraft, wenn $p \cdot \nu_1' = Z_2 \cdot x \pm \nu_1'' \cdot p \pm 1$ ist. Hieraus bekommen wir die vier allgemeinen Bedingungen für das Entstehen von Geräuschen:

$$1)\quad Z_2 = \frac{p(\nu_1' - \nu_1'') - 1}{x}, \tag{13}$$

$$2)\quad Z_2 = \frac{p(\nu_1' + \nu_1'') - 1}{x}, \tag{14}$$

$$3)\quad Z_2 = \frac{p(\nu_1' - \nu_1'') + 1}{x}, \tag{15}$$

$$4)\quad Z_2 = \frac{p(\nu_1' + \nu_1'') + 1}{x}. \tag{16}$$

Nun sind ν_1' und ν_1'' bei symmetrischen Wicklungen stets ungerade ganze Zahlen, daher ist $\nu_1' - \nu_1''$ und $\nu_1' + \nu_1''$ stets eine ganze gerade Zahl und der Zähler der vier Ausdrücke stets ungerade, und weil bei $x = 1, 2, 3$ usw. Z_2 eine ganze Zahl sein muß, gelangen wir zu folgendem Ergebnisse:

1. Damit einseitige Züge auftreten, muß bei symmetrischer Ständerwicklung Z_2 ungerade sein. Jeder Käfig mit ungerader Stabzahl verursacht bei symmetrischer Ständerwicklung mehr oder minder starke Geräusche.

2. Die geraden Harmonischen eines beliebigen Läufergrundfeldes — das sind zugleich die geraden Harmonischen eines Zahngrundfeldes des Läufers — können bei symmetrischem Ständer niemals einseitige Züge entstehen lassen und zur Geräuschbildung beitragen.

3. Eine beliebige Harmonische eines beliebigen Läufergrundfeldes kann bei symmetrischem Ständer stets dann einseitige Züge erzeugen und zur Geräuschbildung beitragen, wenn Z_2 in den Ausdrücken (13) bis (16) eine ganze Zahl ergibt.

Hiernach muß jeder Käfig mit gerader Stabzahl (abgesehen von den Tönen relativer Periodenzahl Ea) geräuschfrei arbeiten, wie dies auch die Beispiele bei Stiel und zahlreiche andere in der Literatur veröffentlichte Angaben[1]) beweisen. Bei der Wahl der Stabzahl des Käfigs ist jedoch noch ihr Einfluß auf das Anlaufdrehmoment maßgebend, und man wird nicht immer in der Lage sein, die Stabzahl gerade zu machen. In diesen Fällen müssen wir aber immer danach trachten, die Stabzahl derart ungerade zu wählen, daß wenigstens die stärksten Oberfelder bei der Geräuschbildung ausgeschaltet werden. Wie dies geschehen kann, soll jetzt gezeigt werden. Wir betrachten zunächst

a) die Wirkung eines Ständeroberfeldes des Grundstromes und eines Läuferoberfeldes des Ständergrundfeldes. Von diesen sind in der Regel die Ersatzdrehfelder der Zahngrundfelder und ihre gleichpoligen Wicklungsoberfelder am stärksten. Setzen wir für diese in die Gleichung (13) bis (16): $\nu_1' = Z_1/p \pm 1$, $\nu_1'' = 1$, $x = 1$, so bekommen wir folgende Bedingungen für das Entstehen von Geräuschen durch die Zahngrundfelder und gleichpoligen Wicklungsoberfelder:

$$1)\quad Z_2 = Z_1 - 1, \tag{17}$$

$$2)\quad Z_2 = Z_1 - 2p + 1, \tag{18}$$

[1]) Siehe auch Stiel und Ottenstein, ETZ 1919, S. 46.

$$3)\quad Z_2 = Z_1 - 2p - 1, \tag{19}$$
$$4)\quad Z_2 = Z_1 + 1, \tag{20}$$
$$5)\quad Z_2 = Z_1 + 2p - 1, \tag{21}$$
$$6)\quad Z_2 = Z_1 + 2p + 1. \tag{22}$$

In nebenstehender Tabelle sind für die Polpaarzahlen 1 bis 4 die sich aus den letzten sechs Gleichungen ergebenden (positiven bzw. negativen) Überschüsse $Z_1 - Z_2$ der Zähnezahlen im Ständer und Läufer zusammengestellt. Es sind dies die mysteriösen und gefürchteten Zähnezahlüberschüsse, vor denen auf Grund schlechter praktischer Erfahrungen immer gewarnt worden ist[1]). Mit Rücksicht auf die Unsicherheit in der Berechnung der resultierenden Oberfelder sind die Zähnezahlüberschüsse dieser Tabelle unter allen Umständen zu vermeiden[2]).

p	$Z_1 - Z_2$					
1	+1	+1	+3	−1	−1	−3
2	+1	+3	+5	−1	−3	−5
3	+1	+5	+7	−1	−5	−7
4	+1	+7	+9	−1	−5	−9

Bei genauerer Betrachtung zeigt es sich, daß bei Lauf in der Nähe von Synchronismus im allgemeinen das Feld $\frac{Z}{p} - 1$ vergrößert und das Feld $\frac{Z}{p} + 1$ verkleinert wird. Wenn daher ersteres wirksam wird, (Bedingungen (17) bis (20)), sind die Geräusche lauter, was auch mit den Versuchsbeispielen übereinstimmt: Läufer 19 des Beispiels 1 mit $p = 2$ und dem Überschuß $+5$ und Läufer 25 des Beispiels 2 mit $p = 2$ und dem Überschuß -1 ergaben die lautesten Geräusche, bei den Läufern 27 und 29 der Beispiele 3 und 4 mit den Überschüssen -3 bzw. -5 waren sie weniger laut, immerhin aber noch stark, weil der besondere Fall der Resonanz vorlag. Es ist ferner zu beachten, daß noch die unter b) genannte Wirkung hinzukommt.

Auf ähnliche Weise ergeben sich folgende Bedingungen für das Entstehen von Geräuschen durch ein Ständeroberfeld niedrigster Ordnung ($\nu_1' = 2m_1 \pm 1$) zusammen mit einem Zahngrunddrehfelde des Läufers:

$$1)\quad Z_2 = 2m_1 p - 1. \tag{23}$$
$$2)\quad Z_2 = 2m_1 p - 2p + 1, \tag{24}$$
$$3)\quad Z_2 = 2m_1 p - 2p - 1, \tag{25}$$
$$4)\quad Z_2 = 2m_1 p + 1, \tag{26}$$
$$5)\quad Z_2 = 2m_1 p + 2p - 1, \tag{27}$$
$$6)\quad Z_2 = 2m_1 p + 2p + 1. \tag{28}$$

Die hieraus sich ergebenden Stabzahlen, welche z. T. auch in den Gleichungen (17) bis (22) enthalten sind, sind stets zu vermeiden.

Ebenso kann man die Zähnezahlen finden, bei denen ein anderes beliebiges Ständerfeld mit den Läuferoberfeldern des Grundfeldes wirksam wird. — Wir kommen jetzt zur

b) Wirkung eines beliebigen Ständeroberfeldes und eines Läuferoberfeldes eines Ständer**ober**feldes.

Betrachten wir zwei Ständeroberfelder, so ergibt deren Summe und Differenz stets eine gerade Zahl $\pm 2a$, und die Gleichungen (17) bis (22) ergeben dann die Bedingungen für das Entstehen von Geräuschen durch ein Ständeroberfeld und ein Läuferoberfeld eines Ständeroberfeldes

$$1)\quad Z_2 = \frac{a \cdot 2p - 1}{x}, \tag{29}$$

$$2)\quad Z_2 = \frac{a \cdot 2p + 1}{x}. \tag{30}$$

---

[1]) Siehe Anm. auf S. 91.

[2]) Daß hier und da Motoren mit diesen Zähnezahlüberschüssen leidlich gut arbeiten, kann an einem großen Luftspalte, geschlossenen Nuten usw. liegen. Es kommt bei der Bewertung der Maschine auch viel auf die an sie gestellten, naturgemäß verschiedenen Ansprüche an.

Dies ist für $x = 1$ bei einer zwei- und vierpoligen Maschine jede ungerade Zahl. Mit zunehmender Polpaarzahl der Maschine bleiben einige ungerade Stabzahlen frei von einer Geräuschbildung durch solche Oberfelder.

Als Sonderfall hiervon erhalten wir für $\nu_1' = \nu_1'' = \frac{Z_1}{p} \pm 1$ die Bedingungen, bei denen die Zahngrundfelder des Ständers mit ihren aus Gleichung (5) folgenden Läuferoberfeldern Geräusche ergeben:

$$1)\quad Z_2 = \frac{2 Z_1 - 2p - 1}{x}, \tag{31}$$

$$2)\quad Z_2 = \frac{2 Z_1 - 2p + 1}{x}, \tag{32}$$

$$3)\quad Z_2 = \frac{2 Z_1 - 1}{x}, \tag{33}$$

$$4)\quad Z_2 = \frac{2 Z_1 + 1}{x}, \tag{34}$$

$$5)\quad Z_2 = \frac{2 Z_1 + 2p - 1}{x}, \tag{35}$$

$$6)\quad Z_2 = \frac{2 Z_1 + 2p + 1}{x}. \tag{36}$$

Hier sind insbesondere diejenigen Werte von x einzusetzen, für welche die Ordnung nach Gleichung (5) niedrig wird, weil dies die stärksten Felder sind. Wegen der Teilbarkeit der Brüche ist wiederum nur eine beschränkte Anzahl von Fällen möglich. Die aus den Bedingungen (31) bis (36) sich für kleines ν_2 ergebenden Stabzahlen sind im allgemeinen stets zu vermeiden.

Sind die beiden wirksamen Ständeroberfelder die von niedrigster Ordnung, so haben wir in Gleichung (13) bis (16) zu setzen $\nu_1' = \nu_1'' = 2 m_1 \pm 1$ und bekommen die Bedingungen, bei denen die Ständeroberfelder niedrigster Ordnung mit ihren aus Gleichung (5) folgenden Läuferoberfeldern Geräusche verursachen $\left(\text{außer den praktisch unmöglichen } Z_2 = \frac{\pm 2p \pm 1}{x}\right)$

$$1)\quad Z_2 = \frac{4 m_1 p - 2p - 1}{x}, \tag{37}$$

$$2)\quad Z_2 = \frac{4 m_1 p - 2p + 1}{x}, \tag{38}$$

$$3)\quad Z_2 = \frac{4 m_1 p + 2p + 1}{x}, \tag{39}$$

$$4)\quad Z_2 = \frac{4 m_1 p + 2p - 1}{x}. \tag{40}$$

Hier sind wieder hauptsächlich die Werte von x zu nehmen, für welche die Ordnung nach Gleichung (5) niedrig wird. Diese Stabzahlen sind im allgemeinen zu vermeiden.

Als Beispiel ziehen wir den Motor Seite 9 mit $p = 2$, $m_1 = 3$ heran und bekommen:

nach Gleichung (31) bis (36): $Z_2 = 43, 45, 47, 49, 51, 53$;
nach Gleichung (37) bis (40): $Z_2 = 19, 21, 27, 29$;

d. h. bei den oben untersuchten Läufern 19, 27 und 29 werden Geräusche durch die niedrigsten Ständeroberfelder (—) 5 und (+) 7 hervorgerufen. Ein Läufer mit 43 usw. Stäben würde im Gegensatze zu Läufer 41 (Beispiel 5) voraussichtlich wieder stärkere Geräusche verursacht haben.



Ist die Ständerwicklung unsymmetrisch, so muß in jedem einzelnen Falle untersucht werden, welche Ordnung die stärksten Oberfelder haben, und es kann dann wie oben verfahren werden.

Aus dem Beispiel 7 lernen wir, daß die Kurzschlußringe zur Verhütung ungewollter Unsymmetrien möglichst zu isolieren sind. Ist eine Abstützung erforderlich, so muß, wenn auf Isolation verzichtet werden soll, die Anzahl der Auflage- oder Stützpunkte eine gerade Zahl sein.

Unübersehbare Verhältnisse können auch bei einem nicht sorgfältig ausgeführten Käfig mit unisolierten Stäben durch Stromschluß innerhalb der Läufereisenbleche eintreten. Es ist wohl denkbar, daß hier auch bei gerader Stabzahl magnetisch wirksame Oberfelder und Geräusche entstehen können In zweifelhaften Fällen wird es sich daher empfehlen, auch die Stäbe des Käfigs gegen den Eisenkörper zu isolieren.

II. Die Spulenwicklungen für Asynchron- und Synchronmaschinen.

Symmetrische Wicklungen in beiden Teilen der Maschine können keine einseitige Zugkraft erzeugen und müssen immer bis auf die Töne relativer Frequenz der Oberfelder geräuschfreien Betrieb ergeben. Wenn auch die symmetrischen Wicklungen den unsymmetrischen in elektrischer Hinsicht überlegen sind, so wird es doch Fälle geben, wo sie sich nicht vermeiden lassen. Die Unsymmetrie muß dann, um geräuschbildende Oberfelder fernzuhalten, für $p = 1$ nur auf 1 Pol und für $p > 1$ z. B. nur auf 1 Polpaar oder auf $p/2$ Polpaare ausgedehnt werden; dabei wird die Nutenzahl immer gerade. Besonderes Augenmerk ist auf die symmetrische Verteilung etwaiger leerer Nuten oder toter Stäbe zu legen. Damit bei einer Synchronmaschine im Feld keine geraden bzw. gebrochenen Oberfelder entstehen, muß das Feldsystem völlig symmetrisch ausgeführt werden. Wir haben mithin dafür zu sorgen:

1. daß die Feldpole in bezug auf eine Mittelachse völlig symmetrisch oder alle gleichmäßig unsymmetrisch ausgeführt werden (guter Guß, gleiche Bearbeitung, gleiche Wicklungen).

2. daß die Feldpole im Joch völlig symmetrisch zueinander gelagert werden, oder bei versetzten Polen die Versetzung überall gleich ist (bei zwei Polen darf überhaupt keine Versetzung vorhanden sein).

3. daß die etwa vorhandene Dämpferwicklung so ausgeführt ist, daß sie bei $p = 1$ nur ungerade und bei $p > 1$ keine gebrochenen Oberfelder erzeugt. Diese Forderung wird erfüllt, wenn man den Teilkreis der Löcher in eine gerade durch die Polzahl teilbare Anzahl von gleichen Teilen einteilt.

Diese Sorgfalt bei der Herstellung wird jedoch nur bei raschlaufenden Maschinen am Platze sein, da Ständer- und Läuferschwingungen bei schweren Langsamläufern nicht oder wenigstens nicht so leicht eintreten können.

III. Gleichstrommaschinen.

Aus den Erwägungen in den Abschnitten B III und F II ergeben sich folgende Regeln zur Beseitigung bzw. Milderung der Geräuschbildung:

a) Feldsystem:

1. Symmetrische Ausführung und Lagerung der Haupt- und Hilfspole,

2. Anwendung von zwei Hilfspolen bei $p = 1$; die Anwendung von p-Hilfspolen für $p > 1$ ist gestattet;

3. symmetrische Kompensationswicklung.

b) Anker:

4. Anwendung einer solchen geraden Nutenzahl, daß

5. die Lamellenzahl je Polpaar gerade ist,

6. möglichst symmetrische Verteilung der kurzgeschlossenen Leiter einer Spule um eine Mittelachse, derart, daß diese Leiter mit den gleichzeitig von der gegen-



über liegenden Bürste kurzgeschlossenen Leitern zusammen eine möglichst symmetrische Wicklung ergeben,

7. wenn bei p = 1 die Lamellenzahl je Pol keine ganze Zahl ist, möglichst geringe Verkürzung der Spulenbreite,

8. derartige Anordnung etwa verwendeter toter Stäbe oder leerer Nuten, daß der periodische Verlauf der MMK einer aus ihnen gebildeten Wicklung während eines Umganges mindestens zweimal wiederkehrt,

9. überall gleicher gegenseitiger Abstand der 2p Bürsten.

In einer Arbeit „Über das Pfeifen von Maschinen"[1]) hat Fischer-Hinnen die Geräuschbildung insbesondere bei Gleichstrommaschinen untersucht und gefunden, daß bei einem bestimmten Verhältnis des Polbogens zur Nutteilung die Lautstärke am geringsten wird. Seine Faustformel nimmt jedoch keine Rücksicht darauf, ob die Nutenzahl gerade oder ungerade ist, daher bleibt bei ungeradem Z immer die Möglichkeit zur Geräuschbildung durch eine einseitige Kraft bestehen. Möglicherweise werden aber durch die vorgeschlagene Formgebung der Polschuhe magnetisch wirksame Oberfelder verkleinert, was uns ihre angeblich günstige Wirkung auch bei ungeradem Z erklären würde. Infolge des großen Luftspaltes und der üblichen starken Abrundung der Polschuhe ist aber eine genaue Festlegung der Polbreite ganz unmöglich; man wird daher niemals mit Sicherheit auf rechnerischem oder zeichnerischem Wege dem Polbogen die gewünschte Breite geben können. Wegen dieser Unsicherheit ist diese Maßnahme nicht zuverlässig, was der genannte Verfasser auch selbst zugibt.

Wir sind hier auf die praktischen Erfahrungen angewiesen; immerhin werden wir durch die nach der Theorie erforderlichen Maßnahmen — Verkleinerung des Zahnfeldes und Symmetrie im Feldsystem und Anker — viel erreichen.

IV. Wechselstrom-Kommutatormaschinen.

Die Gesichtspunkte zur Beseitignng der Geräusche laufen gemäß den Betrachtungen im Abschnitt B IV auch hier auf die Wahl völliger symmetrischer oder beschränkt symmetrischer Anordnungen und Wicklungen hinaus, derart, daß eine über den ganzen Umfang sich erstreckende Unsymmetrie vermieden werden muß. Wir haben darauf zu achten:

1. daß die Zähnezahlen im Ständer und Läufer gerade sind,
2. daß bei ausgeprägten Polen diese symmetrisch ausgeführt und angeordnet sind,
3. daß etwa vorhandene Hilfswicklungen völlig symmetrisch ausgeführt sind,
4. daß die von den Bürsten kurzgeschlossenen Leiter am Umfang möglichst symmetrisch und zwar so verteilt werden, daß sie zusammen eine zum Hauptsystem symmetrische Wicklung ergeben,
5. daß die Bürsten überall gleichen Abstand haben.

In allen Fällen, wo unvermeidlich Gelegenheit zur Entstehung von einseitigen Zugkräften durch magnetisch wirksame Oberfelder gegeben ist, müssen wir ferner eine Nachprüfung der Welle vornehmen, ob wir nicht im Bereiche der Motordrehzahlen der kritischen Drehzahl der Welle in bezug auf die Schwingungszahl der magnetischen Kraft begegnen. Die Welle muß also in solchen Fällen stärker als gewöhnlich bemessen werden. Ebenso wird es sich empfehlen, das Ständergehäuse mit Füßen kräftig auszuführen, damit seine Eigenschwingungszahl oberhalb der Drehzahl der Kraft gelegen ist.

Daß der Läufer stets gut ausgewuchtet und dynamisch zentrisch gelagert wird, ist eine allbekannte Grundbedingung für ruhigen Lauf und wird nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

[1]) E. u. M. 1904, S. 339.



Das Drehmoment und die Gesichtspunkte für den Entwurf der Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine im Parallelbetrieb.

Von

Dr.-Ing. **Michael Liwschitz**, Charlottenburg.

Die wichtigeren Arbeiten, die sich mit der Berechnung des Drehmomentes einer Dämpferwicklung befassen, sind die von Dreyfus[1]), Schumann[2]) und Boucherot[3]). Gelegentlich einer Untersuchung über selbsterregte Schwingungen von Synchronmaschinen berechnet Dreyfus, ausgehend von den Feldgleichungen, das Dämpfungsmoment einer nach Art der Statorwicklung von Asynchronmaschinen angeordneten Zweiphasenwicklung, unter Annahme konstanter magnetischer Leitfähigkeit längs des Ankerumfanges und unter Vernachlässigung der Streuung. Schumann nimmt das Vektordiagramm der Maschine auch während des Pendelns als gültig an, läßt die Vektoren des Diagramms selbst die Schwingungen ausführen und berechnet mit Hilfe der Stromkomponenten und deren Änderungen das Dämpfungsmoment einer Dämpferwicklung, wie sie in Wirklichkeit angeordnet wird, wobei die Streuung der Dämpferwicklung und zum Teil auch der Widerstand der Querverbindungen zwischen den einzelnen Dämpferstäben vernachlässigt werden. Boucherot geht von den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion aus, die während des Pendelns nach einer komplizierteren Funktion der Zeit verlaufen als im stationären Zustande, und berechnet unter Berücksichtigung der Streuung die Ströme, Leistungen und Drehmomente für zwei parallelgeschaltete Zweiphasen-Maschinen derselben Bauart wie die von Dreyfus. Von der ideellen Dämpferwicklung werden dann durch ganz rohe Schätzung Schlüsse auf die wirkliche Dämpferwicklung gezogen.

Es soll hier für die Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine mit ausgeprägten Polen, wie sie in der Praxis ausgeführt wird, ausgehend von den Feldgleichungen, das Drehmoment während des Pendelns im Parallelbetrieb berechnet und der Einfluß der Anordnung der Dämpferwicklung auf die Größe dieses Drehmomentes festgestellt werden unter Berücksichtigung der Streuung und der variablen magnetischen Leitfähigkeit längs des Ankerumfanges. Die Dämpferstäbe sind in den allermeisten Fällen vollständig in Eisen gebettet und die Rechnung wird zeigen, daß die Streureaktanz auch bei der im allgemeinen geringen Periodenzahl der Dämpferströme im Vergleich zum Ohmschen Widerstande nicht zu vernachlässigen ist[4]).

Um zu übersichtlichen Resultaten zu gelangen, werden wir jedoch für die Widerstände der Querverbindungen zwischen den Dämpferstäben einen Näherungswert nehmen und auf eine mathematisch genaue Berechnung derselben verzichten.

---

[1]) L. Dreyfus, Einführung in die Theorie der selbsterregten Schwingungen synchroner Maschinen. E. & M. 1911, S. 323, 345.

[2]) W. O. Schumann, Über die Drehmomente der Dämpferwicklung einer Mehrphasen-Synchronmaschine bei kleinen Pendelschwingungen im Parallelbetrieb. Dissertation, Karlsruhe, 1912.

[3]) P. Boucherot, Amortissment et amortisseurs des alternateurs. La Lumière électrique Bd. 24, 1913, S. 167.

[4]) Die Anregung zu dieser Arbeit ebenso wie den Hinweis auf die wichtige Rolle, die die Streuung hier spielt, verdanke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Rüdenberg.

I. Die Käfigwicklung als Dämpferwicklung.

Die Längs- und die Querwicklung. Das resultierende Feld der Maschine, das von den Magnet-, Anker- und Dämpferamperewindungen gemeinsam erzeugt wird, und das wir uns sinusförmig denken, zerlegen wir in zwei Komponenten, das Längs- und das Querfeld mit den Amplituden über der Polmitte bzw. über der Pollücke.

Der lineare Charakter der Differentialgleichung für die EMK der Dämpferwicklung erlaubt uns, die Wirkung des Längs- und des Querfeldes auf die Dämpferwicklung getrennt zu behandeln.

Wir betrachten etwa den Fall, wo die Dämpferwicklung, als Käfigwicklung ausgebildet, eine gerade Anzahl Stäbe pro Pol besitzt. Bild 1a zeigt schematisch eine solche Dämpferwicklung, über ihr die Grundwellen des Längs- und des Querfeldes.

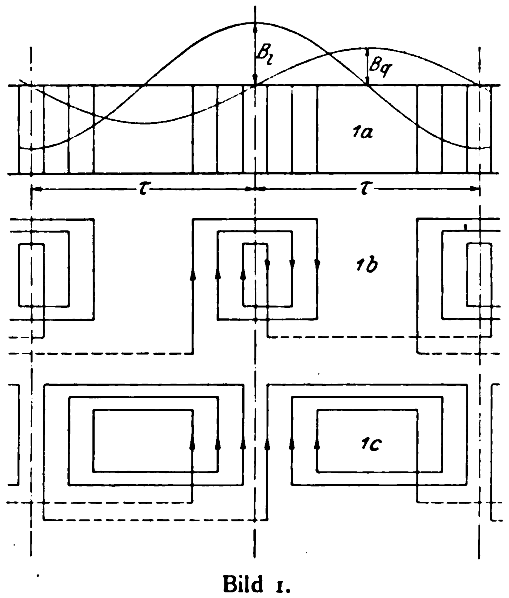


Bild 1.

Es ist ohne weiteres klar, daß unter dem Einfluß des Längsfeldes allein zwei in bezug auf die Polmitte symmetrisch gelegene Stäbe gleiche und entgegengesetzte Ströme führen werden, dagegen zwei in bezug auf die Pollücke symmetrisch gelegene Stäbe gleiche und gleichgerichtete Ströme führen werden. In den Verbindungsstücken zwischen je zwei Polen werden keine vom Längsfeld herrührenden Ströme fließen. In bezug auf das Längsfeld sind somit die Dämpferstäbe eines jeden Poles unabhängig von denen der anderen Pole, und wir dürfen, solange wir mit dem Längsfeld allein zu tun haben, die Stäbe nur eines Poles betrachten.

Wir denken uns die in einem Pol untergebrachten Dämpferstäbe in einzelne Maschen zerlegt, und zwar derart, daß je zwei zur Polmitte symmetrische Stäbe eine Masche bilden. Von solchen zwei Stäben kann einer als der Rückleiter des anderen betrachtet werden, weil er den gleichen und entgegengesetzt gerichteten Strom führt. Die Kraftflüsse, die die einzelnen Maschen umfassen, und ihre EMKe sind verschieden. Die EMK ist am größten in der an den Polspitzen untergebrachten, am kleinsten in der in der Nähe der Polmitte liegenden Masche. Dementsprechend sind auch die Ströme verschieden. Durch die Verbindung aller Stäbe miteinander wird die Ungleichheit der Ströme noch mehr vergrößert.

Die Ringe, die an beiden Seiten der Maschine sämtliche Dämpferstäbe miteinander verbinden, erhalten gewöhnlich je einen Querschnitt, der bedeutend größer ist als der Querschnitt eines einzelnen Stabes, meistens $\frac{N}{2}$ mal so groß, wenn N die Stabzahl pro Pol bedeutet. — Wir denken uns an jeder Seite der Maschine statt einen $\frac{N}{2}$ solcher Ringe und ersetzen die Dämpferwicklung in bezug auf das Längsfeld durch eine solche, wie sie in Bild 1b dargestellt ist[1]). Dadurch werden die

[1]) Wie wir später sehen werden, führt diese Rechnung mit Ersatzwicklungen zu gleichen Resultaten wie die von der Asynchronmaschine her übliche Behandlung des Käfigs als Mehrphasenwicklung.

Ströme aller Dämpferstäbe gleich gemacht, und zwar gleich einem Mittelwert aus den verschiedenen Strömen. Die Verschiedenheit der EMKe der verschiedenen Maschen wird, wie üblich, durch Einführung eines Wicklungsfaktors oder, was dasselbe, durch Einführung einer effektiven Windungszahl berücksichtigt.

Den Widerstand dieser Ersatzwicklung, der Längswicklung, werden wir auch entsprechend dem Bild 1b rechnen, wobei für die Querverbindungen der wirkliche Querschnitt der Ringe eingesetzt werden soll. Die Streuung der Ringe, die an dem Polschuheisen anliegen, werden wir vernachlässigen.

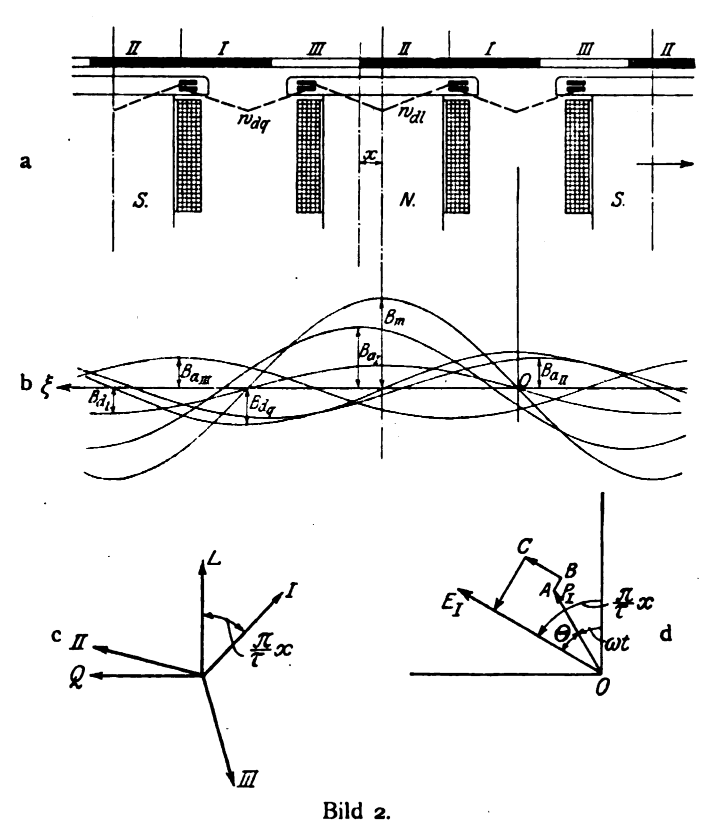


Bild 2.

Gehen wir zur Betrachtung des Querfeldes über, so sehen wir, daß für das Querfeld Analoges gilt wie für das Längsfeld, nur liegt die Symmetrieachse nicht mehr in der Polmitte, sondern in der Pollücke. Zwei zur Pollückenmitte symmetrisch gelegene Stäbe führen gleiche und entgegengesetzt gerichtete Ströme, zwei zur Polmitte symmetrische Stäbe — gleiche und gleichgerichtete Ströme. Dort konnten die Stäbe eines Poles keine Ströme in die Stäbe des anderen Poles schicken, hier können die Stäbe einer Polhälfte keine Ströme in die Stäbe der anderen Polhälfte desselben Poles schicken. Dort bilden die Stäbe eines Poles ein Wicklungselement, hier die Stäbe der Hälften zweier benachbarter Pole. Dementsprechend ersetzen wir die Dämpferwicklung in bezug auf das Querfeld durch eine solche, wie sie in Bild 1c dargestellt ist. Den Widerstand dieser Ersatzwicklung, der Querwicklung, werden wir ähnlich wie oben entsprechend dem Bild 1c rechnen und die Streuung der Ringe, die hier mit etwa $^1/_3$ ihrer Länge ganz in der Luft liegen, außer acht lassen. Wir rechnen also wieder mit einem mittleren Stabstrom. Für die Größe des Dämpfungsmomentes, das uns vor allem interessiert, ergeben sich brauchbare Resultate. Ein Bild von der Verteilung der Ströme in den einzelnen Stäben bekommen wir aber auch durch unsere Rechnung nicht.

Wir wollen die Rechnung an der Dreiphasenmaschine durchführen. Wie wir später sehen werden, gelten die dabei abgeleiteten Resultate allgemein für jede Mehrphasenmaschine.

Das Längs- und das Querfeld. In Bild 2a ist die gegenseitige Lage des Magnetsystems und der drei Ankerphasen für einen bestimmten Zeitmoment t eingezeichnet[1]). Zu dieser Zeit t möge die Mitte des Nordpoles N um die Strecke x_{cm} gegenüber der Mitte der Phase I vorgeschoben sein. Bei pendelfreiem Lauf ist in diesem Moment die in der Phase I vom Magnetfelde induzierte EMK gleich konst. $\sin \frac{x}{\tau}\pi$, wo τ die Polteilung der Maschine ist, vorausgesetzt, daß die Feldkurve sinusförmig ist. Pendelt die Maschine, so gilt dieses einfache Sinusgesetz für die vom Magnetfelde induzierte EMK nicht mehr. Auch die Klemmenspannung der Maschine, die Netzspannung, führt im allgemeinen während des Pendelns Schwingungen aus. Für diese wollen wir jedoch das Sinusgesetz gelten lassen. Schon bei wenig parallelgeschalteten Maschinen sind im allgemeinen die Schwankungen der Netzspannung während des Pendelns sehr klein.

Für die Phasenspannungen der drei Ankerphasen, zur Zeit t, setzen wir somit[2])

$$\left.\begin{aligned} p_I &= P_{max} \sin \omega t \\ p_{II} &= P_{max} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ p_{III} &= P_{max} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bei Untersuchungen über Pendelungen von Synchronmaschinen wird gewöhnlich als unabhängige Koordinate die Größe

$$\Theta = \frac{x}{\tau}\pi - \omega t \qquad (2)$$

eingeführt. In pendelfreiem Zustande ist Θ konstant und stellt die Phasenverschiebung zwischen der vom Magnetfelde induzierten EMK und der Klemmenspannung der Maschine dar (s. Vektordiagramm Bild 2d). Θ ist gewissermaßen ein Maß für die Leistung bzw. für das Drehmoment der Maschine.

Für den Generatorzustand ist Θ positiv, für den Motorzustand negativ.

In der weiteren Rechnung werden wir den Widerstand und die Streureaktanz der Ankerwicklung vernachlässigen und das Sinusgesetz, das wir für die Klemmenspannung annahmen, auf die vom resultierenden Felde der Maschine in der Ankerwicklung induzierte EMK (bei pendelfreiem Lauf Vektor OC Bild 2d) übertragen.

Aus der oben erwähnten Arbeit von Dreyfus ist bekannt, daß die Streureaktanz der Ankerwicklung auf die Dämpfung keinen Einfluß hat, daß durch den Einfluß des Ankerwiderstandes negative Dämpfungsmomente entstehen, die unter Umständen zu selbsterregten Schwingungen Anlaß geben können. Im Vergleich zu dem Dämpfungsmomente der Dämpferwicklung sind aber diese negativen Dämpfungsmomente sehr klein und können daher hier außer acht gelassen werden.

Auf die Größe des Fehlers, der durch die Vernachlässigung des Widerstandes und der Streuung der Ankerwicklung entsteht, werden wir später zurückkommen.

Wir werden die Sättigung zunächst als klein voraussetzen und mit sinusförmigen Feldern rechnen.

In Bild 2b sind die Feldkurven der sechs Wicklungen dargestellt. B_{aI}, B_{aII} und B_{aIII} sind die Amplituden der Feldkurven der drei Ankerphasen, B_{dl} und B_{dq}

[1]) Übersichtlichkeitshalber sind die beiden Dämpferwicklungen räumlich voneinander getrennt gezeichnet.

[2]) Alle Größen werden im „praktischen" Maßsystem gemessen.

die der beiden Dämpferwicklungen, der Längs- und der Querwicklung, B_m die der Magnetwicklung. Diese sechs Felder kann man beliebig ersetzen durch zwei, deren Amplituden um 90 elektrische Grade gegeneinander verschoben sind. Für uns von Interesse sind vier solche Kurvenpaare, von denen ein Kurvenpaar seine Amplituden in der Polmitte bzw. in der Pollücke hat (das sind das resultierende Längs- bzw. Querfeld der Maschine) und die anderen drei ihre Amplituden in den Achsen der drei Phasen bzw. in drei gegenüber diesen um 90^0 verschobenen Achsen haben. Bezeichnen wir die Amplituden der Felder des ersten Kurvenpaares mit B_l bzw. B_q und die in den Achsen der drei Phasen mit B_I, B_{II} bzw. B_{III}, so gelten folgende Transformationen (vgl. Bild 2c):

$$\left.\begin{aligned} B_I &= B_l \cos\frac{x}{\tau}\pi - B_q \sin\frac{x}{\tau}\pi \\ B_{II} &= -B_l \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) + B_q \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) \\ B_{III} &= -B_l \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\tau}\pi\right) - B_q \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\tau}\pi\right). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Größen B_I, B_{II} und B_{III} lassen sich auf einfache Weise durch die Klemmenspannung der Maschine ausdrücken.

Es bezeichne: w_a die effektive Windungszahl einer Ankerphase, τ die Polteilung und l_i die ideelle Ankerlänge der Maschine. Die mit den drei Phasen verketteten Flüsse sind

$$\Phi_I = \frac{2}{\pi}\tau\, l_i\, B_I$$

$$\Phi_{II} = \frac{2}{\pi}\tau\, l_i\, B_{II}$$

$$\Phi_{III} = \frac{2}{\pi}\tau\, l_i\, B_{III}$$

und es muß nach unseren Voraussetzungen gelten

$$-w_a \frac{d\Phi_I}{dt} 10^{-8} = -w_a \frac{2}{\pi}\tau\, l_i \frac{dB_I}{dt} 10^{-8} = P_{max} \sin\omega t$$

$$-w_a \frac{d\Phi_{II}}{dt} 10^{-8} = -w_a \frac{2}{\pi}\tau\, l_i \frac{dB_{II}}{dt} 10^{-8} = P_{max} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$-w_a \frac{d\Phi_{III}}{dt} 10^{-8} = -w_a \frac{2}{\pi}\tau\, l_i \frac{dB_{III}}{dt} 10^{-8} = P_{max} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} B_I &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tau l_i}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a} 10^8 \cos\omega t \\ B_{II} &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tau l_i}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a} 10^8 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{und} \quad B_{III} &= \frac{\pi}{2}\frac{2}{\tau l_i}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a} 10^8 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Setzt man diese Werte in die Transformationsgleichungen (3) ein und subtrahiert die dritte Gleichung von der zweiten, so ergibt diese Differenz zusammen mit der ersten Gleichung unter Berücksichtigung von (2)

und

$$\left.\begin{aligned} B_l &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tau l_i}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a}\,10^8\cdot\cos\Theta \\ B_q &= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\tau l_i}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a}\,10^8\cdot\sin\Theta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Da über Θ bis jetzt noch keine Bestimmungen getroffen worden sind, müssen die Gleichungen (5) auch für den stationären Zustand gelten. Für diesen Zustand gilt aber auch das Spannungsdiagramm, es müssen also die Beziehungen der Gleichung (5) diesem direkt zu entnehmen sein. Dies ist in der Tat auch der Fall. Da weiter das Spannungsdiagramm für jede Phase einer Maschine mit beliebiger Phasenzahl gilt, folgt daraus, daß die Gleichungen (5) nicht nur für die Dreiphasenmaschine, sondern allgemein für jede Mehrphasenmaschine gelten.

Durch die Gleichungen (5) sind die Amplituden des Längs- bzw. des Querfeldes als Funktionen der Winkelabweichung Θ ausgedrückt; es können nun leicht die Dämpferströme berechnet werden.

Die Dämpferströme. Die Flüsse in der Längs- bzw. in der Querachse der Maschine sind

$$\left.\begin{aligned} \Phi_l &= \frac{2}{\pi}\tau l_i B_l = \frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a}\,10^8\cos\Theta \\ \Phi_q &= \frac{2}{\pi}\tau l_i B_q = -\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a}\sin\Theta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die Differentialgleichungen der beiden Dämpferwicklungen, der Längs- und der Querwicklung, sind

$$\left.\begin{aligned} i_{dl} r_{dl} + S_{dl}\frac{d\,i_{dl}}{dt} + w_{dl}\frac{d\,\Phi_l}{dt}\,10^{-8} &= 0 \\ i_{dq} r_{dq} + S_{dq}\frac{d\,i_{dq}}{dt} + w_{dq}\frac{d\,\Phi_q}{dt}\,10^{-8} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

also nach Gleichung (6)

$$\left.\begin{aligned} i_{dl} r_{dl} + S_{dl}\frac{d\,i_{dl}}{dt} - w_{dl}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a}\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt} &= 0 \\ i_{dq} r_{dq} + S_{dq}\frac{d\,i_{dq}}{dt} - w_{dq}\frac{1}{\omega}\frac{P_{max}}{w_a}\cos\Theta\frac{d\Theta}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Winkelabweichung denken wir uns während des Pendelns aus zwei Teilen zusammengesetzt: aus einer mittleren Abweichung Θ_m, die dem pendelfreien Zustande der Maschine entspricht, und aus einer Abweichung ε, die durch die Art der Pendelung bestimmt ist und für die das Gesetz

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin z t$$

angenommen werden kann. Die Kreisfrequenz z ist $z = \frac{2\pi n \nu}{60}$, wo n die Umdrehungszahl der Maschine pro Minute und ν die Schwingungszahl pro Umdrehung bedeuten. Somit

$$\Theta = \Theta_m + \varepsilon = \Theta_m + \varepsilon_0 \sin z t. \quad (9)$$

Es wird für die praktischen Fälle nur ein minimaler Fehler begangen, wenn man $\sin\varepsilon = \varepsilon$ und $\cos\varepsilon = 1$ setzt. Daher

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_0 z \cos z t$$

$$\sin\Theta = \sin\Theta_m + \varepsilon\cos\Theta_m$$

$$\cos\Theta = \cos\Theta_m - \varepsilon\sin\Theta_m$$

und nach Gleichung (8)

$$\left.\begin{aligned} i_{dl}\, r_{dl} + S_{dl}\frac{d\, i_{dl}}{dt} - P_{max}\frac{w_{dl}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0\left(\sin\Theta_m \cos z\, t + \frac{\varepsilon_0}{2}\cos\Theta_m \sin 2\, z\, t\right) = 0 \\ i_{dq}\, r_{dq} + S_{dq}\frac{d\, i_{dq}}{dt} - P_{max}\frac{w_{dq}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0\left(\cos\Theta_m \cos z\, t - \frac{\varepsilon_0}{2}\sin\Theta_m \sin 2\, z\, t\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Das sind zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Lösung der ersten ist

$$i_{dl} = e^{-\frac{r_{dl}}{S_{dl}}t}\left[C + \int \frac{1}{S_{dl}} P \frac{w_{dl}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0\left(\sin\Theta_m \cos z\, t + \frac{\varepsilon_0}{2}\cos\Theta_m \sin 2\, z\, t\right) e^{\frac{r_{dl}}{S_{dl}}t}\, dt\right].$$

Das erste Glied der rechten Seite können wir außer acht lassen. Es beeinflußt den Pendelvorgang nur ganz kurze Zeit gleich nach dem Auftreten der Ursache des Pendelns und verschwindet bald. Es wird somit der vom Längsfeld herrührende Strom, der Längsfeldstrom,

$$i_{dl} = P_{max}\frac{w_{dl}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0\left[\frac{\sin\Theta_m}{\sqrt{r_{dl}^2 + (z\, S_{dl})^2}}\cos\left(z\, t - \operatorname{arctg}\frac{z\, S_{dl}}{r_{dl}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\cos\Theta_m}{\sqrt{r_{dl}^2 + (2\, z\, S_{dl})^2}}\sin\left(2\, z\, t - \operatorname{arctg}\frac{2\, z\, S_{dl}}{r_{dl}}\right)\right] \quad (11)$$

und analog der vom Querfelde herrührende Strom, der Querfeldstrom,

$$i_{dq} = P_{max}\frac{w_{dq}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0\left[\frac{\cos\Theta_m}{\sqrt{r_{dq}^2 + (z\, S_{dq})^2}}\cos\left(z\, t - \operatorname{arctg}\frac{z\, S_{dq}}{r_{dq}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\sin\Theta_m}{\sqrt{r_{dq}^2 + (2\, z\, S_{dq})^2}}\sin\left(2\, z\, t - \operatorname{arctg}\frac{2\, z\, S_{dq}}{r_{dq}}\right)\right]. \quad (12)$$

In den Dämpferstäben treten also Ströme nicht nur der einfachen, sondern auch der doppelten Periodenzahl der Pendelung auf. Im Vergleich zu den Strömen einfacher Periodenzahl sind diese klein. Man kann daher setzen

$$i_{dl} = P_{max}\frac{w_{dl}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0 \sin\Theta_m \frac{1}{\sqrt{r_{dl}^2 + (z\, S_{dl})^2}}\cos\left(z\, t - \operatorname{arctg}\frac{z\, S_{dl}}{r_{dl}}\right) \quad (13)$$

und

$$i_{dq} = P_{max}\frac{w_{dq}}{w_a}\frac{z}{\omega}\varepsilon_0 \cos\Theta_m \frac{1}{\sqrt{r_{dq}^2 + (z\, S_{dq})^2}}\cos\left(z\, t - \operatorname{arctg}\frac{z\, S_{dq}}{r_{dq}}\right). \quad (14)$$

Die Ströme i_{dl} und i_{dq} sind nicht in Phase, weil S_{dq} bedeutend größer ist als S_{dl}. In zwei zur Polmitte oder zur Pollücke symmetrisch gelegenen Stäben ist der resultierende Strom gleich

$$i_d = i_{dl} \pm i_{dq}. \quad (15)$$

Wie wir später sehen werden, macht i_{dl} gewöhnlich 10 bis 20% von i_{dq} aus.

Die Drehmomente der Synchronmaschine. Das Drehmoment, mit dem der Anker (Bild 2a) nach rechts in der Drehrichtung des Rotors getrieben wird, ist

$$D = 2\, w_a\, l_i\, R\left[i_I\, B_l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{\tau}\pi\right) - i_{II} B_l \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) + i_{III} B_l \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\tau}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + i_I\, B_q \cos\frac{x}{\tau}\pi - i_{II}\, B_q \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) - i_{III}\, B_q \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\tau}\pi\right)\right] 10^{-8}\ \text{Dez.-Megadynen}^{1)},$$

wo R der Ankerradius und p die Polpaarzahl sind, oder

[1]) Ein Dezimeter-Megadyn ist gleich $\frac{1}{9{,}81}$ mkg.

$$D = B_l \left[i_I \sin \frac{x}{\tau}\pi - i_{II} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) + i_{III} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\tau}\pi\right)\right] \frac{2 p \tau l_i}{\pi} w_a 10^{-8} +$$

$$+ B_q \left[i_I \cos \frac{x}{\tau}\pi - i_{II} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) - i_{III} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\tau}\pi\right)\right] \frac{2 p \tau l_i}{\pi} w_a 10^{-8} \text{ Dez-Meg.} \quad (16)$$

In pendelfreiem Zustande ergibt dieses Drehmoment, mit der synchronen räumlichen Winkelgeschwindigkeit multipliziert, die elektromagnetische Leistung des Generators.

Bezeichnen wir mit D_A das der Rotorwelle von der Antriebsmaschine zugeführte Drehmoment, mit D_v ein Moment, das den Reibungs- und Eisenverlusten des Generators entspricht, und mit T das Trägheitsmoment der sich bewegenden Massen, so ist die Drehmomentengleichung

$$D_A = \frac{T}{p} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + D_v + D. \quad (17)$$

Die Gleichung (16) für das Drehmoment D wollen wir derart umformen, daß in ihr statt der Ankerströme i_I, i_{II} und i_{III} die Dämpferströme i_{dl} und i_{dq} auftreten. Der so gewonnene Ausdruck für D läßt einen besseren Überblick über die einzelnen für die Größe des Dämpfungsmomentes maßgebenden Größen zu[1]).

Zur Zeit t, wo die Mitte des Nordpoles N (Bild 2a) um x_{cm} gegenüber der Mitte der Phase I vorgerückt ist, sind die Gleichungen der MMK-Kurven der drei Ankerphasen, von welchen wir nur die Grundwellen in Betracht ziehen, in einem mit dem Rotor sich bewegenden Koordinatensystem (laufende Koordinate ξ) nach Bild 2b

$$a w_I = A W_I \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\xi - \frac{\pi}{\tau} x\right)$$

$$a w_{II} = A W_{II} \cos\left(\frac{\pi}{\tau}\xi - \frac{\pi}{\tau} x\right)$$

$$a w_{III} = - A W_{III} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\xi - \frac{\pi}{\tau} x + \frac{\pi}{3}\right)$$

und

$$a w_I + a w_{II} + a w_{III} = \sin \frac{\pi}{\tau}\xi \left[A W_I \cos \frac{\pi}{\tau} x - A W_{II} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{\tau} x\right) - \right.$$

$$\left. - A W_{III} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{\tau} x\right)\right] + \cos \frac{\pi}{\tau}\xi \left[- A W_I \sin \frac{\pi}{\tau} x + A W_{II} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{\tau} x\right) - \right.$$

$$\left. - A W_{III} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{\tau} x\right)\right] = \sin \frac{\pi}{\tau}\xi \cdot A W_{al} + \cos \frac{\pi}{\tau}\xi \cdot A W_{aq}.$$

Die drei MMK-Kurven $a w_I$, $a w_{II}$ und $a w_{III}$ lassen sich also durch zwei andere, die sich mit dem Magnetsystem bewegen, ersetzen. Eine von diesen hat ihre Amplitude in der Polmitte, von der Größe

$$A W_{al} = \left[A W_I \cos \frac{x}{\tau}\pi - A W_{II} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) - A W_{III} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\tau}\pi\right)\right],$$

das sind die Anker-Längsamperewindungen, die andere hat ihre Amplitude in der Pollücke, von der Größe

$$A W_{aq} = \left[- A W_I \sin \frac{x}{\tau}\pi + A W_{II} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) - A W_{III} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\tau}\pi\right)\right],$$

das sind die Anker-Queramperewindungen.

Die Amplitude der resultierenden Längsamperewindungen ist

$$A W_l = A W_m + A W_{dl} + \left[A W_I \cos \frac{x}{\tau}\pi - A W_{II} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau}\pi\right) - A W_{III} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\tau}\pi\right)\right]$$

und die der resultierenden Queramperewindungen

[1]) S. oben erwähnte Arbeit von Dreyfus.

$$A W_q = A W_{dq} + \left[-A W_I \sin \frac{x}{\tau} \pi + A W_{II} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau} \pi \right) - A W_{III} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\tau} \pi \right) \right].$$

Dementsprechend können wir für die Amplitude des resultierenden Längsfeldes setzen

$$B_l = c_m i_m + c_{dl} i_{dl} + c_1 \left[i_I \cos \frac{x}{\tau} \pi - i_{II} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{\tau} \pi \right) - i_{III} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{\tau} \pi \right) \right]$$

$$B_l =$$

$$c_m i_m + c_{dl} i_{dl} + c_1 \left(i_I - i_{II} \sin \frac{\pi}{6} - i_{III} \sin \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{x}{\tau} \pi + c_1 \left(i_{II} \sin \frac{\pi}{3} - i_{III} \sin \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{x}{\tau} \pi \quad (18a)$$

und für die Amplitude des resultierenden Querfeldes

$$B_q =$$

$$c_{dq} i_{dq} + c_2 \left(-i_I + i_{II} \sin \frac{\pi}{6} + i_{III} \sin \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{x}{\tau} \pi + c_2 \left(i_{II} \sin \frac{\pi}{3} - i_{III} \sin \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{x}{\tau} \pi. \quad (18b)$$

Wegen der Verschiedenheit der Leitfähigkeit in der Polmitte und in der Pollücke ist $c_1 \neq c_2$ und $c_{dl} \neq c_{dq}$.

Führt man die Gleichungen (18a) und (18b) in die Gleichung (16) ein, so ergibt sich für das Drehmoment D

$$D = \frac{2 p \tau l_i}{\pi} w_a \left(-\frac{c_m}{c_1} i_m B_q - \frac{c_{dl}}{c_1} i_{dl} B_q + \frac{c_{dq}}{c_2} i_{dq} B_l - \frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} B_l B_q \right) 10^{-8} \text{ Dez.-Megad.} \quad (19)$$

Für die Erregerwicklung des Generators, die die gleiche Achse hat wie die Dämpfer-Längswicklung, gilt, wie für diese, die erste Gleichung (10), nur ist die rechte Seite nicht gleich Null, sondern gleich der Erregerspannung. Wegen der verhältnismäßig hohen Impedanz erzeugt aber die Erregerwicklung im Vergleich zur Dämpfer-Längswicklung nur kleine Dämpfungsmomente und ihr Einfluß kann um so mehr außer acht gelassen werden, als die Pole bei den hier in Betracht kommenden Maschinen normalerweise massiv sind. Wir werden daher den Erregerstrom des Generators i_m als unabhängig von der Pendelung, gleich dem in der Erregerwicklung im pendelfreien Zustand fließenden Gleichstrom i_{mg} annehmen. Nach den Gleichungen (5) und (9) ist

$$\left. \begin{aligned} B_l &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega} \frac{P_{max}}{w_a} 10^8 (\cos \Theta_m - \varepsilon_0 \sin \Theta_m \sin z t) \\ \text{und} \quad & \\ B_q &= -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega} \frac{P_{max}}{w_a} 10^8 (\sin \Theta_m + \varepsilon_0 \cos \Theta_m \sin z t). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Führt man diese Gleichungen und die Gleichungen (11) und (12) für i_{dl} und i_{dq} in die Gleichung (19) für D ein, vernachlässigt die Glieder, die ε_0^2, ε^2 und ε^3 proportional sind, und ordnet die übrigen Glieder nach dem Pendelausschlag ε und der Pendelgeschwindigkeit $\frac{d\varepsilon}{dt}$, so ergibt sich:

a) Das Arbeitsmoment. Die Glieder

$$\frac{c_m}{c_1} i_{mg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega} \frac{P_{max}}{w_a} \sin \Theta_m + \frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega} \frac{P_{max}}{w_a} \right)^2 \frac{1}{2} \sin 2 \Theta_m$$

sind von der Pendelung der Maschine unabhängig und stellen das mittlere Arbeitsmoment für pendelfreien Lauf dar. Das zweite Glied tritt nur dann auf, wenn die magnetischen Leitfähigkeiten der Längs- und der Querachse verschieden sind.

b) Das synchronisierende Moment. Die Glieder

$$\frac{c_m}{c_1} i_{mg} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega} \frac{P_{max}}{w_a} \cos \Theta_m \cdot \varepsilon + \frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega} \frac{P_{max}}{w_a} \right)^2 \cos 2 \Theta_m \cdot \varepsilon +$$
$$+ \frac{c_{dl}}{c_1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega^2} \frac{P^2_{max}}{w^2_a} w_{dl} \frac{z S_{dl}}{r^2_{dl} + (z S_{dl})^2} z \sin^2 \Theta_m \cdot \varepsilon +$$
$$+ \frac{c_{dq}}{c_2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega^2} \frac{P^2_{max}}{w^2_a} w_{dq} \frac{z S_{dq}}{r^2_{dq} + (z S_{dq})^2} z \cos^2 \Theta_m \cdot \varepsilon$$

stellen das synchronisierende Moment der Maschine dar. Die ersten zwei Glieder entsprechen den beiden Gliedern unter a) und stellen (abgesehen vom Faktor ε) die Differentialquotienten dieser Glieder nach Θ dar. Das dritte und vierte Glied sind durch das Vorhandensein der Dämpferwicklung bedingt und zwar durch deren Streuung. Ist die Streuung der Dämpferwicklung = 0, so verschwinden diese zwei Glieder, sonst unterstützen sie die Wirkung der ersten zwei. Die Streuung der Dämpferwicklung verkleinert die Dämpfung, so daß durch den Einfluß der Streuung der Dämpferwicklung quasi ein Teil des Dämpfungsmomentes auf das synchronisierende Moment übertragen wird (vgl. Boucherot, oben erw. Aufsatz).

Das erste von den vier Gliedern ist das größte. Das dritte Glied (proportional $\sin^2 \Theta_m$) wird vom Strome i_{dl} (Längsfeldstrom) mit dem Querfeld B_q (beide proportional $\sin \Theta_m$) und das vierte Glied — vom Strome i_{dq} (Querfeldstrom) mit dem Längsfeld B_l (beide proportional $\cos \Theta_m$) erzeugt. Normalerweise ist das vierte Glied viel größer als das dritte.

Der Vergrößerung der synchronisierenden Kraft durch den Einfluß der Streuung der Dämpferwicklung entspricht eine Vergrößerung der Eigenfrequenz der Maschine [1]).

c) Das Dämpfungsmoment D_d. Dieses ist durch die zwei Glieder

$$D_d = \frac{c_{dl}}{c_1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega^2} \frac{P^2_{max}}{w^2_a} w_{dl} \frac{r_{dl}}{r^2_{dl} + (z S_{dl})^2} \sin^2 \Theta_m \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} +$$
$$+ \frac{c_{dq}}{c_2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau l_i} \frac{1}{\omega^2} \frac{P^2_{max}}{w^2_a} w_{dq} \frac{r_{dq}}{r^2_{dq} + (z S_{dq})^2} \cos^2 \Theta_m \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad (21)$$

dargestellt.

Das erste Glied wird vom Längsfeldstrome i_{dl} mit dem Querfeld B_q, das zweite vom Querfeldstrome i_{dq} mit dem Längsfeld B_l erzeugt.

Das zweite Glied ist bedeutend größer als das erste. Den Hauptteil des Längsfeldes bildet das Magnetfeld, während die Anteile der Anker- und der Dämpferwicklung an dem Längsfeld viel kleiner sind als der des Magnetfeldes. Dementsprechend wird der Hauptteil des Dämpfungsmomentes einer Käfigwicklung vom Querfeldstrom mit dem Magnetfeld gebildet.

Wie wir weiter unten sehen werden, ist das verhältnismäßig kleine Dämpfungsmoment bei der Einzelpoldämpfung, wo die Dämpferstäbe nicht der ganzen Maschine, sondern jedes Poles einzeln miteinander verbunden werden, eben auf den kleineren Querfeldstrom infolge schlechterer Ausnutzung des Querfeldes zurückzuführen.

Die beiden das Dämpfungsmoment bildenden Glieder haben stets gleiches Vorzeichen. Wir zählten als positiv das Moment, das den Anker in der Drehrichtung des Magnetsystemes mitzunehmen sucht. Ist $\frac{d\varepsilon}{dt}$ positiv, d. h. strebt das Magnetrad, den Winkel Θ zu vergrößern, so ist das Dämpfungsmoment auch positiv und die Dämpferwicklung sucht diesen Winkel wieder zu verkleinern. Die Dämpferwicklung wirkt in diesem Falle bremsend. Ist $\frac{d\varepsilon}{dt}$ negativ, so wirkt die Dämpferwicklung antreibend.

[1]) Diese Erscheinung wird in einem späteren Aufsatz ausführlicher behandelt werden.



Die obige Gleichung für das Drehmoment der Dämpferwicklung ist entstanden aus der Gleichung (19) durch Multiplikation der Größen B_l, B_q, i_{dl} und i_{dq} miteinander. Da i_{dl} und i_{dq} mit Hilfe der Gleichungen für B_l und B_q abgeleitet sind und diese letzteren allgemein für jede Mehrphasenmaschine gelten, folgt daraus, daß auch die Gleichung (21) für das Drehmoment der Dämpferwicklung nicht nur für die Dreiphasenmaschine, sondern allgemein für jede Mehrphasenmaschine gilt.

Es sind noch die in der Gleichung (21) vorkommenden effektiven Windungszahlen w_{dl} und w_{dq} und die Verhältnisse $\frac{c_{dl}}{c_1}$ und $\frac{c_{dq}}{c_2}$ zu bestimmen.

Die effektiven Windungszahlen w_{dl} und w_{dq} und die Verhältnisse $\frac{c_{dl}}{c_1}$ und $\frac{c_{dq}}{c_2}$. Bei der Berechnung des Längsfeldstromes setzten wir für die vom resultierenden Längsfelde in der Längswicklung induzierte EMK

$$10^8 e_{dl} = -w_{dl}\frac{d\Phi}{dt} = -w_{dl}\frac{2}{\pi}\tau l_i \frac{dB_l}{dt} \text{ Volt.}$$

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Zahl der Dämpferstäbe pro Pol gerade ist, also $N = 2m$. Bezeichnen wir die symmetrisch zur Polmitte gelegenen Stäbe fortlaufend mit 1. 2 ... n ..... m (Bild 3a) und mit a den Abstand zwischen je 2 Stäben in cm, so ist die vom resultierenden Längsfelde in der zur Polmitte symmetrisch gelegenen n-ten Masche induzierte EMK

$$10^8 e_{ndl} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{\frac{\tau-(2n-1)a}{2}}^{\tau-\frac{\tau-(2n-1)a}{2}} l_i B_l \sin\frac{\xi}{\tau}\pi\, d\xi = -l_i \int\limits_{\frac{\tau-(2n-1)a}{2}}^{\tau-\frac{\tau-(2n-1)a}{2}} \sin\frac{\xi}{\tau}\pi\, d\xi \cdot \frac{dB_l}{dt}$$

$$= l_i \frac{dB_l}{dt}\, 2\frac{\tau}{\pi}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{a}{\tau}\pi$$

Bild 3.

und für die ganze Längswicklung

$$10^8 e_{dl} = e_1 + e_2 + \ldots . e_n + \ldots . e_m =$$

$$-\frac{2}{\pi}\tau l_i \frac{dB_l}{dt}\sum_{n=1}^{n=m}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{a}{\tau}\pi \cdot 2p$$

$$= -\frac{2}{\pi}\tau l_i \frac{dB_l}{dt}\,\frac{\sin^2\frac{m}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}\cdot 2p,$$

somit durch Vergleich mit der obigen Gleichung für e_{dl}

$$w_{dl} = 2p\,\frac{\sin^2\frac{m}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi} = 2p\,\frac{\sin^2\frac{N}{4}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}. \qquad (22)$$

Ist N eine ungerade Zahl, $N = 2m + 1$, so ist, wenn wir den in der Polmitte gelegenen Stab mit dem Index o bezeichnen, die in der n-ten Masche der Längswicklung induzierte EMK gleich

$$10^8 e_{ndl} = -l_i\frac{dB_l}{dt}\int\limits_{\frac{\tau-2na}{2}}^{\tau-\frac{\tau-2na}{2}} \sin\frac{\xi}{\tau}\pi\, d\xi = -\frac{2}{\pi}\tau l_i \frac{dB_l}{dt}\sin n\frac{a}{\tau}\pi$$

und

$$w_{dl} = 2\,p \sum_{n=1}^{n=m} \sin n \frac{a}{\tau} \pi = 2\,p \frac{\sin \frac{m}{2} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \sin \frac{m+1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}$$

$$w_{dl} = 2\,p \frac{\sin \frac{N-1}{4} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \sin \frac{N+1}{4} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}. \tag{23}$$

Die Formel (23) muß für $N = 3$ den gleichen Wert ergeben, wie die Formel (22) für $N = 2$.

Für die Querwicklung mit $N = 2\,m$ wird nach Bild 3b

$$10^8 e_{ndq} = -l_i \frac{d\,B_l}{dt} \int_{-\frac{\tau-(2n-1)a}{2}}^{\frac{\tau-(2n-1)a}{2}} \cos \frac{\xi}{\tau} \pi\, d\,\xi = -l_i \frac{d\,B_q}{dt}\, 2 \frac{\tau}{\pi} \cos \frac{2\,n-1}{2} \frac{a}{\tau} \pi$$

und

$$w_{dq} = 2\,p \sum_{n=1}^{n=m} \cos \frac{2\,n-1}{2} \frac{a}{\tau} \pi = 2\,p \frac{\sin m \frac{a}{\tau} \pi}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}$$

$$w_{dq} = 2\,p \frac{\sin \frac{N}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}. \tag{24}$$

Ist $N = 2\,m + 1$, so gehört der in der Polmitte liegende 0-te Stab gleichzeitig zweien Wicklungselementen der Querwicklung und wird derart induziert, daß die Ströme dieser beiden Wicklungselemente sich in ihm addieren. Wollten wir also diesen 0-ten Stab bei beiden Wicklungselementen mitzählen, so würde das bedeuten, daß in ihm mehr als der doppelte Strom des nächstliegenden Stabes und nach unserer Rechnungsweise der doppelte mittlere Strom fließt. Dies ist aber in der Tat nicht der Fall. Wir werden daher die effektive Windungszahl für diesen Fall derart rechnen, daß wir einen Mittelwert aus den effektiven Windungszahlen mit und ohne diesen Stab bilden werden, d. h. den 0-ten Stab nur bei einem der zwei Wicklungselemente zählen. Demnach

$$\frac{\tau}{\pi} w_{dq} = p \sum_{0}^{m} \int_{-\frac{\tau-2na}{2}}^{\frac{\tau-2na}{2}} \cos \frac{\xi}{\tau} \pi\, d\,\xi + p \sum_{1}^{m} \int_{-\frac{\tau-2na}{2}}^{\frac{\tau-2na}{2}} \cos \frac{\xi}{\tau} \pi\, d\,\xi$$

$$w_{dq} = p \sum_{n=0}^{n=m} \cos n \frac{a}{\tau} \pi + p \sum_{n=1}^{n=m} \cos n \frac{a}{\tau} \pi$$

$$= p \frac{\cos \frac{m}{2} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \sin \frac{m+1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi} + p \frac{\sin \frac{m}{2} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \cos \frac{m+1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}$$

$$w_{dq} = 2\,p\,\frac{\sin\frac{2\,m+1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{2\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi} = 2\,p\,\frac{\sin\frac{N}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{2\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}$$

und dies ist die gleiche Beziehung wie für $N = 2\,m$.

Wir setzten in unseren Rechnungen die Sättigung als klein voraus und rechneten mit sinusförmigen Feldern. Es entsteht dabei die Frage, ob eine Sinuskurve von gleichem Flächeninhalt wie die wirkliche oder ob die Grundwelle zu nehmen ist. Bei dem Magnetfeld wird es richtiger sein, mit der Sinuskurve gleichen Flächeninhaltes zu rechnen, weil diese sich der wirklichen Kurve besser anschmiegt. Bei dem Ankerfeld ist dagegen mit der Grundwelle zu rechnen, weil hier die Oberfelder, soweit sie nicht verschwinden, sich relativ zum Magnetsystem bewegen und durch die Wirbelströme stark gedämpft werden. Das gleiche gilt auch von den Feldern der Dämpferwicklung, die ja auch eine Mehrphasenwicklung ist. Bei der Bestimmung der Konstanten c_1, c_{dl}, c_2 und c_{dq} werden wir daher die Grundwellen der MMK-Kurven in Betracht ziehen und von den Feldern, die diese erzeugen, nur die Grundwellen berücksichtigen.

Wir beginnen wieder mit der Längswicklung, nehmen zunächst $N = 2\,m$ an und entnehmen dem Bild 3a als Amplitude der Grundwelle der MMK-Kurve für die aus den beiden n-ten Stäben gebildete Masche

$$\frac{2}{\tau}\int_0^\tau f(\xi)\sin\frac{\xi}{\tau}\pi\,d\xi = i_{dl}\,\frac{2}{\tau}\int_{\frac{\tau-(2n-1)a}{2}}^{\tau-\frac{\tau-(2n-1)a}{2}}\sin\frac{\xi}{\tau}\pi\,d\xi$$

$$= i_{dl}\,\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{2\,n-1}{2}\right)\frac{a}{\tau}\pi$$

und für alle m-Maschen

$$A\,W_{dl} = i_{dl}\,\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{n=m}\sin\frac{2\,n-1}{2}\frac{a}{\tau}\pi = i_{dl}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin^2\frac{m}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}.$$

Das ist die Amplitude der Grundwelle der MMK-Kurve der Längswicklung pro Pol. Für alle 2p Pole wird nach Gleichung (22)

$$2\,p\,\frac{4}{\pi}\,i_{dl}\,\frac{\sin^2\frac{m}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin\frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi} = \frac{4}{\pi}\,i_{dl}\,w_{dl},$$

wie es zu erwarten war, da wir auch dort mit einem Sinusfelde gerechnet haben.

Das Feld, das von dieser Grundwelle der MMK-Kurve erzeugt wird, ist nicht sinusförmig wegen der Pollücken, wo das Feld sehr stark abfällt. Die Amplitude der Grundwelle dieses Feldes setzten wir gleich $c_{dl}\,i_{dl}$. Es muß demnach gelten

$$c_{dl} = k_1\,\frac{4}{\pi}\,w_{dl},$$

wo der Faktor k_1 den Widerstand aller p magnetischen Kreise und auch den Abfall der Feldkurve an den Polspitzen berücksichtigt.

In gleicher Weise gilt für den Faktor c_1

$$c_1 = k_1 \frac{4}{\pi} w_a,$$

wo w_a die effektive Windungszahl einer Ankerphase ist. Somit

$$\frac{c_{dl}}{c_1} = \frac{w_{dl}}{w_a}. \tag{25}$$

Ist $N = 2m + 1$, so gilt für die Amplitude der Grundwelle der MMK-Kurve der aus den beiden n-ten Stäben der Längswicklung gebildeten Masche

$$\frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(\xi) \sin \frac{\xi}{\tau} \pi \, d\xi = i_{dl} \frac{2}{\tau} \int_{\frac{\tau - 2na}{2}}^{\tau - \frac{\tau - 2na}{2}} \sin \frac{\xi}{\tau} \pi \, d\xi$$

und dies führt für die ganze Längswicklung wieder zu $\frac{4}{\pi} i_{dl} w_{dl}$, so daß die Formel (25) ihre Gültigkeit behält.

Für die Querwicklung mit $N = 2m$ folgt nach Bild 3b für die aus den beiden n-ten Stäben gebildete Masche dieser Wicklung

$$\frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(\xi) \cos \frac{\xi}{\tau} \pi \, d\xi = i_{dq} \frac{2}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau - (2n-1)a}{2}} \cos \frac{\xi}{\tau} \pi \, d\xi - \int_{\tau - \frac{\tau - (2n-1)a}{2}}^{\tau} \cos \frac{\xi}{\tau} \pi \, d\xi \right]$$

$$= i_{dq} \frac{4}{\pi} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{a}{\tau} \pi$$

und für die Amplitude der Grundwelle der MMK-Kurve der gesamten Querwicklung

$$2p \frac{4}{\pi} i_{dq} \sum_{n=1}^{n=m} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{a}{\tau} \pi = 2p \frac{4}{\pi} i_{dq} \frac{\sin m \frac{a}{\tau} \pi}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}$$

$$= \frac{4}{\pi} i_{dq} w_{dq}.$$

Die Amplitude der Grundwelle des dieser MMK-Kurve entsprechenden Feldes setzten wir gleich $c_{dq} i_{dq}$. Demnach ist

$$c_{dq} = k_2 \frac{4}{\pi} w_{dq},$$

wo k_2 den Widerstand aller p magnetischen Kreise in der Querachse und auch die Einsattelung der Feldkurve in der Pollücke berücksichtigt.

Für die Ankerwicklung in der Querachse gilt

$$c_2 = k_2 \frac{4}{\pi} w_a,$$

somit

$$\frac{c_{dq}}{c_2} = \frac{w_{dq}}{w_a}. \tag{26}$$

Ist $N = 2m + 1$, so zählen wir wieder den in der Polmitte liegenden Stab nur einem der beiden Wicklungselemente, die er begrenzt, zu und die Formel (26) behält ihre Gültigkeit.

Das Dämpfungsmoment des Dämpferkäfigs. Führen wir die Beziehungen Gleichung (25) und (26) in die Gleichung (21) ein, so erhalten wir für das Dämpfungsmoment eines Dämpferkäfigs

$$D_d = p \frac{P^2_{max}}{w^2_R} \frac{1}{\omega^2} \left[w^2_{dl} \frac{r_{dl}}{r^2_{dl} + (z S_{dl})^2} \sin^2 \Theta_m + w^2_{dq} \frac{r_{dq}}{r^2_{dq} + (z S_{dq})^2} \cos^2 \Theta_m \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ Dez.-Meg.} \quad (27)$$

Wir wollen eine Korrektur anbringen, die die oben vernachlässigten Ohm schen Widerstand und Streuung der Ankerwicklung berücksichtigt.

Die im Vergleich zur Netzperiodenzahl nur geringe Schwingungszahl der Pendelung gestattet, das Vektordiagramm der Maschine auch während dieser langsamen Schwingungen als gültig anzunehmen. Das Dämpfungsmoment Dd ist im Maximum, wennn $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ein Maximum ist, d. h. wenn das Polrad durch die normale Lage durchgeht, und diese Lage, für die gewöhnlich auch das Vektordiagramm der Maschine gezeichnet wird, ist zur Abschätzung des Fehlers zu nehmen.

Wir setzten die vom resultierenden Felde in der Ankerwicklung induzierte EMK gleich der Phasenspannung, also gleich dem Vektor OA im Diagramm Bild 2d. In der Tat ist aber diese induzierte EMK gleich dem Vektor OC. Es ist also ein Fehler sowohl in der für die Rechnung benutzten Größe des Vektors der EMK wie auch in der Größe des mittleren Winkels Θ_m vorhanden. Diese Fehler lassen sich nach dem Diagramm leicht korrigieren. In den meisten praktischen Fällen kann der Fehler im Winkel Θ_m außer acht gelassen werden, weil durch diesen der eine Teil des Dämpfungsmomentes verkleinert, der andere Teil dagegen vergrößert wird, und es ist nur eine Korrektion im Verhältnis der Größen $\frac{OC}{OA} = k$ bei den Strömen bzw. $\left(\frac{OC}{OA}\right)^2 = k^2$ bei den Drehmomenten anzubringen. Dieser Korrektionsfaktor k ist größer als 1, falls die Maschine als Generator mit nacheilendem oder als Motor mit voreilendem Strom arbeitet, und kleiner als 1, falls die Maschine als Generator mit voreilendem oder als Motor mit nacheilendem Strom arbeitet. Die Notwendigkeit der Korrektion soll durch den Faktor k angedeutet werden.

In der Gleichung für D_d bedeuten w_{dl} und w_{dq} die effektiven Windungszahlen aller 2p Pole, r_{dl}, r_{dq}, $z S_{dl}$ und $z S_{dq}$ die Widerstände bzw. Reaktanzen der ganzen Wicklungen. Wie wir später sehen werden, ist $z S_{dl}$ gegenüber r_{dl} klein, wir können es daher außer acht lassen.

Es bezeichne Z die effektive Stabzahl pro Pol, also für die Längswicklung

$$\begin{aligned} Z_l &= N, \text{ wenn N eine gerade Zahl,} \\ Z_l &= N - 1, \text{ wenn N eine ungerade Zahl,} \end{aligned} \quad (28a)$$

für die Querwicklung

$$Z_q = N \text{ sowohl bei geradzahligem wie bei ungeradzahligem N.} \quad (28b)$$

Es bezeichne weiter:

R_l den mittleren Widerstand einer halben Windung der Längswicklung,
R_q den mittleren Widerstand einer halben Windung der Querwicklung,
zS die Streureaktanz eines Dämpferstabes der Querwicklung,
w_l die effektive Windungszahl der Längswicklung pro Pol,
w_q die effektive Windungszahl der Querwicklung pro Pol,

so wird

$$\left.\begin{aligned} r_{dl} &= 2 p Z_l R_l \\ r_{dq} &= 2 p Z_q R_q \\ w_{dl} &= 2 p w_l \\ w_{dq} &= 2 p w_q \end{aligned}\right\} S_{dq} = 2 p Z_q S \quad (29)$$

und

$$D_d = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{1}{c} p \frac{1}{\frac{\omega}{p}} \left[\frac{1}{R_l} \left(\frac{1}{Z_l} w_l^2 \right) \sin^2 \Theta_m + \frac{R_q}{R_q^2 + (z S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2 \right) \cos^2 \Theta_m \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ Dez.-Megad.,} \quad (30)$$

wo $c = \frac{\omega}{2\pi}$ die Periodenzahl der Maschine und P die effektive Phasenspannung ist.

Da $\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_0 z \cos z t$ ist, so ist das Maximum des Drehmomentes

$$D_{d\,max} = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} p \frac{1}{\frac{\omega}{p}} \left[\frac{1}{R_l} \left(\frac{1}{Z_l} w_l^2 \right) \sin^2 \Theta_m + \frac{R_q}{R_q^2 + (z S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2 \right) \cos^2 \Theta_m \right] \varepsilon_0 \text{ Dez.-Med.} \quad (31)$$

Die Leistung der Dämpferwicklung finden wir mit genügender Annäherung, wenn wir ihr Drehmoment mit der mittleren räumlichen Winkelgeschwindigkeit $\frac{\omega}{p}$ der Maschine multiplizieren. Es ist somit die Leistung einer Käfigwicklung

$$L_d = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{1}{c} p \left[\frac{1}{R_l} \left(\frac{1}{Z_l} w_l^2 \right) \sin^2 \Theta_m + \frac{R_q}{R_q^2 + (z S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2 \right) \cos^2 \Theta_m \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ Watt} \quad (32)$$

und das Maximum der Leistung einer Käfigwicklung

$$L_{d\,max} = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} p \left[\frac{1}{R_l} \left(\frac{1}{Z_l} w_l^2 \right) \sin^2 \Theta_m + \frac{R_q}{R_q^2 + (z S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2 \right) \cos^2 \Theta_m \right] \varepsilon_0 \text{ Watt.} \quad (33)$$

Die effektiven Stabzahlen pro Pol Z_l und Z_q sind der Gleichung (28a) und (28b) zu entnehmen.

Die effektiven Windungszahlen pro Pol sind nach den Gleichungen (22) bis (24) für die Längswicklung

$$w_l = \frac{\sin^2 \frac{N}{4} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin {}^1\!/_2 \frac{a}{\tau} \pi}, \text{ wenn N eine gerade Zahl}$$

$$w_l = \frac{\sin \frac{N-1}{4} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \sin \frac{N+1}{4} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin {}^1\!/_2 \frac{a}{\tau} \pi}, \text{ wenn N eine ungerade Zahl,} \quad (34)$$

und für die Querwicklung sowohl bei geradzahligem wie ungeradzahligem N

$$w_q = \frac{\sin \frac{N}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{2 \sin {}^1\!/_2 \frac{a}{\tau} \pi}. \quad (35)$$

Bezeichnet l_p die Polschuhlänge in cm, q_s den Querschnitt eines Dämpferstabes und q_r den Ringquerschnitt in mm², so können wir für die kalten Widerstände setzen

$$R_l = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{l_p}{q_s} + \frac{\tau}{3 q_r} \right) \cdot 10^{-2} \text{ Ohm}$$

$$R_q = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{l_p}{q_s} + \frac{2\tau}{3 q_r} \right) \cdot 10^{-2} \text{ Ohm,} \quad (36)$$

wo λ die Leitfähigkeit des Stabmaterials bedeutet. Für das Dämpfungsmoment sind die warmen Widerstände maßgebend.

Mit den neu eingeführten Bezeichnungen sind nach den Gleichungen (13) und (14) die vom Längs- bzw. Querfeld herrührenden Ströme

$$i_{dl} = k \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} P \frac{w_l}{w_a} \frac{z}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{Z_l R_l} \sin \Theta_m \cos zt, \tag{37a}$$

$$i_{dq} = k \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} P \frac{w_q}{w_a} \frac{z}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{Z_q \sqrt{R_q^2 + (z\,S)^2}} \cos \Theta_m \cos \left(zt - \operatorname{arctg} \frac{z\,S}{R_q}\right) \tag{37b}$$

und deren Maximalwerte

$$J_{dl\,max} = k \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} P \frac{w_l}{w_a} \frac{z}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{Z_l R_l} \sin \Theta_m \text{ Amp.} \tag{38a}$$

$$J_{dq\,max} = k \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} P \frac{w_q}{w_a} \frac{z}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{Z_q \sqrt{R_q^2 + (z\,S)^2}} \cos \Theta_m \text{ Amp.} \tag{38b}$$

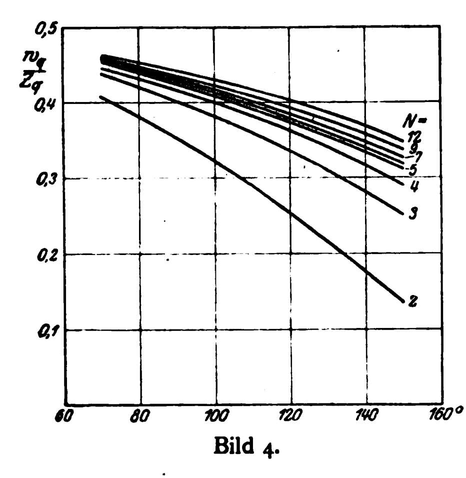


Bild 4.

Die Werte $\frac{w_q}{Z_q}$ sind in Bild 4 für verschiedene Stabzahlen in Abhängigkeit von der gesamten Wicklungsbreite, von der Polmitte nach beiden Seiten hin gemessen, dargestellt. Wie wir sehen, ist $\frac{w_q}{Z_q}$ für die praktischen Fälle nur wenig von der Stabzahl ebenso wie von der gesamten Wicklungsbreite abhängig.

In vielen Fällen und insbesondere für überschlägige Rechnungen kann man für das Drehmoment bzw. für die Leistung der Dämpferwicklung mit genügender Genauigkeit setzen:

$$D_d = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{1}{c}\, p \frac{1}{\frac{\omega}{p}} \frac{R_q}{R_q^2 + (z\,S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2\right) \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ Dez.-Megad.} \tag{39}$$

und

$$L_d = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{1}{c}\, p \frac{R_q}{R_q^2 + (z\,S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2\right) \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ Watt} \tag{40}$$

und für deren Maximalwerte

$$D_{d\,max} = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} \varepsilon_0\, p \frac{1}{\frac{\omega}{p}} \frac{R_q}{R_q^2 + (z\,S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2\right) \text{Dezimeter-Megadynen} \tag{41}$$

und

$$L_{d\,max} = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} \varepsilon_0\, p \frac{R_q}{R_q^2 + (z\,S)^2} \left(\frac{1}{Z_q} w_q^2\right) \text{ Watt.} \tag{42}$$

Dies setzt voraus, daß die Längswicklung und die Querwicklung in jeder Beziehung einander gleich sind, eine Voraussetzung, die z. B. für die Asynchronmaschine mit Kurzschlußrotor zutrifft.

Es entsteht die Frage, ob die Gleichungen (41) und (42) (für diese allein ist der Vergleich möglich) auch auf die Asynchronmaschine mit Kurzschlußrotor anwendbar sind. Diese Frage ist zu bejahen, wenn in diesen Gleichungen $\varepsilon_0 = 1$ gesetzt

wird [1]). Und umgekehrt ergibt das asynchrone Moment des Dämpferkäfigs für eine Schlüpfung $\frac{z}{2\pi c}$, mit der in Betracht kommenden Amplitude des Pendelausschlages ε_0 (in Bogeneinheiten gemessen) multipliziert, angenähert das maximale Dämpfungsmoment für die Kreisfrequenz der Pendelung z und die Amplitude des Pendelausschlages ε_0.

Wie wir später sehen werden, bietet die Berechnung der Streureaktanz z S bei der Dämpferwicklung gewöhnlich einige Schwierigkeiten, was bei dem Kurzschlußrotor der Asynchronmaschine nicht der Fall ist.

Der Winkel Θ_m tritt in den Gleichungen (39) bis (42) nicht auf, sie sind also vom Belastungszustande der Maschine unabhängig.

An die Gleichung (41) läßt sich noch folgendes anknüpfen:

Das absolute Maximum des Dämpfungsmomentes bzw. der Dämpferleistung tritt auf bei

$$R_q = z\,S. \tag{43}$$

Bei gegebener Gattung der Antriebsmaschine ist das hauptsächlich in Betracht kommende z gegeben. Ist S von der Sättigung des Polschuhes und somit von R_q unabhängig, wie es der Fall ist, wenn die Dämpferstäbe ganz nahe der Polschuhoberfläche liegen oder wenn die Dämpfernuten offen sind, so ist durch die Beziehung (43) der günstigste Stabquerschnitt gegeben. Durch Vergrößerung des Stabquerschnittes über diesen hinaus wird die Dämpfung verkleinert. Bei einem unendlich großen Querschnitt ($R_q = 0$) wäre das Dämpfungsmoment Null. Wie wir aber sehen

---

[1]) Zum Vergleich benutzen wir den in der „Wechselstromtechnik" von Arnold und La Cour, Bd. V_1, S. 365 und ff. angeführten Motor mit Kurzschlußrotor und berechnen sein „Drehmoment in synchronen Watt" einerseits nach der dort auf Seite 69 angegebenen Formel, andererseits nach unserer Gleichung (42).

Es ist für diesen Motor

$$m_1 = 3 \qquad r_1 = 0{,}129 \qquad x_1 = 0{,}605$$
$$P_1 = \frac{500}{\sqrt{3}} \qquad r_2' = 0{,}242 \qquad x_2' = 0{,}462 \qquad C_1 = 1{,}04.$$

Für eine Schlüpfung $s = 0{,}05$ wird somit nach Arnold-la Cour

$$W_a = \frac{3 \cdot 289^2 \cdot \frac{0{,}242}{0{,}05}}{\left(0{,}129 + 1{,}04\,\frac{0{,}242}{0{,}05}\right)^2 + (0{,}605 + 1{,}04 \cdot 0{,}462)^2} = 43{,}5 \text{ kW}.$$

Es ist weiter

$$k^2 = \frac{1}{1{,}067^2}, \qquad (J_1 = 57 \text{ Amp., } \cos\varphi = 0{,}9).$$

$$w_a = 0{,}96 \cdot 96 = 92{,}1, \qquad \frac{z}{\omega} = s = 0{,}05, \qquad z = 0{,}05 \cdot 314 = 15{,}7.$$

$$p = 4, \qquad Z_q = \frac{96}{8} = 12, \qquad \frac{w_q^2}{Z_q} = 1,$$

$$R = 1{,}15\left(12{,}7 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17{,}7}{120} \cdot \frac{1{,}16}{5800}\right) = 16{,}3 \cdot 10^{-5},$$
$$x_2 = 138{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 314 = 43{,}5 \cdot 10^{-5},$$
$$z\,S = s\,x_2 = 0{,}05 \cdot 43{,}5 \cdot 10^{-5} = 2{,}18 \cdot 10^{-5}$$

somit nach Gleichung (42)

$$L_{d\,max} = \frac{1}{1{,}067^2}\, 4 \cdot 289^2\, \frac{1}{92{,}1^2}\, 0{,}05 \cdot 4 \cdot 1\, \frac{16{,}3 \cdot 10^5}{16{,}3^2 + 2{,}18^2} = 41{,}8 \text{ kW}.$$

Die Übereinstimmung zwischen beiden Werten ist gut.

Unsere Rechnung mit Ersatzwicklungen führt zu gleichen Resultaten wie die Behandlung des Käfigs als Mehrphasenwicklung, hat aber den Vorteil, daß man durch sie den Einfluß der einzelnen Felder auf die Größe des Dämpfungsmomentes ebenso wie den Einfluß der Dämpferwicklung auf die Eigenfrequenz der Maschine erkennt.

werden, ist meistens infolge des Einflusses der Sättigung S von R_q abhängig, so daß die Bestimmung des günstigsten Stabquerschnittes nicht so einfach sein wird.

Aus der Gleichung (41) folgt noch, daß, wenn bei einer ausgeführten Maschine Schwingungen verschiedener Kreisfrequenz auftreten, das absolute Maximum des Dämpfungsmomentes bei $z = \frac{R_q}{S}$ vorhanden sein wird und mit über diese hinaus zunehmender Kreisfrequenz das Dämpfungsmoment wider Erwarten abnehmen und nicht zunehmen wird.

Die Streureaktanz zS. Über diese ist folgendes zu bemerken. Die Dämpferstäbe, selten mehr als 8 bis 10 pro Pol, werden im Polschuheisen gebettet. Offene Dämpfernuten werden gemieden, weil sich sonst der Einfluß der Dämpfernuten auf die Feldkurve zu sehr bemerkbar macht. Die Dämpferstäbe müssen aber so nahe wie möglich an die Polschuhoberfläche gelegt werden, weil bei größerer Stegdicke einerseits ein großer Teil des Querflusses durch den Steg verläuft und mit den Dämpferstäben gar nicht verkettet ist, andererseits die Streureaktanz der Dämpferwicklung so groß wird, daß ihre Wirkung sehr stark beeinträchtigt wird. (Siehe Berechnungsbeispiel.) Dies gilt besonders für Motoren und Einankerumformer mit Selbstanlauf, wo die Dämpferwicklung größere Anlaufmomente zu erzeugen hat.

Mit der kleineren Stegdicke ist jedoch besonders bei Maschinen mit großem Verhältnis der Vollast AW zu den Leerlauf AW, also bei Maschinen mit verhältnismäßig kleinem Luftspalt, die Schwierigkeit verbunden, daß durch die von den Ankernuten herrührenden Pulsationen der Flüsse, die die von den Dämpferstäben gebildeten Maschen durchsetzen, in den Dämpferstäben Ströme hoher Periodenzahl induziert werden, welche zu großen zusätzlichen Verlusten und übermäßiger Erwärmung des Dämpferkupfers und des Polschuheisens führen können.

Diese Ströme hoher Periodenzahl lassen sich vermeiden entweder dadurch, daß man die Pulsationen selbst vermeidet, indem man den Anker mit geschlossenen Nuten und entsprechend starkem Steg ausführt, oder dadurch, daß man die Kraftflußvariationen durch die Maschen gleich Null macht, indem man bei gerade gestellten Polschuhen den Abstand der Dämpferstäbe voneinander gleich der Anker-Nutenteilung bzw. bei schräggestellten Polschuhen die Schrägstellung gleich der Nutenteilung und den Abstand der Dämpferstäbe beliebig macht[1]).

Führt man den Anker mit geschlossenen Nuten aus, so muß man mit einer Erhöhung der Ankerstreuung, Verzerrung der Spannungskurve und auch mit einer Verteuerung der Fabrikation rechnen. Wird bei gerade gestellten Polschuhen der Abstand der Dämpferstäbe gleich der Nutenteilung des Ankers gemacht, so wird der Anlauf, wegen welchem man die Dämpferstäbe nahe der Polschuhoberfläche gelegt hat, erschwert, weil sich sogenannte tote Punkte herausbilden, wie es von der Asynchronmaschine her bekannt ist. Nach Bache-Wiig[2]) soll allerdings schon eine Verschiedenheit der beiden Nutenteilungen von 10—15% genügen, um die letzten Schwierigkeiten zu vermeiden. Man wird sich also in solchen Fällen mit dem einen oder anderen Übel abfinden müssen.

In jedem Falle wird man aber bei der Dämpferwicklung, besonders wenn die Kreisfrequenz z groß ist, mit einer im Vergleich zum Ohmschen Widerstand beträchtlichen Streureaktanz zu rechnen haben, weil die Dämpferstäbe rings herum von Eisen umgeben sind.

Wir haben in unseren Rechnungen den Streukoeffizienten S als konstant angenommen, d. h. wir haben die Permeabilität als konstant vorausgesetzt. Bei kleinerer Stegdicke (bis etwa 0,5 mm) trifft diese Voraussetzung beinahe zu. Bei

[1]) K. Schmidt, Anordnung der Dämpferstäbe bei elektr. Maschinen. ETZ. 1915, S. 187.
[2]) J. Bache-Wiig, ETZ. 1915, S. 362.

größerer Stegdicke entsteht die Frage, welcher Wert der Permeabilität maßgebend ist, oder, was dasselbe, wie man die Größe S unter Berücksichtigung der Sättigung bestimmt. Die folgenden Überlegungen werden uns gewisse Anhaltspunkte dafür geben.

Wir greifen auf die Gleichungen (10) bis (12) zurück. Die in der Gleichung (27) für das Dämpfungsmoment auftretenden Größen

$$\frac{r_{dl}}{r_{dl}^2 + (z\,S_{dl})^2} \quad \text{und} \quad \frac{r_{dq}}{r_{dq}^2 + (z\,S_{dq})^2}$$

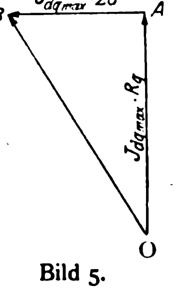


Bild 5.

rühren von den Gleichungen (11) bzw. (12) her. Die erste von diesen Größen ist nichts anderes als

$$\frac{1}{\sqrt{r_{dl}^2 + (z\,S_{dl})^2}} \cos \operatorname{arctg} \frac{z\,S_{dl}}{r_{dl}}$$

und die zweite

$$\frac{1}{\sqrt{r_{dq}^2 + (z\,S_{dq})^2}} \cos \operatorname{arctg} \frac{z\,S_{dq}}{r_{dq}}.$$

Wir brauchen also hier nur die Gleichungen (10), die sich auf die Ströme in der Dämpferwicklung beziehen, zu betrachten.

Wir fassen zunächst die zweite Gleichung (10), also die Querwicklung ins Auge und lassen das Glied mit $\sin 2zt$ außer acht. Wenn zunächst S als Konstante betrachtet wird, so haben wir mit einem ganz gewöhnlichen Wechselstromkreis zu tun, in welchem auf einen Widerstand und eine Selbstinduktion eine nach einer cos-Funktion der Zeit verlaufende EMK von konstanter Amplitude wirkt. In Bild 5 ist für diesen Fall das Spannungsdiagramm für die Amplituden aufgezeichnet. OB ist die Größe

$$k\,P_{max} \frac{w_{dq}}{w_a} \frac{z}{\omega} \varepsilon_0 \cos \Theta_m$$

dividiert durch die Stabzahl der Querwicklung, also

$$OB = k \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} P \frac{w_q}{w_a} \frac{z}{c} \varepsilon_0 \frac{1}{Z_q} \cos \Theta_m, \tag{44}$$

AB ist die Amplitude der Streu-EMK und OA die des Ohmschen Spannungsabfalles.

Dasselbe Diagramm wollen wir auch dann gelten lassen, wenn S nicht konstant ist, d. h. wir werden in diesem Falle mit einem äquivalenten Sinusstrom und einer äquivalenten Streureaktanz rechnen.

Bekannt sind aus diesem Diagramm nur die Größe von OB und der Widerstand R_q. Gelingt es, die Größe von AB zu bestimmen, so ist auch die Größe von OA und $J_{dq\,max}$ bekannt, und durch Division von AB durch $J_{dq\,max}$ erhalten wir angenähert die uns interessierende Größe zS.

Bei gegebenem R_q ist der größtmögliche Wert von $J_{dq\,max}$ gleich OB dividiert durch R_q, also

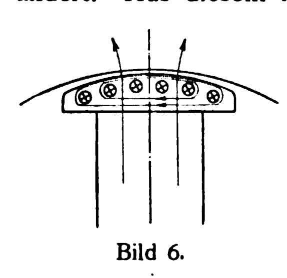
$$J'_{dq\,max} = k \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} P \frac{1}{w_a} \frac{z}{c} \varepsilon_0 \cos \Theta_m \left(\frac{w_q}{Z_q}\right) \frac{1}{R_q} \text{ Amp.} \tag{45}$$

Diese Größe erhält man auch direkt aus der Gleichung (38b), wenn man dort $zS = 0$ setzt.

Die Streuung der Querwicklung setzt sich zusammen aus der Luft- und der Eisenstreuung. Diese letztere ist meistens viel größer als die erste.

Im Bild 6 ist ein Pol einer vielpoligen Maschine mit 6 Dämpferstäben abgebildet. Für einen bestimmten Zeitmoment ist die Richtung der Ströme, wie sie vom Querfeld induziert werden, angedeutet. Alle Stäbe führen einen Strom von gleicher Richtung. Auch der Verlauf der Eisen-Streulinien und des Längsflusses ist angedeutet. Zwischen den zwei nahe der Polmitte gelegenen Stäben werden keine Streulinien vorhanden sein, weil die Streu-MMK hier Null ist. Es können sich Streulinien ausbilden, die zwei, vier oder alle sechs Stäbe umschlingen.

Der Längsfluß hat in den Stegen außer der Komponente in der Richtung der Polachse auch eine Komponente in der zur Polachse senkrechten Richtung, also in der Richtung des Streuflusses. Auf den Streufluß wird diese letztere Komponente nur wenig Einfluß haben, weil sie in jedem Steg nach zwei verschiedenen Richtungen verläuft und auch der Streufluß seine Richtung mit dem Strom in den Dämpferstäben ändert. Aus diesem letzteren Grunde werden auch Kraftlinien des Querflusses, die im Stege verlaufen, nur wenig Einfluß auf den Streufluß haben, weil der Querfluß in einem Pole bestimmter Polarität eine bestimmte unveränderliche Richtung hat. Der Einfluß des Längs- und des Querflusses auf den Streufluß ist dabei um so kleiner, je kleiner die Induktionen dieser Flüsse im Stege sind. Normalerweise sind diese Induktionen klein. Es folgt daraus, daß der Eisenstreufluß für sich, unabhängig vom Längs- und Querfluß der Maschine, behandelt werden kann.


Bild 6.

Sein Widerstand liegt hauptsächlich an der engsten Stelle des Steges, an den anderen Stellen stehen viel größere Querschnitte zur Verfügung. Als Magnetisierungsweg kann mit genügender Genauigkeit die doppelte Strecke zwischen der engsten Stelle des Steges und derjenigen, wo der Querschnitt den $1^1/_2$fachen Wert desjenigen an der engsten Stegstelle hat, angenommen werden.

Wir verfahren nun wie folgt. Auf Grund des Wertes von $J'_{dq\,max}$ nehmen wir einen bestimmten Wert für $J_{dq\,max}$ an und bestimmen mit diesem aus der Magnetisierungskurve die Streu-Induktion an der engsten Stegstelle. Damit ist der der Eisenstreuung entsprechende Teil von AB bekannt. Die Luftstreuung (Nut- und Zahnkopfstreuung) läßt sich nach den üblichen Methoden berechnen. Die Summe dieser beiden gibt uns einen Wert für AB. Wir berechnen damit

$$OA = \sqrt{OB^2 - AB^2}$$

und durch Division von OA mit R_q eine Größe für $J_{dq\,max}$. Stimmt diese letztere mit dem oben für $J_{dq\,max}$ angenommenen Wert überein, so ist

$$z\,S = \frac{AB}{J_{dq\,max}}$$

die gesuchte Größe der Streureaktanz, andernfalls muß für $J_{dq\,max}$ ein neuer Wert angenommen und mit diesem die ganze Rechnung nochmals durchgeführt werden.

Wir wollen diese Rechnungsweise an dem Beispiel des Bildes 6 erläutern. — Die Polschuhbreite beträgt 25 cm, die Polschuhlänge 27 cm, der Abstand der Dämpferstäbe von der Polschuhoberfläche 1 mm, ihr Durchmesser 16,5 mm. $R_q = 3{,}4 \cdot 10^{-5}$ Ohm und $OB = 1375 \cdot 10^{-5}$ Volt.

Es ist nun $J_{dq\,max} = \frac{1375 \cdot 10^{-5}}{3{,}4 \cdot 10^{-5}} = 405$ Amp. Nehmen wir vorläufig $J_{dq\,max} = 200$ Amp. an, so wird bei dem Magnetisierungsweg von 0,6 cm $AW/cm = \frac{200}{0{,}6} = 334$.

Dazu entnehmen wir der Magnetisierungskurve für Blech die Streuinduktion im Steg zu $B = 20200$. Die vom Eisenstreufluß induzierte EMK ist also

$$19{,}7 \cdot 20200 \cdot 27 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-8} = 1075 \cdot 10^{-5} \text{ Volt.}$$

Die von der Nutstreuung herrührende EMK ist hier[1])

$$200 \cdot 19{,}7 \cdot 27 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}623 \cdot 10^{-8} \text{ Volt} = 84 \cdot 10^{-5} \text{ Volt.}$$

Die Kopfstreuung kann hier wegen der verhältnismäßig kleinen Sättigung im Steg außer acht gelassen werden. Somit ist die gesamte Streu-EMK

$$AB = 1075 \cdot 10^{-5} + 84 \cdot 10^{-5} = 1159 \cdot 10^{-5} \text{ Volt.}$$

Daraus folgt

$$OA = 10^{-5} \sqrt{1375^2 - 1159^2}$$

und

$$J_{dq\,max} = \frac{743 \cdot 10^{-5}}{3{,}4 \cdot 10^{-5}} = 218 \text{ Amp.}$$

Führen wir die Rechnung nochmals mit $J_{dq\,max} = 215$ Amp. durch, so zeigt sich, daß dies der passende Wert für den Strom ist und die äquivalente Streureaktanz wird

$$zS = \frac{1170 \cdot 10^{-5}}{215} = 5{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm.}$$

Diese Größe von zS genügt dem Diagramm Bild 5, genügt also auch der Gleichung (12) und darf in die Gleichungen (30) bis (33) für das Dämpfungsmoment bzw. die Dämpferleistung eingeführt werden.

Bei gegebener Anordnung der Dämpferstäbe hängt die Streureaktanz zS von der Anzahl der Stäbe praktisch nur wenig ab (vgl. Bild 4), dagegen von der Anordnung der Stäbe selbst wegen der Eisenstreuung sehr stark. Macht man z. B. den Steg statt 1 mm 0,5 mm stark, so sinkt die Streureaktanz zS von $5{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ohm auf $2 \cdot 10^{-5}$ Ohm, nicht auf die Hälfte wegen des Anwachsens des Stromes. Aus dieser letzteren Ursache wird die Streureaktanz auch abnehmen, wenn der Stabquerschnitt vergrößert wird.

Für Stegdicken bis zu 0,5 mm kann man die Berechnung der Streureaktanz bedeutend vereinfachen, indem man die Stege als gesättigt annimmt und die Steginduktion etwa gleich 21000 Gauß setzt.

Wir haben bis jetzt die Streureaktanz der Querwicklung allein betrachtet. Gehen wir nun zur Längswicklung über, so ist zunächst klar, daß der vom Querstrom herrührende Eisenstreufluß auf die Längswicklung keinen Einfluß hat, weil bei dieser die Stäbe der einen Polhälfte Ströme anderer Richtung führen als die Stäbe der anderen Hälfte desselben Poles. Durch den Einfluß der Längswicklung [siehe Gleichung (15)] wird der Eisenstreufluß der Querwicklung nicht für alle Stäbe der gleiche sein. Der eigene Eisenstreufluß der Längswicklung kann nur klein sein, und da außerdem die Nutenstreuung gewöhnlich klein ist im Vergleich zu dem Ohmschen Widerstande, so darf bei der Längswicklung die Streuung außer acht gelassen werden.

Einfluß der Anordnung der Dämpferwicklung auf die Größe des Dämpfungsmomentes. Bei gegebenem Betriebszustande der Maschine hängt nach Gleichung (30) das Dämpfungsmoment nur von den beiden Größen

$$\frac{1}{R_l}\left[\frac{1}{Z_l} w_l^2\right] \quad \text{und} \quad \frac{R_q}{R_q^2 + (zS)^2}\left[\frac{1}{Z_q} w_q^2\right]$$

ab. Die erste von diesen charakterisiert die Längswicklung, hängt also mit dem vom Längsfeldstrom und dem Querfelde erzeugten Moment zusammen. Die zweite charakterisiert die Querwicklung und hängt mit dem vom Querfeldstrome und dem Längsfeld erzeugten Moment zusammen.

Wie oben behandeln wir die Längs- und die Querwicklung getrennt voneinander. Wir betrachten zwei Fälle:

---

[1]) Siehe Arnold und la Cour, W. T. Bd. IV, S. 51.

1. Die Stabdimensionen, d. h. die Widerstände R_l und R_q sind gegeben. Für die Streureaktanz $z\,S$ führen wir einen Mittelwert ein, den wir als unabhängig von der Variation der Stabzahl betrachten wollen. In diesem Falle ist die Längswicklung charakterisiert durch

$$\frac{1}{Z_l} w_l^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\sin^2 \dfrac{N}{4}\dfrac{a}{\tau}\pi}{\sin \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\tau}\pi}\right)^2, & \text{wenn } N \text{ eine gerade Zahl,} \\[2ex] \dfrac{1}{N-1}\left(\dfrac{\sin \dfrac{N-1}{4}\dfrac{a}{\tau}\pi \cdot \sin \dfrac{N+1}{4}\dfrac{a}{\tau}\pi}{\sin \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\tau}\pi}\right)^2, & \text{wenn } N \text{ eine ungerade Zahl,} \end{cases}$$

und die Querwicklung durch

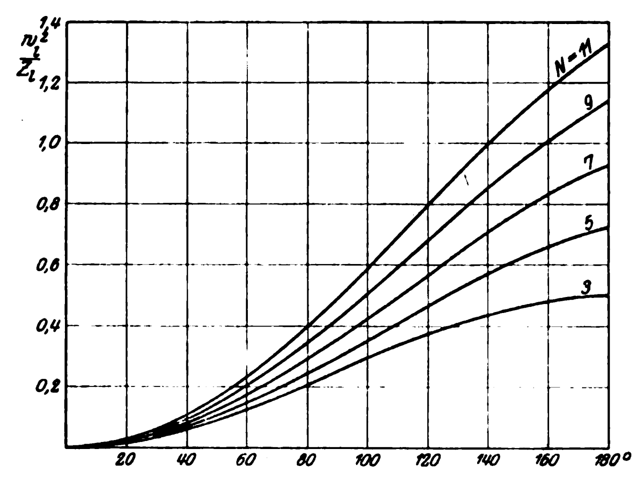


Bild 7. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Längswicklung bei gegebenem Stabwiderstand und gegebener Streureaktanz.

$$\frac{1}{Z_q} w_q^2 = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \dfrac{N}{2}\dfrac{a}{\tau}\pi}{2 \sin \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\tau}\pi}\right)^2.$$

In den Bildern 7 und 8 sind diese Funktionen für verschiedene Stabzahlen N in Abhängigkeit von der gesamten Wicklungsbreite, von der Polmitte nach beiden Seiten hin in elektrischen Graden gemessen, dargestellt.

Während $\frac{1}{Z_l} w_l^2$ mit zunehmender Wicklungsbreite zunimmt, nimmt $\frac{1}{Z_q} w_q^2$ mit zunehmender Wicklungsbreite ab, denn für die Querwicklung bedeutet die Zunahme der Wicklungsbreite, von der Polmitte aus gemessen, eine Abnahme der Wicklungsbreite.

Praktisches Interesse haben nur die Teile der Kurven zwischen 90° und 120°. In diesem Gebiete ist schon bei kleinen Stabzahlen der Einfluß der Querwicklung größer als der der Längswicklung. Bei 100° z. B. ist das Verhältnis von $\frac{1}{Z_q} w_q^2$ zu

$\frac{1}{Z_1} w_1^2$ für N = 3 gleich

$$\frac{0{,}435}{0{,}295} = 1{,}48 \text{ und für } N = 7 \text{ ist es gleich } \frac{1{,}22}{0{,}425} = 2{,}87.$$

Bei sonst gleichen Verhältnissen wäre somit bei N = 7 und 100° Wicklungsbreite das vom Querfeldstrom mit dem Längsfeld erzeugte Dämpfungsmoment ca. dreimal so groß wie das vom Längsfeldstrome mit dem Querfeld erzeugte Moment.

Eine Vergrößerung der Stabzahl bedeutet unter unseren Annahmen eine ebenso große Vermehrung des Kupfergewichtes der Dämpferwicklung. Vergrößern wir bei 100° Wicklungsbreite die Stabzahl von 3 auf 7, so entspricht dieser $2^1/_3$ fachen Vergrößerung des Kupfergewichtes eine $\frac{0{,}425}{0{,}295} = 1{,}44$ fache Vergrößerung der Wirkung der Längswicklung und eine $\frac{1{,}22}{0{,}435} = 2{,}8$ fache[1]) Vergrößerung der Wirkung

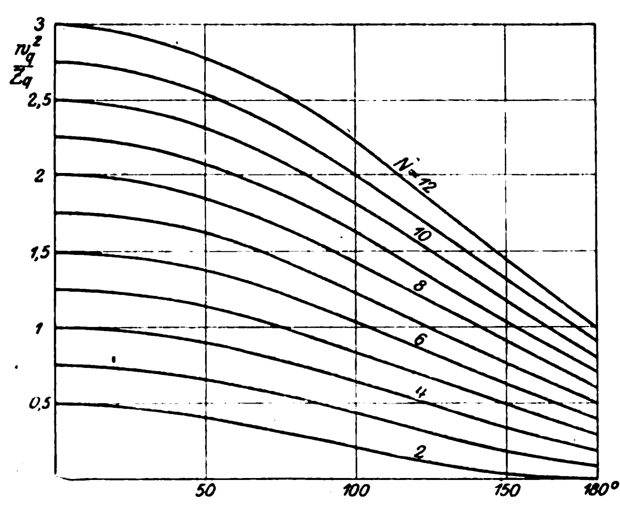


Bild 8. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Querwicklung bei gegebenem Stabwiderstand und gegebener Streureaktanz.

der Querwicklung. Vermehren wir bei derselben Wicklungsbreite die Stabzahl von 3 auf 11, also das Kupfergewicht um das $3^2/_3$ fache, so ist die Wirkung der Längswicklung auf das $\frac{0{,}585}{0{,}295} \cong 2$ fache und die Wirkung der Querwicklung auf das $\frac{1{,}995}{0{,}435} = 4{,}6$ fache[1]) gestiegen. Durch Vergrößerung der Stabzahl läßt sich also das Dämpfungsmoment bedeutend vergrößern, und zwar steigt das Dämpfungsmoment rascher an als das Kupfergewicht.

Im Bild 7, das sich auf die Längswicklung bezieht, liegen die Kurven für geradzahlige N nicht in der Mitte zwischen den Kurven für ungeradzahlige N, sondern die Kurve für N = 4 fällt beinahe mit der Kurve für N = 3, die Kurve für N = 6 beinahe mit der Kurve für N = 5 usw. zusammen. Dies entspricht den wirklichen Verhältnissen. Infolge der Verschiedenheit der von den Maschen der Längswicklung umspannten Kraftflüsse werden hier die nahe der Polmitte liegenden Stäbe der Längswicklung unter dem Einfluß der äußeren Stäbe Ströme anderer Richtung führen als in ihnen vom Längsfeld induziert wird.

[1]) Durch den Einfluß der Änderung der Streureaktanz z S kann dieses Verhältnis noch größer werden.

2. Der gesamte Querschnitt der Dämpferstäbe pro Pol ist gegeben, also $q_s N =$ konstant $= k$. So liegen die Verhältnisse in der Praxis. Man macht gewöhnlich das Stromvolumen der Dämpferstäbe pro Pol gleich dem Stromvolumen einer Polteilung der Ankerwicklung. Nimmt man eine gewisse Stromdichte an, so ist der gesamte Querschnitt gegeben.

In solchem Falle ist bei einem bestimmten Betriebszustande der Maschine das Dämpfungsmoment des Längsfeldstromes mit dem Querfeld charakterisiert durch die Größe

$$\frac{1}{R_l}\left(\frac{1}{Z_l} w_l^2\right)$$

und das Dämpfungsmoment des Querfeldstromes mit dem Längsfeld durch

$$\frac{R_q}{R_q^2 + (z\,S)^2}\left(\frac{1}{Z_q} w_q^2\right).$$

Uns interessiert die Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes von der Unterteilung des gesamten Querschnittes k und von der gesamten Wicklungsbreite. Für die Streureaktanz zS nehmen wir wieder einen mittleren Wert an.

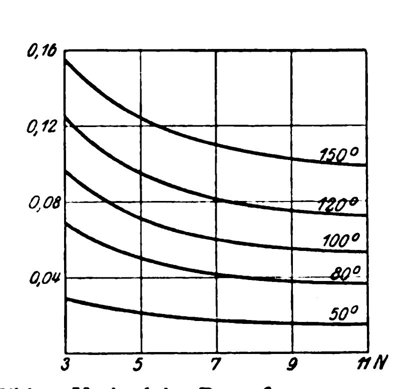


Bild 9. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Längswicklung bei gegebenem Gesamt-Stabquerschnitt.

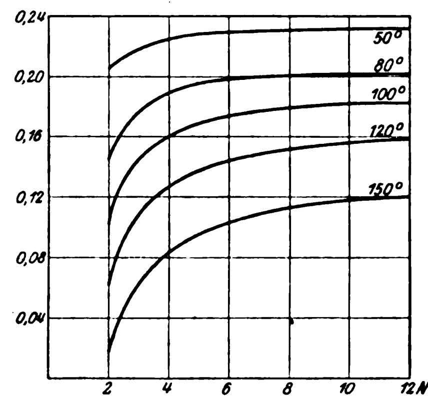


Bild 10. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Querwicklung bei gegebenem Gesamt-Stabquerschnitt. Streuung vernachlässigt ($\alpha = 0$).

Wir bezeichnen das Verhältnis von zS zu R_q, wenn der ganze Querschnitt k in einem einzigen Stab untergebracht wäre, mit α; dann ist dieses Verhältnis, wenn der Querschnitt k auf N Stäbe verteilt wird, gleich $\frac{\alpha}{N}$. Für die Widerstände R_l bzw. R_q können wir hier setzen

$$R = \text{konst. } N.$$

Mit diesen Beziehungen ist das Dämpfungsmoment der Längswicklung gleich

$$k_1 \frac{1}{N^2}\left(\frac{\sin^2 \frac{N}{4}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin \frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}\right)^2, \text{ wenn N eine gerade Zahl,}$$

$$k_1 \frac{1}{N(N-1)}\left(\frac{\sin \frac{N-1}{4}\frac{a}{\tau}\pi \cdot \sin \frac{N+1}{4}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin \frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}\right)^2, \text{ wenn N eine ungerade Zahl,}$$

und das Dämpfungsmoment der Querwicklung sowohl bei geradzahligem wie bei ungeradzahligem N

$$k_2 \cdot \frac{1}{N^2 + \alpha^2} \left(\frac{\sin \frac{N}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{2 \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi} \right)^2 .$$

k_1 und k_2 sind konstante Größen.

In den Bildern 9 bis 11[1]) sind diese Funktionen für verschiedene Wicklungsbreiten in Abhängigkeit von der Stabzahl N aufgetragen.

Das Bild 9 bezieht sich auf die Längswicklung für ungeradzahlige N, die Bilder 10 und 11 beziehen sich auf die Querwicklung sowohl für gerad- wie für ungeradzahlige N, und zwar ist im Bild 10 $\alpha = 0$, d. h. die Streuung gleich 0, und im Bild 11 $\alpha = 10$ gesetzt.

Aus dem Bild 9 sehen wir, daß bei einer bestimmten Wicklungsbreite eine größere Unterteilung des Querschnittes die Wirkung der Längswicklung vermindert. Das rührt davon, daß die Summe der Kraftflußverkettungen der Längswicklung mit zunehmender Stabzahl kleiner wird.

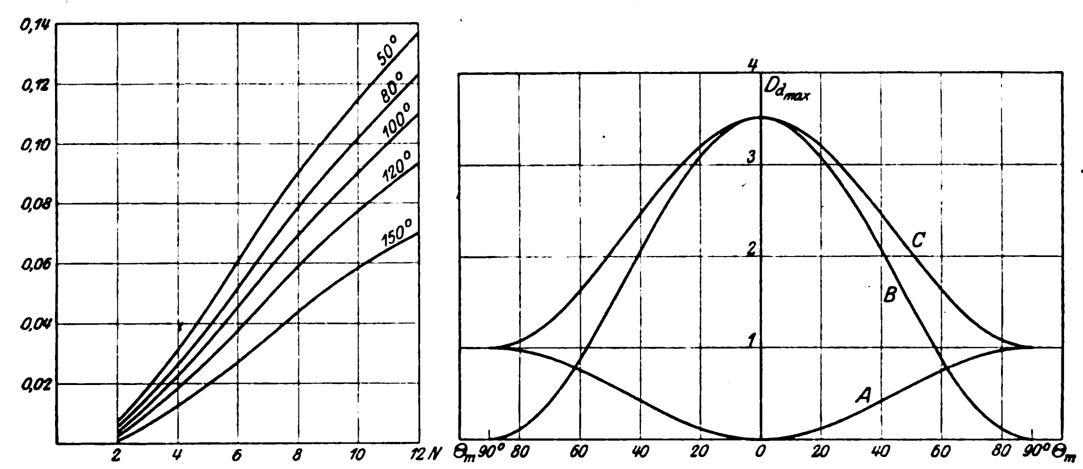


Bild 11. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Querwicklung bei gegebenem Gesamt-Stabquerschnitt. Streuung berücksichtigt ($\alpha = 10$).

Bild 12. Abhängigkeit des Dämpfungsmomentes von dem Betriebszustand der Maschine. A — Längswicklung. B — Querwicklung. C = A + B.

Bei der Querwicklung mit $\alpha = 0$ nimmt dagegen mit zunehmender Stabzahl das Dämpfungsmoment zu, weil hier die Summe der Kraftflußverkettungen zunimmt. Viel größer sind aber hier die Zunahmen des Dämpfungsmomentes mit zunehmender Stabzahl bei $\alpha = 10$, wo auch die Streuung berücksichtigt ist, weil bei zunehmender Stabzahl der Widerstand der einzelnen Stäbe zunimmt, wodurch der prozentuale Einfluß der Streureaktanz kleiner wird.

Vermehrt man hier bei einer Wicklungsbreite von 100° die Stabzahl von 5 auf 11, so steigt bei $\alpha = 0$ das Dämpfungsmoment der Querwicklung auf das $\frac{0{,}182}{0{,}169} = 1{,}08$fache und bei $\alpha = 10$ auf das $\frac{0{,}101}{0{,}0335} = 3$fache[2]), bleibt aber im letzteren Falle immer noch weit unter dem Wert für $\alpha = 0$.

Geht man also von einem bestimmten Gesamtquerschnitt aus und legt die Stäbe so weit von der Polschuhoberfläche, daß beträchtliche Streuung zu erwarten

[1]) Die Bilder 7 bis 10, in denen die Streuung nicht zur Geltung kommt, sind ähnlich den Bildern 7, 8, 33 und 34 der oben erwähnten Arbeit von Schumann, sind aber dort auf anderem Wege abgeleitet.

[2]) Durch den Einfluß der Änderung der Streureaktanz z S kann dieses Verhältnis kleiner werden.

ist, so ist es zweckmäßig, die Stabzahl groß, also die Stabquerschnitte klein zu machen. Das gilt aber nur bis zu einer bestimmten Grenze. — Wie schon oben bemerkt, liegen die Verhältnisse anders, wenn die Stabzahl eine bestimmte ist. In diesem Falle wird das größte Dämpfungsmoment (konstantes S vorausgesezt) erreicht, wenn $R_q = zS$ ist.

Einfluß des Betriebszustandes der Maschine auf die Größe des Dämpfungsmomentes. Bei gegebener Dämpferwicklung, konstanter Klemmenspannung und bestimmter Pendelung hängt nach Gleichung (30) das maximale Dämpfungsmoment des Längsfeldstromes mit dem Querfeld von $\sin^2 \Theta_m$ und das des Querfeldstromes mit dem Längsfeld von $\cos^2 \Theta_m$ ab. Sieht man von dem Einfluß der Größe des Winkels Θ_m auf die Streureaktanz zS ab, so läßt sich also schreiben

$$D_{d\,max} = c_1 \sin^2 \Theta_m + c_2 \cos^2 \Theta_m,$$

wo c_1 und c_2 konstante Größen sind. Für das Verhältnis $\frac{c_2}{c_1} = 3{,}5$ ist diese Funktion in Abhängigkeit von Θ_m im Bild 12 aufgetragen. Die Kurve A stellt die Größe $\sin^2 \Theta_m$, die Kurve B die Größe $3{,}5 \cos^2 \Theta_m$ dar und die Kurve C ist die Resultierende aus diesen beiden.

Für die Praxis ist von Wichtigkeit das Gebiet zwischen $\Theta_m = 0$ und $\Theta_m = \pm 45^0$. Während das vom Längsfeldstrom mit dem Querfeld herrührende Dämpfungsmoment bei $\Theta_m = 0$ Null ist, ist das vom Querfeldstrom mit dem Längsfeld erzeugte Moment bei $\Theta_m = 0$ im Maximum. Der Hauptteil des Dämpfungsmomentes einer Käfigwicklung wird vom Querfeldstrom mit dem Längsfeld erzeugt. Bei $\Theta_m = 20^0$ beträgt hier das vom Längsfeldstrom mit dem Querfeld erzeugte Dämpfungsmoment ca. 4% und bei $\Theta_m = 45^0$ $22{,}5\%$ des gesamten Dämpfungsmomentes.

Stromwärmeverluste der Dämpferwicklung. Betrachten wir zwei zur Polmitte oder zur Pollücke symmetrisch gelegene Stäbe, so fließt in einem von diesen der Strom $i_{dl} + i_{dq}$, in dem anderen der Strom $i_{dl} - i_{dq}$. Der Widerstand des Stabes sei mit R bezeichnet. Dann sind die Stromwärmeverluste in diesen zwei Stäben

$$R(i_{dl} + i_{dq})^2 + R(i_{dl} - i_{dq})^2 = 2R\,i_{dl}^2 + 2R\,i_{dq}^2,$$

d. h. die Stromwärmeverluste setzen sich aus zwei Teilen zusammen, aus den Stromwärmeverlusten des Längsfeldstromes und den Stromwärmeverlusten des Querfeldstromes. Für die Stromwärmeverluste der ganzen Käfigwicklung können wir somit setzen

$$V_{cu} = 2p(Z_l R_l i_{dl}^2 + Z_q R_q i_{dq}^2). \tag{46}$$

II. Einzelpoldämpfung.

Hier fehlen die Verbindungen zwischen den einzelnen Polen. Jeder Polschuh ist von einem Rahmen umgeben, dessen Querschnitt gleich ist dem Ringquerschnitt der Käfigwicklung, also gewöhnlich gleich $\frac{N}{2} q_s$.

In bezug auf das Längsfeld hat sich nichts geändert. Denn, wie wir oben sahen, konnten in den Verbindungsstücken zwischen den Polen sowieso keine vom Längsfeld herrührenden Ströme fließen. Nur sind die Querschnitte der Dämpferstäbe nicht mehr alle gleich, weil der Rahmen, durch den die Wirkung des Längsfeldes gegenüber dem Fall der Käfigwicklung bedeutend verstärkt wird, einen viel größeren Querschnitt hat als die im Eisen untergebrachten Stäbe. Wir werden daher bei der Berechnung des von der Längswicklung erzeugten Dämpfungsmomentes nicht von der Gleichung (30), die Gleichheit der Querschnitte aller Dämpferstäbe voraussetzt, sondern von der Gleichung (27) ausgehen müssen.

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei der Querwicklung. Jedes Wicklungselement der Querwicklung (Bild 1 c) ist jetzt in 2 voneinander getrennte Teile geteilt.

Den vom Querfeld induzierten Strömen werden dadurch andere Bahnen vorgeschrieben. Die Querwicklung bedarf jetzt einer neuen Behandlung.

Die Querwicklung. In Bild 13a und b sind für $N = 2m$ und $N = 2m + 1$ für einen bestimmten Zeitmoment die Ströme, die vom Querfeld in den Dämpferstäben induziert werden, eingetragen. Zwei zur Polmitte symmetrisch gelegene Stäbe führen gleiche und gleichgerichtete Ströme, so daß die Stäbe einer Polhälfte auf keinen Fall Strom in die Stäbe der anderen Polhälfte schicken können. Bei $N = 2m + 1$ wird der in der Polmitte liegende Stab als Rückleitung für alle übrigen $2m$ Stäbe dienen, bei $N = 2m$ werden die beiden in der Nähe der Polmitte liegenden Stäbe die Rückleitung bilden, und zwar wird jeder von diesen den Strom aller $m - 1$ Stäbe seiner Polhälfte führen. In bezug auf das Querfeld können wir also die Dämpferwicklung durch eine solche ersetzen, wie sie in Bild 13c dargestellt ist. Der Querschnitt ist hier aber nicht bei allen Stäben der gleiche und der als Rückleitung dienende Stab erscheint hier mit dem $2m$- bzw. $(m - 1)$-fachen Werte seines Widerstandes.

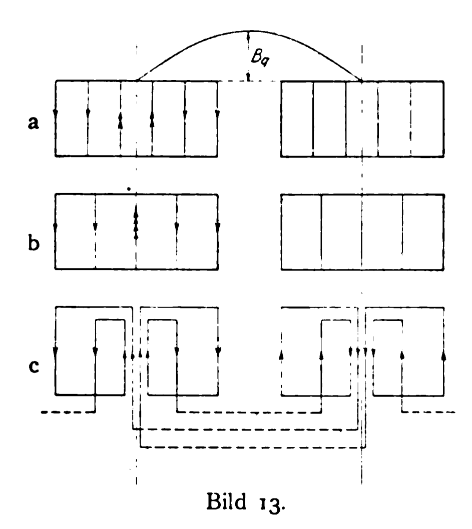


Bild 13.

Sämtliche Überlegungen, die wir oben zur Berechnung der Ströme und Momente der Querwicklung der Käfigwicklung angestellt haben, bleiben bestehen. Alle Gleichungen bis zur Gleichung (21) bleiben unverändert. Es sind neu nur die effektive Windungszahl w_{dq} und das Verhältnis $\frac{c_{dq}}{c_2}$ zu berechnen.

Die effektive Windungszahl w_{dq} und das Verhältnis $\frac{c_{dq}}{c_2}$. Wir setzten oben [vgl. Gleichung (7)] für die vom Querfeld in der Querwicklung induzierte EMK

$$10^8 \cdot e_{dq} = - w_{dq} \frac{2}{\pi} \tau l_i \frac{d B_q}{dt}.$$

Es sei zunächst N eine gerade Zahl, $N = 2m$. Der Fluß, der mit der aus dem Stabe 1 (von der Polmitte aus gezählt) und dem n-ten Stabe gebildeten Masche verkettet ist, beträgt

$$\Phi = l_i \int_{\frac{\tau}{2} - \left(n - \frac{1}{2}\right) a}^{\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2} a} B_q \cos \frac{\xi}{\tau} \pi \, d\xi = l_i \frac{\tau}{\pi} B_q \left(\cos \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi - \cos \frac{2n - 1}{2} \frac{a}{\tau} \pi \right).$$

Demnach ist die in einem Wicklungselement der Ersatzwicklung Bild 13c induzierte EMK gleich

$$10^8 \cdot \sum_{n=1}^{n=m} e = - \frac{2}{\pi} \tau l_i \frac{d B_q}{dt} \sum_{n=1}^{n=m} \left(\cos \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi - \cos \frac{2n-1}{2} \frac{a}{\tau} \pi \right),$$

d. h. es ist

$$w_{dq} = 2p \sum_{n=1}^{n=m} \left(\cos \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi - \cos \frac{2n-1}{2} \frac{a}{\tau} \pi \right) = 2p \left(m \cos \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi - \frac{\sin m \frac{a}{\tau} \pi}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi} \right)$$

oder

$$w_{dq} = 2p \left(\frac{\frac{N}{2} \sin \frac{a}{\tau}\pi - \sin \frac{N}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi} \right) \ldots \tag{47}$$

Wenn $N = 2$ ist, so ist $w_{dq} = 0$ und das Querfeld kann keine Ströme in den Dämpferstäben induzieren.

Ist N eine ungerade Zahl, also $N = 2m + 1$, so ergibt sich für die aus dem 0-ten und dem n-ten Stabe gebildete Masche

$$\Phi = l_i \int_{\frac{\tau}{2} - an}^{\frac{\tau}{2}} B_q \cos \frac{\pi}{\tau} \xi \, d\xi = l_i \frac{\tau}{\pi} B_q \left(1 - \cos n \frac{a}{\tau} \pi\right).$$

Demnach ist

$$10^8 \cdot \sum_{n=0}^{n=m} e = -\frac{2}{\pi} \tau l_i \frac{dB_q}{dt} \sum_{n=0}^{n=m} \left(1 - \cos n \frac{a}{\tau}\pi\right)$$

$$w_{dq} = 2p \sum_{n=0}^{n=m} \left(1 - \cos n \frac{a}{\tau}\pi\right) = 2p \left(m - \frac{\sin \frac{m}{2}\frac{a}{\tau}\pi \cdot \cos \frac{m+1}{2}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin \frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi} \right)$$

oder

$$w_{dq} = 2p \left(\frac{N-1}{2} - \frac{\sin \frac{N-1}{4}\frac{a}{\tau}\pi \cdot \cos \frac{N+1}{4}\frac{a}{\tau}\pi}{\sin \frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi} \right). \tag{48}$$

Um das Verhältnis $\frac{c_{dq}}{c_2}$ zu bestimmen, müssen wir die Amplitude der Grundwelle der MMK-Kurve der Ersatzwicklung Bild 13c berechnen.

Für $N = 2m$ ergibt sich für die Amplitude der Grundwelle der MMK-Kurve der aus dem ersten und dem n-ten Stabe gebildeten Masche

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\tau} f(\xi) \cos \frac{\pi}{\tau} \xi \, d\xi = \frac{2}{\tau} \int_{\frac{\tau}{2} - \left(n - \frac{1}{2}\right)a}^{\frac{\tau}{2} - \frac{a}{2}} i_{dq} \cos \frac{\pi}{\tau} \xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} i_{dq} \left(\cos \frac{1}{2}\frac{a}{\tau}\pi - \cos \frac{2n-1}{2}\frac{a}{\tau}\pi \right)$$

und für die ganze Querwicklung, die aus $2p \cdot 2m$ solcher Maschen besteht,

$$\frac{4}{\pi} i_{dq} w_{dq}.$$

Daraus ergibt sich in gleicher Weise wie bei der Käfigwicklung [s. Gleichung (26)]

$$\frac{c_{dq}}{c_2} = \frac{w_{dq}}{w_a} \tag{49}$$

und diese Beziehung gilt auch dann, wenn $N = 2m + 1$ ist.

Das Dämpfungsmoment. Einfluß der Anordnung der Dämpferwicklung auf die Größe des Dämpfungsmomentes. Nach der Gleichung (27) ist

$$D_d = p \frac{P^2_{max}}{w_a^2} \frac{1}{\omega^2} \left[w_{dl}^2 \frac{r_{dl}}{r_{dl}^2 + (z\,S_{dl})^2} \sin^2 \Theta_m + w_{dq}^2 \frac{r_{dq}}{r_{dq}^2 + (z\,S_{dq})^2} \cos^2 \Theta_m \right] \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ Dez.-Megad.}$$

Bringt man hier die gleiche Korrektur für die EMK wie dort an und setzt

$$\begin{aligned} w_{dl} &= 2\,p\,w_l \qquad & w_{dq} &= 2\,p\,w_q \\ r_{dl} &= 2\,p\,r_l \qquad & r_{dq} &= 2\,p\,r_q, \end{aligned} \tag{50}$$

wo w_l, w_q, r_l und r_q die effektiven Windungszahlen bzw. die Widerstände eines ganzen Wicklungselementes (Bild 13c) sind, so folgt für das maximale Dämpfungsmoment bzw. für die maximale Dämpferleistung bei der Einzelpoldämpfung

$$D_{d\,max} = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} \frac{p}{\frac{\omega}{p}} \frac{1}{\varepsilon_0} \left[w_l^2 \frac{1}{r_l} \sin^2 \Theta_m + w_q^2 \frac{1}{r_q} \cos^2 \Theta_m \right] \text{Dez.-Megad.} \tag{51}$$

und

$$L_{d\,max} = k^2 \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c}\, p\, \varepsilon_0 \left[w_l^2 \frac{1}{r_l} \sin^2 \Theta_m + w_q^2 \frac{1}{r_q} \cos^2 \Theta_m \right] \text{Watt,} \tag{52}$$

wobei die Streuung vernachlässigt worden ist. Aus dem Streulinienbild überzeugt man sich, daß hier die Streuung klein ist und um so mehr außer acht gelassen werden kann, als ein großer Teil des Dämpfungsmomentes sowohl bei der Längs- wie bei der Querwicklung vom Rahmen, der die Polschuhe umgibt und nur mit einer seiner Flächen an das Eisen anliegt, erzeugt wird.

Die effektive Windungszahl w_l hat hier den gleichen Wert wie bei der Käfigwicklung und ist der Gleichung (34) zu entnehmen. Für w_q ist nach den Gleichungen (47) und (48) zu setzen

$$w_q = \frac{\frac{N}{2} \sin \frac{a}{\tau} \pi - \sin \frac{N}{2} \frac{a}{\tau} \pi}{2 \cdot \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}, \text{ wenn N eine gerade Zahl,}$$

$$w_q = \frac{N-1}{2} - \frac{\sin \frac{N-1}{4} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \cos \frac{N+1}{4} \frac{a}{\tau} \pi}{\sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi}, \text{ wenn N eine ungerade Zahl.} \tag{53}$$

In den Bildern 14 und 15 sind die Quadrate der effektiven Windungszahlen w_l und w_q für verschiedene Stabzahlen in Abhängigkeit von der gesamten Wicklungsbreite aufgetragen. Da die Polschuhbreite ungefähr $^2/_3$ der Polteilung beträgt, so spielt hier praktisch nur das Gebiet in der Nähe von 120^0 eine Rolle.

Sowohl w_l^2 wie w_q^2 wachsen mit zunehmender Stabzahl an. Daß w_q^2 für $N = 3$ größer ist als für $N = 4$, leuchtet ohne weiteres ein, denn bei $N = 3$ ist der mit der Querwicklung verkettete Fluß größer als bei $N = 4$. Die Kurve für $N = 6$ unterscheidet sich nur wenig von der Kurve für $N = 5$, ebenso die Kurve für $N = 8$ von der Kurve für $N = 7$, und nur bei noch höheren Stabzahlen macht sich der Unterschied zwischen einem ungeradzahligen N und dem nächstliegenden höheren geradzahligen N bemerkbar.

Für die Größe des Dämpfungsmomentes sind jedoch nicht w_l^2 und w_q^2, sondern die Werte von $\frac{w_l^2}{r_l}$ und $\frac{w_q^2}{r_q}$ maßgebend, und wir sahen, daß es bei der Längswicklung keinen Vorteil hatte, wenn man die Stabzahl z. B. von 5 auf 6 oder von 7 auf 8 erhöhte (vgl. Bemerkung zu Bild 9). In noch höherem Maße gilt dies hier für die Querwicklung.

Um einen Vergleich zwischen der Wirkung des Querfeldes hier und bei der Käfigwicklung zu gewinnen, nehmen wir an, daß der Rahmen um den Pol herum

den gleichen Querschnitt hat wie die Stäbe, die im Eisen liegen. Die Größe $\frac{w_q^2}{r_q}$ kann man in diesem Falle ersetzen durch

$$\frac{w_q^2}{2(N-2)R_q}, \text{ wenn N eine gerade Zahl,}$$

$$\frac{w_q^2}{2(N-1)R_q}, \text{ wenn N eine ungerade Zahl,}$$

wobei R_q wie oben den Widerstand einer halben Windung bedeutet.

Wir betrachten wieder zwei Fälle:

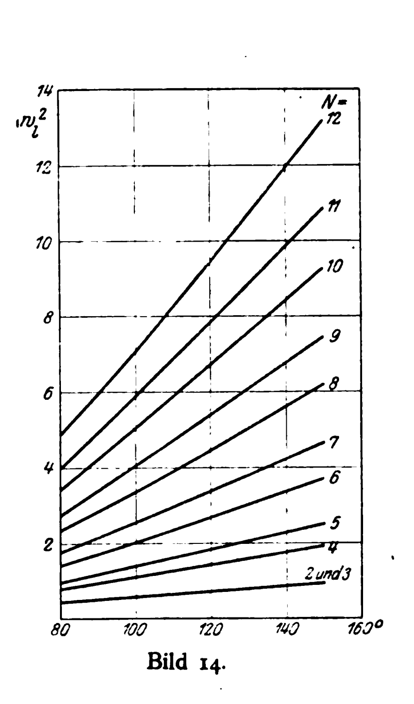


Bild 14.

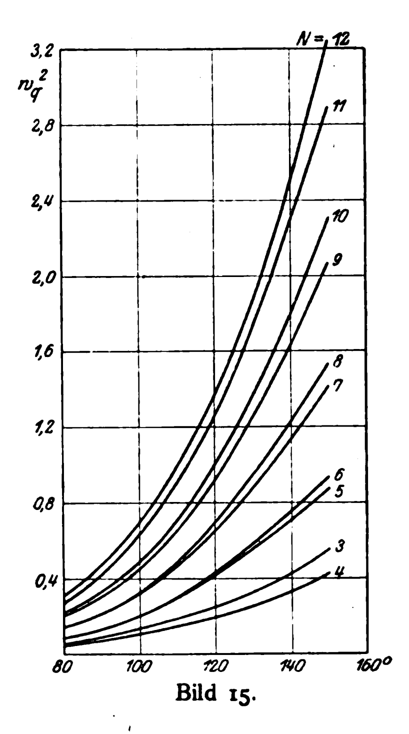


Bild 15.

1. Die Stabdimensionen sind gegeben. Die Querwicklung ist charakterisiert durch

$$\frac{w_q^2}{2(N-2)}, \text{ wenn N eine gerade Zahl,}$$

$$\frac{w_q^2}{2(N-1)}, \text{ wenn N eine ungerade Zahl.}$$

Im Bild 16 sind diese Werte für $N = 3$, 4 und 12 aufgetragen. Die Kurven für $N = 5$ bis 11 liegen zwischen der Kurve für $N = 4$ und der für $N = 12$, und zwar liegt nicht nur die Kurve für $N = 4$ unter der Kurve für $N = 3$, sondern auch die Kurven für $N = 5$ bis 8 liegen unter dieser Kurve. Dies entspricht den Tatsachen, denn in Wirklichkeit wird nicht nur der in der Polmitte liegende Stab bzw. bei geradzahligem N die zwei in der Nähe der Polmitte liegenden Stäbe, sondern auch die ihnen benachbarten Stäbe die Rückleitung für die nahe der Polschuhspitzen liegenden Stäbe bilden. Bei $N = 7$ werden z. B. der in der Polmitte liegende und der ihm benachbarte Stab die Rückleitung bilden, während der nächstliegende Stab, von der Polmitte aus gezählt, einen nur kleinen Strom führen wird.

Es folgt daraus, daß, wenn alle Stäbe gleichen, von vornherein festgelegten Querschnitt haben, die Zahl der Stäbe entweder gleich 3 oder größer als etwa 10 gemacht werden muß. Anders ist es aber, wenn der in der Polmitte liegende Stab

bzw. bei geradzahligem N die zwei nahe der Polmitte liegenden Stäbe einen viel größeren Querschnitt erhalten als die übrigen Stäbe, so daß keine weiteren Leiter außer diesen an der Rückleitung teilnehmen werden. In diesem Falle wird schon die Kurve für $N = 5$ über der Kurve für $N = 3$ liegen und jede weitere Vergrößerung der Stabzahl wird das Dämpfungsmoment bedeutend erhöhen.

Vergleichen wir die Werte des Bildes 16 mit den entsprechenden Werten des Bildes 8, welches sich auf die Querwicklung der Käfigwicklung bezieht, so sehen wir, daß dort die Wirkung des Querfeldes bedeutend größer ist. So ist z. B. bei einer gesamten Wicklungsbreite von 120° das Verhältnis der dort angegebenen Werte zu den Werten des Bildes 16 für $N = 3$ gleich $\frac{0{,}33}{0{,}063} = 5{,}2$ und für $N = 6$ gleich $\frac{0{,}87}{0{,}0519} = 16{,}8$, d. h. unter sonst gleichen Verhältnissen wäre im letzteren Falle bei der Einzelpoldämpfung die Wirkung des Querfeldes ca. 17mal kleiner als bei

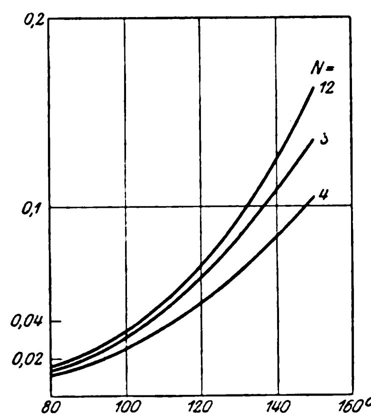


Bild 16. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Querwicklung bei gegebenem Stabwiderstand.

Bild 17. Verlauf des Dämpfungsmomentes der Querwicklung bei gegebenem Gesamt-Stabquerschnitt.

der Käfigwicklung. In Wirklichkeit ist dieses Verhältnis nicht so groß, erstens weil bei der Käfigwicklung die Streuung das Dämpfungsmoment verkleinert, zweitens weil hier der Rahmen um den Polschuh einen viel größeren Querschnitt hat als die Stäbe, die im Eisen liegen, und ein großer Teil des Momentes eben von diesem Rahmen erzeugt wird.

2. Der gesamte Querschnitt der Dämpferstäbe pro Pol ist gegeben. Da hier $R_q = \text{konst.}\, N$, so ist die Querwicklung charakterisiert durch

$$\frac{w_q^2}{2\,N\,(N-2)}, \text{ wenn N eine gerade Zahl,}$$

$$\frac{w_q^2}{2\,N\,(N-1)}, \text{ wenn N eine ungerade Zahl.}$$

Im Bilde 17 sind diese Größen für drei verschiedene Wicklungsbreiten dargestellt. Das Maximum des Dämpfungsmomentes tritt hier auf bei $N = 3$. Vergleichen wir diese Kurven mit den Kurven der Bilder 10 und 11, die sich auf konstanten Querschnitt pro Pol bei der Käfigwicklung beziehen, so sehen wir, daß während bei der Käfigwicklung eine Vergrößerung des Dämpfungsmomentes durch Vergrößerung der Stabzahl N hier eine Vergrößerung des Momentes durch Verkleinerung der Stabzahl sich erreichen läßt. Nimmt man hier 6 Stäbe statt 3, so hat das Dämpfungsmoment der Querwicklung nicht einmal die Hälfte von dem Wert, den es bei 3 Stäben hat.

Was den Einfluß des Betriebszustandes der Maschine auf die Größe des Dämpfungsmomentes betrifft, so gilt hier für $D_{d\,max}$ die gleiche Beziehung wie früher bei der Käfigwicklung. Während aber dort für die praktischen Verhältnisse c_2 größer als c_1 war, ist hier umgekehrt c_2 bedeutend kleiner als c_1 und schon bei verhältnismäßig kleinen Winkeln Θ_m kann es vorkommen, daß das von der Längswicklung (von dem Längsfeldstrom mit dem Querfeld) herrührende Dämpfungsmoment größer ist als das von der Querwicklung (von dem Querfeldstrom mit dem Längsfeld) herrührende Dämpfungsmoment. Das gegenseitige Verhältnis der beiden Teile des Dämpfungsmomentes des Bildes 12 trifft hier nicht zu.

Dämpferrahmen. Einen Sonderfall der Einzelpoldämpfung bildet die Anordnung eines einzelnen Messing- oder Kupferrahmens um den Polschuh oder um den Pol herum. Hier induziert das Querfeld keine Ströme in der Dämpferwicklung. Es wirkt nur das vom Längsfeldstrom mit dem Querfeld herrührende Dämpfungsmoment. Nach Gleichung (34) ist hier

$$w_l = \sin \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi$$

$$D_{d\,max} = k^2 \frac{1}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} p \frac{1}{\frac{\omega}{p}} \frac{1}{R} \sin^2 \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \sin^2 \Theta_m \text{ Dez.-Megadynen} \tag{54}$$

und

$$L_{d\,max} = k^2 \frac{1}{\pi} \frac{P^2}{w_a^2} \frac{z}{c} p \frac{1}{R} \sin^2 \frac{1}{2} \frac{a}{\tau} \pi \cdot \sin^2 \Theta_m \text{ Watt.} \tag{55}$$

R ist der Widerstand des halben Rahmens, a die Breite des Rahmens in cm.

Einfluß der Sättigung. Im Anfang unserer Rechnung setzten wir voraus, daß die Sättigung der magnetischen Kreise klein ist. Die Amplituden des Längs- und des Querfeldes B_l und B_q Gleichung (5) konnten aber durch die Klemmenspannung der Maschine ausgedrückt werden. Es müssen daher alle mit diesen Ausdrücken für das Längs- und Querfeld gewonnenen Resultate auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn die obige Voraussetzung nicht mehr zutrifft, d. h. alle oben abgeleiteten Gleichungen sind von dem Sättigungszustande der Maschine unabhängig.

III. Berechnungsbeispiel.

Es sei ein Dreiphasen-Generator mit folgenden Daten gegeben:

Leistung 2600 KVA, verkettete Spannung 3000 Volt, $\cos\varphi = 0{,}8$, $c = 50$, $n = 94$, $p = 32$, 500 Amp.

Polteilung $\tau = 36{,}8$ cm.

Polbogen $b = 25$ cm.

Polschuhlänge $= 27$ cm.

Effektive Windungszahl pro Phase $w_a = 168 \cdot 0{,}966 = 162$.

Schwungmoment $GD^2 = 2{,}6 \cdot 10^6$ kgm².

Der Antrieb erfolgt von einer doppelt wirkenden Tandem-Gasmaschine.

1. Käfigwicklung. Für diesen Generator wollen wir zunächst eine Käfigwicklung nachrechnen.

Das Stromvolumen des Ankers für die Polteilung ist

$$\frac{3 \cdot 500 \cdot 168}{32} = 7870 \text{ Amp.}$$

Mit einer Stromdichte von 6 Amp./mm² wird der Querschnitt der Dämpferstäbe pro Pol $\frac{7870}{6} = 1310$ mm². Dieser Querschnitt soll auf 6 Stäbe verteilt werden; dies erfordert einen Stabquerschnitt von $1310 : 6 = 219$ mm². Es werden Stäbe von 16,5 mm Durchmesser genommen. Somit

$$q_s = 214\,\text{mm}^2 \text{ und } q_r = \frac{6}{2}\,214 = 642\,\text{mm}^2.$$

Diese 6 Stäbe werden auf einem Bogen, der konzentrisch zum Polschuhbogen ist, angeordnet. Der Abstand der Stäbe von der Polschuhoberfläche sei 1 mm.

Der Polschuhbogen beträgt $\frac{b}{\tau} \cdot 180 = 122{,}5^0$. Die gesamte Wicklungsbreite der Dämpferwicklung betrage 95^0, so daß

$$\frac{a}{\tau}\pi = 19^0 \text{ und } a = 3{,}78 \text{ cm}.$$

Es ist

$$Z_q = Z_l = N = 6.$$

Nach den Kurven Bild 7 und 8 ist hier

$$\frac{w_l^2}{Z_l} = 0{,}325 \text{ und } \frac{w_q^2}{Z_q} = 1{,}075.$$

Weiter ist

$$R_l = \frac{1}{57}\left(\frac{27}{214} + \frac{36{,}8}{3 \cdot 642}\right) 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm},$$

$$R_q = \frac{1}{57}\left(\frac{27}{214} + \frac{2 \cdot 36{,}8}{3 \cdot 642}\right) 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 3{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}.$$

Es mögen Schwingungen auftreten, deren Dauer gleich der halben Umdrehungszeit der Maschine ist ($\nu = 2$); der Ungleichförmigkeitsgrad δ bei Normallast sei gleich $\frac{1}{250}$.

Die Amplitude der Abweichung von dem mittleren Winkel Θ_m ist dann gleich[1])

$$\varepsilon_0 = \frac{p\,\delta}{2\,\nu} = \frac{32}{250 \cdot 2 \cdot 2} = 0{,}032,$$

dies sind 1,8 elektrische Grade.

Die Kreisfrequenz der Pendelung ist

$$z = 2\pi\frac{\nu n}{60} = 2\pi\frac{2 \cdot 94}{60} = 19{,}7.$$

Bei 2600 KVA, 3000 Volt und $\cos\varphi = 0{,}8$ beträgt Θ_m 14^0. Entnehmen wir noch den Kurven Bild 4 für unseren Fall $\frac{w_q}{Z_q} = 0{,}425$, so berechnet sich nach Gleichung (44) die pro Stab vom Querfelde induzierte EMK (OB Bild 5) zu $1375 \cdot 10^{-5}$ Volt und $J'_{dq\,max} = \frac{1375 \cdot 10^{-5}}{3{,}4 \cdot 10^{-5}} = 405$ Amp.

Für diese Verhältnisse wurde die Streureaktanz oben berechnet

$$z\,S = 5{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm}.$$

Der Korrektionsfaktor ist hier $k^2 = 1{,}1^2$.

Nach Gleichung (33) ist nun der Maximalwert der Dämpferleistung

$$L_{d\,max} = 1{,}1^2\,\frac{2}{\pi}\,\frac{1731^2}{162^2}\,32\,\frac{19{,}7}{50}\,0{,}032 \cdot 10^5\left[\frac{1}{3}\,0{,}325 \cdot 0{,}0586 + \frac{3{,}4}{3{,}4^2 + 5{,}5^2}\,1{,}075 \cdot 0{,}941\right]$$

$$= 3560 \cdot 10^3\,(0{,}00635 + 0{,}0822) = 22{,}5 + 293{,}5 = 316\,\text{KW}.$$

In % der Maschinenleistung ausgedrückt, beträgt also das maximale Dämpfungsmoment der Längswicklung 1,1 %, und das der Querwicklung 14,1 %, zusammen

[1]) S. Arnold & la Cour. Wechselstromtechnik Bd. IV S. 301.

15,2%, so daß die Maschine befriedigend in Resonanz mit einer aufgeprägten Schwingung, deren Amplitude 15,2% der Maschinenleistung beträgt, arbeiten könnte.

Die Näherungsformel Gleichung (42) ergibt $L_{d\,max} = 312$ kW, also ziemlich das Gleiche wie die genaue Formel. Die Übereinstimmung zwischen den beiden Formeln ist um so größer, je kleiner der Winkel Θ_m ist.

Die Amplitude des Querfeldstromes wurde oben zu 215 Amp. bestimmt. Die Stromwärmeverluste infolge des Querfeldstromes sind

$$\left(\frac{215}{\sqrt{2}}\right)^2 3{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 64 \cdot 6 = 302 \text{ Watt.}$$

Es verhält sich die Amplitude des Längsfeldstromes zu der Amplitude des Querfeldstromes wie

$$\frac{J_{dl\,max}}{J_{dq\,max}} = \frac{w_l}{w_q} \frac{\sin \Theta_m}{\cos \Theta_m} \frac{\sqrt{R_q^2 + (z\,S)^2}}{R_l}.$$

Es ist hier $J_{dl\,max} = 44$ Amp. und die Stromwärmeverluste infolge des Längsfeldstromes betragen 11 Watt. Die gesamten Stromwärmeverluste sind $302 + 11 = 313$ Watt, das macht 0,015% der Maschinenleistung aus.

Hätten wir den Steg statt 1 mm 0,5 mm stark gemacht, so wäre nach Obigem die Streureaktanz $z\,S = 2 \cdot 10^{-5}$ Ohm und der Maximalwert der Dämpferleistung

$$L_{d\,max} = 3560 \cdot 10^3 (0{,}00635 + 0{,}221) = 810 \text{ KW},$$

d. h. 2,5 mal größer als im vorigen Falle. Bei einem Steg von etwa 4 mm Stärke verschwindet dagegen die Wirkung der Querwicklung beinahe ganz (bei dem von uns angenommenen Wert für ε_0) und auch die der Längswicklung, weil bei solcher Stegdicke auch die Streureaktanz der Längswicklung in Betracht kommt.

Wir wollen den Querschnitt des Dämpferstabes und die Stabzahl variieren und den Einfluß dieser Variationen auf die Größe des Dämpfungsmomentes feststellen.

a) Es sei

$$q_s = 133 \text{ mm}^2$$

entsprechend 13 mm Stabdurchmesser und einer Verminderung des Kupfergewichtes um 38%.

Es werden

$$R_l = 4{,}84 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm,}$$

$$R_q = 5{,}48 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm.}$$

$$J'_{dq\,max} = \frac{1375 \cdot 10^{-5}}{5{,}48 \cdot 10^{-5}} = 250 \text{ Amp.}$$

Mit $J_{dq\,max} = 150$ Amp. werden $\text{AW/cm} = \frac{150}{0{,}6} = 250$ und $B = 19550$. Somit die Eisen-Streu-EMK

$$19\,550 \cdot 27 \cdot 0{,}1 \cdot 19{,}7 \cdot 10^{-8} = 1040 \cdot 10^{-5} \text{ Volt}$$

und die Nut-Streu-EMK

$$1{,}25 \cdot 0{,}623 \cdot 27 \cdot 150 \cdot 19{,}7 \cdot 10^{-8} = 62 \cdot 10^{-5} \text{ Volt.}$$

Die Kontrolle ergibt

$$OA = 10^{-5} \sqrt{1375^2 - 1102^2} = 822 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{822 \cdot 10^{-5}}{5{,}48 \cdot 10^{-5}} = 150 \text{ Amp.},$$

was mit der Annahme übereinstimmt. Daraus ergibt sich die Streureaktanz zu

$$z\,S = \frac{1102 \cdot 10^{-5}}{150} = 7{,}35 \text{ Ohm}$$

und



$$L_{d\,max} = 3560 \cdot 10^8 \left[\frac{1}{4,84} 0,325 \cdot 0,0586 + \frac{5,48}{5,48^2 + 7,35^2} 1,075 \cdot 0,941\right] = 14\text{ kW} + 235\text{ kW}$$

was 0,7 bzw. 11,3% der Normalleistung der Maschine entspricht.

Da bei der Längswicklung die Streuung hier nicht in Betracht kommt, ändert sich ihr Dämpfungsmoment proportional mit der Kupfermenge. Anders ist es bei der Querwicklung. Hier hat bei einer Abnahme der Kupfermenge um 38% das Dämpfungsmoment nur um 20% abgenommen. Dies hängt damit zusammen, daß die Streureaktanz langsamer zunimmt als der Ohmsche Widerstand.

b) Es sei

$$q_s = 314\text{ mm}^2.$$

Dies entspricht einem Stabdurchmesser von 20 mm und einer Vergrößerung des Kupfergewichtes um 47%.

$$R_l = 2,04 \cdot 10^{-5} \qquad R_q = 2,32 \cdot 10^{-5}$$

$$J'_{dq\,max} = \frac{1375 \cdot 10^{-5}}{2,32 \cdot 10^{-5}} = 593\text{ Amp.}$$

Es ergibt sich

$$J_{dq\,max} = 282\text{ Amp.} \qquad z\,S. = \frac{1212 \cdot 10^{-5}}{282} = 4,3 \cdot 10^{-5}\text{ Ohm}$$

und

$$L_{d\,max} = 3560 \cdot 10^8 \left(\frac{1}{2,04} 0,325 \cdot 0,0586 + \frac{2,32}{2,32^2 + 4,3^2} 1,075 \cdot 0,941\right) = 33,2\text{ kW} + 350\text{ kW},$$

dies sind 1,6% bzw. 16,8% der Normalleistung der Maschine.

Der Erhöhung der Kupfermenge um 47% entspricht also eine Erhöhung des Dämpfungsmomentes der Querwicklung von nur 19%, und zwar weil die Streureaktanz langsamer abnimmt als der Ohmsche Widerstand.

c) bei gleichem Querschnitt wie unter a) sei die Stabzahl 10 statt 6.

$$Z_l = Z_q = 10.$$

Für eine Wicklungsbreite von 95° entnehmen wir den Kurven Bild 4, 7 und 8

$$\frac{w_q}{Z_q} = 0,43, \qquad \frac{w_l^2}{Z_l} = 0,465 \quad \text{und} \quad \frac{w_q^2}{Z_q} = 1,87$$

$$R_l = 4,84 \cdot 10^{-5} \qquad R_q = 5,48 \cdot 10^{-5}$$

$$OB = 1,1 \frac{1}{\sqrt{2}.\pi} 1731 \frac{1}{162} 0,032 \frac{19,7}{50} \cdot 0,43 \cdot 0,97 = 1390 \cdot 10^{-5}\text{ Volt}$$

$$J'_{dq\,max} = \frac{1390 \cdot 10^{-5}}{5,48 \cdot 10^{-5}} = 254\text{ Amp.}$$

Mit $J_{dq\,max} = 153$ Amp. wird

$$z\,S = \frac{1107 \cdot 10^{-5}}{153} = 7,22 \cdot 10^{-5}\text{ Ohm}$$

und

$$L_{d\,max} = 3560 \cdot 10^8 \left(\frac{1}{4,84} 0,465 \cdot 0,0586 + \frac{5,48}{5,48^2 + 7,22^2} 1,87 \cdot 0,941\right) = 20\text{ kW} + 417\text{ kW},$$

was 0,95 bzw. 20% der Maschinenleistung entspricht.

Gegenüber a) ist das Kupfergewicht um 67% erhöht. Das Dämpfungsmoment der Längswicklung hat um 43%, das der Querwicklung um 79% zugenommen. Den Kurven Bild 7 und 8 entnehmen wir 43 bzw. 74% Erhöhung. Die kleine Differenz bei der Querwicklung rührt von der Variation der Streureaktanz infolge der Veränderung der Stabzahl her.

d) Den letzten Fall c) wollen wir noch mit der ersten Rechnung vergleichen. Die Gesamt-Kupferquerschnitte sind in beiden Fällen beinahe gleich ($214 \cdot 6 = 1285$ mm² und $133 \cdot 10 = 1330$ mm²), nur ist dort die Stabzahl 6, hier 10. Bei der Längswicklung hat infolge Vergrößerung der Stabzahl das Dämpfungsmoment um 11,5% abgenommen, bei der Querwicklung dagegen um 42,5% zugenommen; nach dem Verlauf der Kurven Bild 9 und 11 war dies auch zu erwarten. Infolge Vergrößerung der Streureaktanz ist jedoch die Zunahme des Dämpfungsmomentes der Querwicklung kleiner, als es nach dem Bild 11, das sich auf konstante Streureaktanz bezieht, zu erwarten wäre.

2. Einzelpoldämpfung. Wir wollen noch für dieselbe Maschine das Dämpfungsmoment bei Einzelpoldämpfung berechnen. Der Rahmen um den Polschuh herum soll den gleichen Querschnitt haben wie die Ringe oben (642 mm²) und auch der Stabquerschnitt bleibe der gleiche (214 mm²).

Die gesamte Wicklungsbreite ist hier 133°, N ist gleich 8. Den Bildern 14 und 15 entnehmen wir

$$w_l^2 = 5{,}2 \qquad w_q^2 = 1{,}1.$$

Es ist

$$r_l = \frac{1}{57}\left(6\,\frac{27}{214} + 2\,\frac{27}{642} + 8\,\frac{36{,}8}{3 \cdot 642}\right) 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}0204 \cdot 10^{-2}\ \text{Ohm}$$

und

$$r_q = \frac{1}{57}\,2\left(5\,\frac{27}{214} + \frac{27}{642} + 6\,\frac{36{,}8}{6 \cdot 642}\right) 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}0299 \cdot 10^{-2}\ \text{Ohm}.$$

Somit nach Gleichung (52)

$$L_{d\,max} = 3560\left(\frac{5{,}2}{0{,}0204}\,0{,}0586 + \frac{1{,}1}{0{,}0299}\,0{,}941\right) = 53 + 123 = 176\ \text{kW},$$

dies entspricht 2,5% bzw. 5,9%, zusammen 8,4% der Maschinenleistung. Trotz der viel größeren effektiven Windungszahl der Längswicklung liefert auch hier den größten Teil des Dämpfungsmomentes die Querwicklung, weil der Winkel Θ_m klein ist.

Vergleichen wir die Größe des Dämpfungsmomentes hier mit dem, das die Käfigwicklung erzeugt, so sehen wir, daß durch die Wirkung des Polschuhrahmens das Moment der Längswicklung 2,3 mal größer geworden ist, das Dämpfungsmoment der Querwicklung ist hier aber nur etwa 40% von dem Dämpfungsmomente der Querwicklung der Käfigwicklung.



Rechnung und Versuch bei der scheibenförmigen Wirbelstrombremse.

Von

W. Zimmermann, Dipl.-Ing.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

1. Geschichtliche Übersicht und Ziel.

Die Wirbelstrom-Bremse wird heute vielfach zur Bremsung von Elektrizitäts-Zählern (Motorzählern) und zur Dämpfung von Meßinstrumenten verwendet. Sie hatte früher auch eine gewisse Bedeutung zur Leistungsbestimmung kleiner und mittlerer Kraftmaschinen. Hier ist sie jedoch in neuerer Zeit durch die Pendeldynamo und das von Vieweg und Keinath verbesserte Torsionsdynamometer verdrängt worden.

Sowohl Pendeldynamo wie Torsionsdynamometer haben vor der Wirbelstrom-Bremse den Vorzug der Wirtschaftlichkeit, da sie die Rückgewinnung der abgebremsten Energie ermöglichen, die bei der Wirbelstrom-Bremse verloren geht.

Die Wirbelstrom-Bremse hat die angenehme Eigenschaft, daß anfänglich ihr Bremsmoment proportional der Drehzahl steigt. Infolgedessen eignet sie sich zur Belastung von Elektrizitäts-Zählern, da umgekehrt ihre Drehzahl als Maß für das Drehmoment des Zählermotors genommen werden kann.

Diese Proportionalität gilt aber nur innerhalb einer gewissen Grenze. Wie Theorie und Beobachtung ergeben, steigt die Bremskraft nur für kleine Geschwindigkeiten proportional an, bei weiter gesteigerter Geschwindigkeit erreicht die Bremskraft ein Maximum (kritische Geschwindigkeit, kritische Bremskraft) und nimmt dann für noch größere Geschwindigkeiten wieder ab (Bild 1).

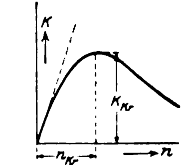


Bild 1. Die Bremskraft der Wirbelstrombremse in Abhängigkeit von der Drehzahl des Bremskörpers.

Bei der großen Bedeutung, welche die Wirbelstrom-Bremse in der Technik hat, ist es nicht zu verwundern, daß sich eine Anzahl von Autoren mit der genaueren Berechnung ihrer Bremskraft befaßt haben.

Eine allgemeine, d. h. für alle Geschwindigkeiten gültige Behandlung des Problems finden wir in den Arbeiten von Hertz[1]), Gans[2]), Abraham und Rüdenberg[3]). Gerade aus diesen Arbeiten wissen wir, daß bei höherer Geschwindigkeit die Bremskraft, wie oben mitgeteilt, nach Überschreitung eines Maximums abfällt. Was die Art dieses Abfalles anbetrifft, finden diese Forscher übereinstimmend für die „massive" Wirbelstrom-Bremse, daß er proportional $\frac{1}{\sqrt{v}}$ ($v =$ Geschwindigkeit des Bremskörpers) verläuft.

Rüdenberg, der in einer weiteren Arbeit[4]) auch die „scheibenförmige" Wirbelstrombremse behandelt, findet für diese den Abstieg proportional $\frac{1}{v}$ gehend.

Der Grund dieses Unterschiedes liegt scheinbar darin, daß bei der massiven Wirbelstrom-Bremse das Magnetfeld den Bremskörper bogenförmig durchsetzt, während bei der scheibenförmigen Bremse das anregende magnetische Feld quer durch das bandförmig gedachte Metall hindurchtritt.

[1]) H. Hertz, Ges. Werke Bd. I, S. 37.
[2]) R. Gans, Zeitschr. für Math. u. Physik 1902, Bd. 48, S. 1; Arch. f. E., IX. Bd., S. 413.
[3]) Sammlung Elektrot. Vorträge, Bd. X, S. 269.
[4]) a. a. O.



Der Rüdenbergsche Ansatz für die scheibenförmige Bremse entspricht angenähert den Verhältnissen, wie sie bei der Zählerbremse und den von mir untersuchten Bremsen vorliegen. Auf ihn allein soll deshalb näher eingegangen werden.

Wir haben einen bandförmigen, schienenartigen Leiter, der durch das Feld einer Reihe von Wechselpolen bewegt wird (Bild 2). Die Pole schließen sich dicht aneinander, so daß der ganze Raum zu beiden Seiten des Bandes bis auf den schmalen Luftspalt von Eisen ausgefüllt zu denken ist. In diesem Luftspalt ist das Feld sinusförmig verteilt.

Die Rüdenbergsche Bremskraftformel lautet: Die Bremskraft pro Pol

$$K = \frac{1}{4}\frac{d}{s} v B_1^2 \lambda^2 \cdot \frac{w}{\left(\frac{vl}{s}\right)^2 + w^2} \cdot 10^{-3} \text{ Gramm}$$

darin ist:

$$l = 4\frac{d}{\delta}\lambda$$

$$w = \frac{\tau}{\lambda} + \frac{\lambda}{\tau}$$

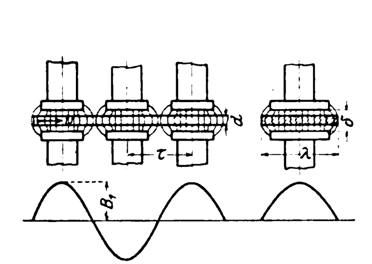


Bild 2. Von Rüdenberg untersuchte Bremsenanordnung.

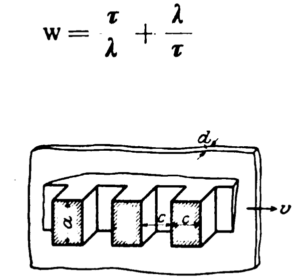


Bild 3. Von Beckmann untersuchte Anordnung.

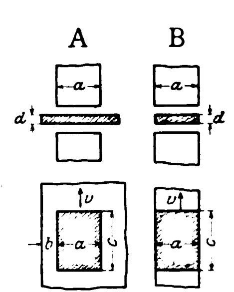


Bild 4. Von Rogowski untersuchte Anordnungen.

es bedeutet: v die Geschwindigkeit der Scheibe in cm/sec,
s den spezifischen Widerstand des Bremsscheibenmaterials in absolutem elektromagnetischem Maß.
B_1 die Amplitude der Induktion (Bild 2).

Das Maximum der Bremskraft ist festgelegt durch die beiden Formeln:

Kritische Bremskraft $K_{kr} = \frac{1}{32}\lambda\delta \cdot B^2 \cdot 10^{-3}$ Gramm.

Kritische Geschwindigkeit $v_{kr} = \frac{s \cdot w}{l} = \frac{1}{4}\frac{\delta}{d}\cdot\frac{s}{\tau}\left[1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2\right]$ cm/sec.

Die Rüdenbergsche Anordnung entspricht zwar auch nicht genau den in der Praxis vorkommenden Verhältnissen, denn sie setzt eine Raumausfüllung mit Eisen voraus, die im allgemeinen in praktischen Fällen nicht vorhanden ist; sie hat aber den großen Vorteil, daß sie eine für alle Geschwindigkeiten durchführbare Rechnung ermöglicht.

Von Interesse sind für uns weiter noch die Arbeiten von Beckmann und Rogowski, welche die Rückwirkung der Wirbelströmung vernachlässigen, sich also nur auf den proportionalen Anstieg der Bremskraftkurve erstrecken. Dagegen haben ihre Anordnungen den Vorteil, daß sie (namentlich die von Rogowski) den praktisch vorkommenden Fällen angepaßt sind.

Bei Beckmann[1]) (Bild 3) finden wir eine unendlich breite und unendlich lange metallische Platte, die sich vor einer Reihe von Gleichpolen verbeibewegt. Polbreite und Pollücke sind als gleich groß angenommen. B ist die Induktion vor

[1]) Diss. Hannover 1903.

dem Pol; B_0 die Induktion in der Pollücke. Unter diesen Voraussetzungen ermittelt Beckmann für die Bremskraft pro Pol folgenden Wert:

$$K = \frac{d}{s} \cdot v (B - B_0)^2 a^2 \cdot \frac{2{,}3026}{\pi} \log \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{c}{a}\right) 10^{-3} \text{ Gramm.}$$

Rogowski[1]) (Bild 4A) setzt eine zwar einseitig begrenzte, aber auch noch im Verhältnis zur Abmessung der Polfläche unendlich breite Platte voraus. Auf diese wirkt nicht wie bei Beckmann eine Reihe, sondern nur ein einziger Pol. Von Streuung wird abgesehen. Unter diesen Bedingungen findet Rogowski für die Bremskraft den Wert $K = \frac{d}{4\pi s} v \cdot a^2 B^2 [L - M] \cdot 10^{-3}$ Gramm.

Die Größen L und M sind Funktion der Abmessungen a, b, c (Bild 4). Ihre Abhängigkeit hat Rogowski analytisch und durch je 2 Kurvenblätter festgelegt, indem er 2 Fälle des Verhältnisses der Polabmessungen a und c unterscheidet: 1. $\frac{c}{a} \leqq 1$, 2. $\frac{c}{a} < 1$. In einer weiteren, noch nicht veröffentlichten Arbeit, die Herr Professor Rogowski die Liebenswürdigkeit hatte, mir zur Verfügung zu stellen, wird ein schmales Band angenommen, das sich unter einem Einzelpol bewegt. Hiermit ist ziemlich genau die Anordnung der Siemens-Bremse getroffen, während die erste Formel mehr für die Bremse eines Zählers zugeschnitten ist. Unter den aus Bild 4B ersichtlichen Verhältnissen berechnet Rogowski in diesem Falle die Bremskraft:

$$K = \frac{d}{s} v B^2 \cdot a^2 \cdot 0{,}26 \left(1 - e^{-2\pi \frac{a}{c}}\right) \cdot 10^{-3} \text{ Gramm.}$$

Es soll nochmals hervorgehoben werden, daß sowohl die Formel von Beckmann wie die von Rogowski nur für niedrige Geschwindigkeiten, d. h. vernachlässigte Rückwirkung der Wirbelströmung auf das induzierende Feld gültig sind.

Auch experimentell ist in einigen Fällen die Bremskraft der scheibenförmigen Wirbelstrom-Bremse bestimmt worden. Beckmann[2]) vergleicht seine Formel mit den Messungen an scheibenförmigen Wirbelstrombremsen.

Verändert hat er lediglich die aufgedrückte Induktion im Luftspalt und die quadratische Beziehung zwischen dieser und der Bremsleistung bzw. Bremskraft festgestellt. Dabei bleibt die Geschwindigkeit der Bremsscheibe weit unterhalb der kritischen. Er findet, daß seine Formel mit der Messung nicht unmittelbar übereinstimmt, sondern Korrektionsfaktoren erfordert, die von den Abmessungen der Bremse abhängig sind. Sie liegen in den Grenzen: 0,62 — 0,99.

Kempe[3]) hat experimentelle Untersuchungen über den Unterschied der Bremsleistung bzw. Bremskraft bei Gleich- und Wechselstromerregung einer scheibenförmigen Wirbelstrom-Bremse angestellt. Außer dem Ergebnis, daß bei gleicher Induktion die Wechselfeld-Bremswerte etwa 6% unterhalb der Gleichstrom-Bremswerte liegen, stellt er auch den für kleine Geschwindigkeiten proportionalen Anstieg und die quadratische Beziehung zwischen Bremskraft und Induktion fest. Er bleibt ebenso wie Beckmann aber weit unterhalb der kritischen Geschwindigkeit.

Cady und Benedikt[4]) haben an einer scheibenförmigen Wirbelstrom-Bremse (die in Form und Größe der Pasqualini-Bremse gleich kommt) rein qualitativ das für die Wirbelstrom-Bremse allgemein charakteristische Abfallen der Bremskraft oberhalb der kritischen Drehzahl festgestellt. Außerdem haben sie die Verzerrung der Feldkurve der Bremse in der Richtung der Bewegung durch die Rotation der Bremsscheibe mit Hilfe einer Wismut-Spirale untersucht und bringen einige Kurven darüber,

[1]) Arch. f. E., Bd. I, S. 205.
[2]) a. a. O.
[3]) Diss. Hannover 1914/15.
[4]) Phys. Zeitschr. 1912, Bd. 13, S. 920.

die aber ziemlich unvollständig sind. Qualitativ kommen sie zu ähnlichen Ergebnissen in Bezug auf die Verschiebung der Wirbelströmung, wie sie meine nachfolgenden Untersuchungen noch ausführlich bringen werden.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine Arbeit von Bäumler erwähnt. Er hat, wie v. Krukowski[1]) angibt, experimentell den Verlauf von Wirbelströmungen in plattenförmigen Leitern in Form von Kraftlinienbildern ermittelt. Dabei geht er aus von der Analogie zwischen den durch einen elektrischen Strom erzeugten magnetischen Kraftlinien und der von einem Induktionsfluß erzeugten elektrischen Strömung[2]). Er benutzt dazu ein System von parallelen Leitern, durch welche er Ströme schickt. Die von diesen Strömen erzeugten magnetischen Kraftlinien geben dann den Verlauf derjenigen Wirbelströmung wieder, welche durch ein in Richtung der Ströme die Scheibe durchsetzendes magnetisches Feld hervorgerufen werden würde. Im wesentlichen beziehen sich die Untersuchungen auf von Wechselflüssen induzierte Wirbelströme. Es wird jedoch auch ein Bild gebracht, welches die von einem zeitlich konstanten Fluß in der bewegten Bremsscheibe induzierte Wirbelströmung darstellt. Die Analogie besitzt aber nur Gültigkeit für kleine Geschwindigkeiten, bei denen die Rückwirkung der Wirbelströmung zu vernachlässigen ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die experimentellen Unterlagen über die Bremskraft scheibenförmiger Wirbelstrom-Bremsen recht dürftig sind. Es ist zwar die Proportionalität des Anstiegs der Bremskraft für kleine Geschwindigkeiten und die quadratische Beziehung zwischen der Induktion im Luftspalt und der Bremskraft von Beckmann und Kempe experimentell festgestellt worden. Über den Einfluß der Größe des Luftspaltes, der Scheibendicke und des spezifischen Widerstandes des Bremsscheibenmateriales liegen jedoch bisher keinerlei Untersuchungen vor.

Auch kann von einer systematischen Prüfung der rechnerisch ermittelten Formeln bisher keine Rede sein.

Bei der Berechnung von Zählerbremsen wird das Hauptinteresse nicht nur bei der Größe der Bremskraft liegen, sondern der Konstrukteur wird sich auch fragen müssen, bis zu welcher Geschwindigkeit er sich auf den proportionalen Anstieg verlassen kann. Mit andern Worten: Er braucht die kritische Drehzahl der Bremse.

Die Frage, wieweit er für diesen Zweck die Rüdenbergsche Formel zu Rate ziehen kann, wird in der Literatur nirgends beantwortet. Bei dieser Unsicherheit kann es als eine noch zeitgemäße Aufgabe angesehen werden, wenn im folgenden eine experimentelle Prüfung des vorhandenen theoretischen Materials unternommen wird. Dabei habe ich mich nicht nur auf Bremskraft und kritische Geschwindigkeit selber beschränkt, sondern auch versucht, die Veränderung des anregenden Feldes durch die Wirbelströmung, die ja die Ursache des Abbiegens der Bremskraftkurve ist, experimentell zu untersuchen.

2. Beschreibung der untersuchten Bremsen.

Meine Messungen wurden ausgeführt an:

1. einer Pasqualini-Bremse (Modell B. maximal 8 Ps.) Bild 5 A.
2. einer Siemens-Bremse größerer Bauart (maximal 2 Ps.) Bild 5 B.

Die Scheiben der Pasqualini-Bremse haben die Abmessungen:

Außendurchmesser:	350 mm
Bohrungsdurchmesser:	30 mm

Die Ringe der Siemens-Bremse:

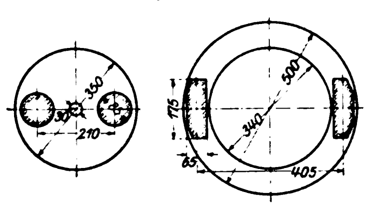
Außendurchmesser:	500 mm
Innendurchmesser:	340 mm.

[1]) „Vorgänge in der Scheibe eines Induktionszählers" 1920 (Springer).

[2]) Auf diese Analogie hat in der Literatur zuerst Rogowski hingewiesen (E. u. M. Bd. 29, S. 915, und Arch. f. E. Bd. I, S. 205) und für den Zählerbau praktische Folgerungen aus ihr gezogen.

Auf das Jochstück der Pasqualini-Bremse, das ursprünglich glatt war, wurden für die Untersuchung gegenüber den Magnetpolen kreisförmige Platten vom Durchmesser der Pole aufgeschraubt. Durch Hinzufügen und Abnehmen dieser Platten konnte die Größe des Luftspaltes in einfacher Weise verändert werden. Benutzt wurden die Luftspalte 15, 19, 23, 27, 30,5 und 34 mm, was einer Änderung zwischen kleinstem und größtem Wert von rund 125 % entspricht. Die Siemens-Bremse ist schon konstruktiv so eingerichtet, daß ihr Luftspalt sich stetig verändern läßt, dadurch, daß ihr Joch gegen die Pole verschiebbar ausgeführt ist. Bei ihr konnte der Luftspalt in den Grenzen 18—24 mm, also um rund 33 % geändert werden.

Als Drehzähler wurde eine kleine fremderregte Gleichstromdynamo benutzt, die mit dem die Bremsscheibe treibenden Motor direkt gekuppelt war.



A Pasqualini-Bremse B Siemens-Bremse
Bild 5. Anordnung der untersuchten Bremsen.

3. Berechnung der Bremskraft für kleine Geschwindigkeiten (Anstieg) und Vergleich mit der gemessenen.

Im folgenden will ich jetzt für unsere beiden Bremsen die Bremskraft pro Pol nach den Formeln der verschiedenen Autoren berechnen und sie mit den gemessenen Werten vergleichen.

Dazu ist außer den geometrischen Abmessungen der Bremsapparate, welche aus der vorangegangenen Beschreibung zu entnehmen sind, noch die Kenntnis der

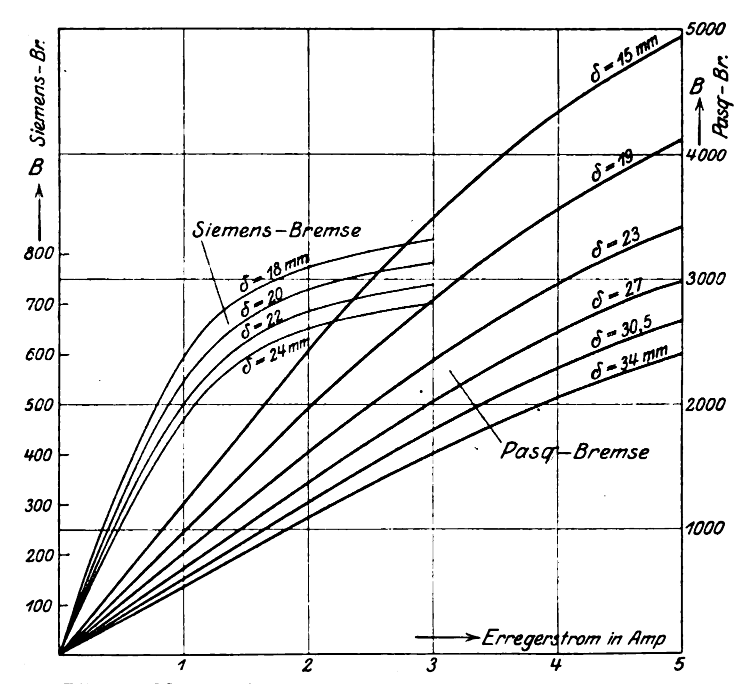


Bild 6. Magnetisierungskurven der untersuchten Bremsen.

Induktion B im Luftspalt und des spezifischen Widerstandes s der Bremsscheibenmaterialien erforderlich. B und s sollen daher zunächst bestimmt werden.

a) Bestimmung von B. Um die Induktion für jede Erregerstromstärke und jeden Luftspalt δ ein für allemal festzulegen, habe ich die Magnetisierungskurven der beiden Bremsen für verändertes δ aufgenommen. Auf diese Weise gewinne ich



gleichzeitig Aufschluß über die Sättigungverhältnisse des Eisens im Feld der Bremse. Die Magnetisierungskurven wurden in folgender Weise aufgenommen. Bei abgenommener Bremsscheibe wurde eine Meßspule aus einer Windung dünnen Drahtes jeweils in die Mitte des Luftspaltes gebracht. Die Spule hatte den Durchmesser des Poles bzw. für die Siemens-Bremse die Form des Polschuhs. Mit dem ballistischen Galvanometer wurden dann die beim Kommutieren des Erregerstromes in der Spule induzierten Integralströme gemessen (Bild 6).

b) Die Bestimmung der spezifischen Widerstände wurde mit Hilfe einer Strom- und Spannungsmessung an Drähten von etwa 1 m Länge und 0,5 mm Durchmesser, welche aus Proben der einzelnen Materialien[1]) gezogen waren, vorgenommen. Unter der Voraussetzung vollkommen gleichmäßigen Materiales ergeben sich die aus der nachstehenden Tabelle ersichtlichen Werte für die spezifischen Widerstände in absoluten elektromagnetischen Einheiten.

	Kupfer	Aluminium	Rotmessing	Messing	Aluminiumbronze
P.-Br.	1920	3050	4130	8770	11900
S.-Br.	1880	3050	—	8580	11900

Aus der vorstehenden Tabelle und den Magnetisierungskurven sind nun alle für die Berechnung der Bremskraft erforderlichen Größen gegeben.

Für die Rechnung ist es bequem, die Formeln in der aus der nachstehenden Zusammenstellung ersichtlichen Weise zu schreiben.

Rüdenberg $K = \frac{d}{s} v B^2 \lambda^2 \quad \frac{1}{4} \frac{w}{\left(\frac{vl}{s}\right)^2 + w^2}; \qquad w = \frac{\tau}{\lambda} + \frac{\lambda}{\tau}$

$l = 4 \frac{d}{\delta} \lambda$

Beckmann $K = \frac{d}{s} v (B - B_0)^2 \cdot a^2 \quad \frac{2{,}3026}{\pi} \log \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{c}{a}\right)$

Rogowski I $K = \frac{d}{s} v B^2 a^2 \quad \frac{L - M}{4\pi}$

Rogowski II $K = \frac{d}{s} v B^2 \cdot a^2 \quad 0{,}26 \left(1 - e^{-2\pi \frac{c}{a}}\right)$

Grundsätzlich ist der Aufbau des ersten Teiles der Formeln: $\frac{d}{s} \cdot v B^2 a^2$, den ich mit α bezeichnen will, bei allen Autoren derselbe.

Aus α rechnet sich die Bremskraft durch Multiplikation mit einer für kleine Geschwindigkeiten nur von den bei unseren Messungen unveränderlichen Polabmessungen a und c (bzw. λ und τ) abhängigen Größe, die ich mit β bezeichnen will.

Dabei ist folgendes zu beachten. Die Rüdenbergsche Formel, die ja für alle Geschwindigkeiten gilt, müssen wir für diesen Vergleich, der sich zunächst nur auf den Anstieg der Bremskraftkurve, also kleine Geschwindigkeiten, bezieht, noch für diese spezielle Bedingung herrichten. Es wird für kleines v der Bruch $\left(\frac{vl}{s}\right)^2$ klein gegen w^2, so daß wir schreiben können: $\beta = \frac{w}{4 w^2} = \frac{1}{4 w}$. Ferner stehen im Gegensatz zu Beckmann und Rogowski in der Rüdenbergschen Formel nicht die Polabmessungen a und c, sondern die Plattenbreite λ und die Polteilung τ. Die Plattenbreite ist nun bestimmt durch die Grenzen, in welchen das Feld den Luftspalt in radialer Richtung durchsetzt (Bild 2). Wir sehen für unsere Rechnung von Streuung ab und setzen für λ die Polabmessung a ein. Es fragt sich nun noch, welchen Wert wir für die Polteilung τ einzusetzen haben. Gemeint ist mit τ bei Rüdenberg

[1]) Die Materialien stellte die Fa. Basse & Selve (Altena) liebenswürdigerweise zur Verfügung.

der Abstand der Mitten zweier aufeinanderfolgender Pole, gemessen auf der Mittellinie des Bremsbandes. Diese Größe für unsere Bremsen mit zwei ungleich weit auseinander stehenden Polen einzuführen, hieße der Formel zu große Gewalt antun. Wir würden dann für eine Bremse mit 2 Polen rechnen, die sich über fast die Hälfte unserer Bremsscheiben ausdehnten, also den tatsächlich vorhandenen Polabmessungen auch nicht annähernd mehr entspräche. Viel näher kommen wir den praktisch gegebenen Verhältnissen, wenn wir an Stelle von τ die tangentiale Pol- bzw. Polschuhabmessung c einführen. Wir rechnen dann zwar für eine gleichmäßig im Abstande c über die Bremsscheibe verteilte Reihe von Polen; diese haben aber im einzelnen die tatsächlich an unsern Bremsen vorhandenen Abmessungen.

Für die Amplitude B_1 der sinusförmig verteilt angenommenen Induktion in der Rüdenbergschen Formel setzen wir den aus unsern Magnetisierungskurven gewonnenen Mittelwert.

Das Beckmannsche Streufeld vernachlässigen wir, setzen also $B_0 = 0$.

Unter diesen Voraussetzungen ist zunächst im folgenden der Wert für β nach den einzelnen Autoren bestimmt worden.

1. Rüdenberg: $\beta = \frac{1}{4u}$, wenn $u = \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$ $\left(\text{anstatt } w = \frac{\tau}{\lambda} + \frac{\lambda}{\tau}\right)$

	c	a	$\frac{c}{a}$	$\frac{a}{c}$	u	$\beta = \frac{1}{4u}$
Pasq.-Bremse	8,5	8,5	1	1	2,0	0,125
Siem.-Bremse	17,5	6,5	2,7	0,371	3,07	0,0813

2. Beckmann $\beta = \frac{2,3026}{\pi} \log\left(1 + \frac{c}{a}\frac{\pi}{2}\right)$

	c	a	$\frac{\pi}{2}\frac{c}{a}$	$1 + \frac{\pi}{2}\frac{c}{a}$	$\log\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{c}{a}\right)$	$\beta = \frac{2,3026}{\pi} \log\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{c}{a}\right)$
Pasq.-Bremse	8,5	8,5	1,57	2,57	0,41	0,3
Siem.-Bremse	17,5	6,5	4,23	5,23	0,72	0,528

3. Rogowski I: $\beta = \frac{L - M}{4\pi}$.

Die Werte für L und M wurden den in Rogowskis Arbeit befindlichen Kurven entnommen.

	c	a	$y = \frac{c}{a}$	L	b	$l = a + 2b$	$z = \frac{c}{l}$	$\frac{a}{l}$	M	L — M	$\beta = \frac{L - M}{4\pi}$
Pasq.-Bremse	8,5	8,5	1	6,3	2,22	12,9	0,656 $z' = \frac{l}{c}$	0,656	0,84	5,46	0,435
Siem.-Bremse	17,5	6,5	2,69	6,5	0,75	8,0	0,456	0,813	0,34	6,16	0,49

4. Rogowski II: $\beta = 0,26\left(1 - e^{-2\pi\frac{c}{a}}\right)$

	c	a	$2\pi\frac{c}{a}$	$e^{2\pi\frac{c}{a}}$	$e^{-2\pi\frac{c}{a}}$	$1 - e^{-2\pi\frac{c}{a}}$	$\beta = 0,26 \times \left(1 - e^{-2\pi\frac{c}{a}}\right)$
Pasq.-Bremse	8,5	8,5	6,28	131,9	0,00758	0,993	0,258
Siem.-Bremse	17,5	6,5	16,9	498 200	$2 \cdot 10^{-6}$	1,0	0,26

Schmale oder breite Pole?

Für den Entwurf von Zählerbremsen ist es ganz interessant, in dem Gebiet des proportionalen Anstieges die einzelnen Formeln miteinander zu vergleichen in Bezug auf die Änderung der Bremskraft mit der Polbreite c.

Ich habe dazu Bild 7 entworfen. Aus diesem ergibt sich folgendes: Nach Rüdenberg erreicht die Bremskraft ein Maximum für quadratische Polform und fällt dann bei weiterer Verbreiterung des Poles ab. Nach Beckmann steigt sie dauernd mit der Verbreiterung des Poles an. Nach Rogowski erreicht sie einen konstanten Wert.

Das letzte ist wohl das wahrscheinlichere, da sich bei kleinen Geschwindigkeiten die Wirbelströmung in der Nähe der Polkanten (ablaufende und auflaufende) befindet, muß, wenn die Polkanten so weit auseinander geschoben sind, daß sich die Strömungen an der ablaufenden und auflaufenden Kante nicht mehr beeinflussen können, die Bremskraft schließlich unabhängig von der Polbreite werden.

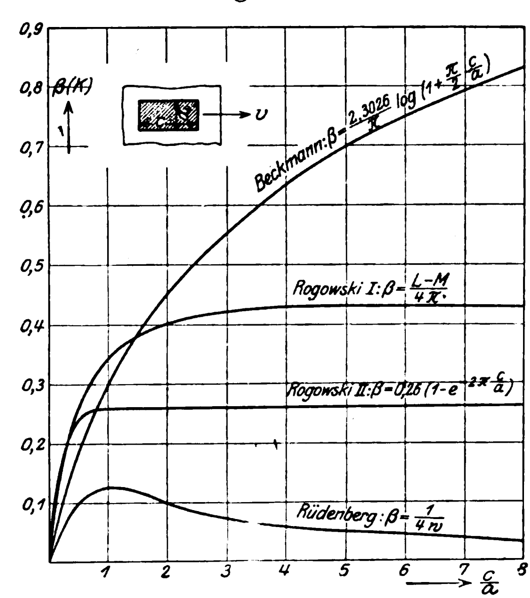


Bild 7. Änderung der Bremskraft mit der Polbreite.

Um die Widersprüche in den Formeln der verschiedenen Autoren zu klären, wäre es erwünscht, wenn in dieser Richtung hin experimentelle Untersuchungen angestellt würden.

Für die Berechnung bedeutet dies, daß man mit verhältnismäßig schmalen Polen bei kleinen Geschwindigkeiten dieselbe Bremskraft erreichen wird wie bei breiten Polen. Aber es ist zu erwarten, daß das Gebiet des proportionalen Anstieges bei breiteren Polen viel weiter hinausgezogen wird als wie bei schmalen, d. h. breite Pole eine höhere kritische Drehzahl zur Folge haben.

Nach dieser Abschweifung kehren wir wieder zu unserer Rechnung zurück.

Die Werte für β sind in der nachstehenden Tabelle, wie sie sich aus den Formeln der einzelnen Autoren ergeben, zusammengestellt.

	Pasqualini-Bremse	Siemens-Bremse
	β	β
Rüdenberg	0,125	0,081
Beckmann	0,3	0,528
Rogowski I	0,435	0,49
Rogowski II	0,258	0,26

Im folgenden soll nun zum Vergleich zwischen Rechnung und Messung nicht unmittelbar die Bremskraft, sondern die Größe β, welche sich als Quotient $\beta = \frac{K}{\alpha}$ schreiben läßt, benutzt werden. Nach den Formeln soll β lediglich ein Funktion der Polabmessungen a und c sein; da diese bei unsern Messungen nicht geändert wurden, so muß β also für ein und dieselbe Bremse eine Konstante sein.

Diesem rein aus den Abmessungen der Bremse gerechneten β können wir nun

ein aus der gemessenen Bremskraft K′ mit Hilfe der Beziehung $\beta' = \frac{K'}{\alpha}$ ermitteltes β' gegenüberstellen.

Ergibt sich aus den Messungen bei veränderten Werten von δ, d, s und B für β' eine Konstante, so geht daraus notwendig hervor, daß der Aufbau des Faktors $\alpha = \frac{d}{s} v \cdot B^2 \cdot a^2$ der Bremskraftformeln die Abhängigkeit der Bremskraft von den Größen δ, d, s und B richtig wiedergibt. Würde schließlich β' mit β übereinstimmen, so würde auch die funktionelle Abhängigkeit von den Polabmessungen richtig getroffen sein. Ergeben sich Unterschiede, so können diese günstigsten Falles konstant sein, oder aber sie sind, was wahrscheinlicher ist, eine Funktion der Polabmessungen.

Die für β' aus den Messungen für veränderte Größe von δ, d, s und B ermittelten Werte sind in der nachstehenden Tabelle für eine genügend kleine Drehzahl (n = 50) zusammengestellt.

Dabei ist bei der Pasqualini-Bremse jedoch zu beachten, daß ihre Polfläche ein Kreis ist, während die Rechnung für ein Quadrat, deßen Seitenlänge gleich dem Durchmesser dieses Kreises ist, also eine größere Fläche gilt.

Es wird daher beim Vergleich der Unterschied des Flächeninhaltes zwischen Kreis und Quadrat zu berücksichtigen sein. Wir werden darum näherungsweise die gemessene Bremskraft K′ für die Pasqualini-Bremse im Verhältnis $\frac{d^2}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4}{\pi} = 1{,}275$ vergrößern müssen.

	n	$V_{m/sec}$	δ_{cm}	d_{cm}	s_{abs}	B	α	K'_{gr}	$\frac{K'}{\alpha} = \beta'$	$\beta' \cdot 1{,}275$
Pasqualini-Bremse	50	0,575	2,7	1,2	1935	1640	6950	2000	0,288	0,368
	„	„	„	„	3050	„	4410	1270	0,3	0,382
	„	„	3,4	1,2	4160	1700	3480	1000	0,289	0,369
	„	„	1,9; 2,3 2,7; 3,4	0,8	„	1800	2590	728	0,294	0,375
Siemens-Bremse	50	1,06	2,2; 2,4	0,7	1880	595	595	143	0,237	
	„	„	1,8; 2,0	„	3050	„	351	84	0,24	
	„	„	„	0,3	1880	„	255	59,3	0,233	
	„	„	„	0,7	1880	660	730	178	0,242	

Wie die Tabelle zeigt, können wir für kleine Geschwindigkeiten β' genügend genau als von α, d. h. δ, d, s und B unabhängig ansehen. Damit wäre zunächst die grundsätzliche Gültigkeit des Aufbaus von α bis auf die Polabmessung a, die wir nicht verändert haben, nachgewiesen.

Wenn sich nun ein Unterschied zwischen gemessener und gerechneter Bremskraft ergibt, so muß dieser auf den Teil β unserer Bremskraftgleichungen, also den Einfluß der Polabmessungen zurückzuführen sein.

Das Verhältnis der gemessenen zur gerechneten Bremskraft, d. h. die Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung ist uns nun, weil $K' = \alpha \beta'$ und $K = \alpha \beta$ ist, direkt aus dem Verhältnis $\frac{\beta'}{\beta}$ gegeben.

Es ist in der nachfolgenden Tabelle für beide Bremsarten nach den einzelnen Autoren aufgeführt.



	Pasqualini-Bremse			Siemens-Bremse		
	β'	β	$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{K'}{K}$	β'	β	$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{K'}{K}$
Rüdenberg	0,372	0,125	2,97	0,241	0,0813	2,96
Beckmann	"	0,3	1,23	"	0,528	0,456
Rogowski I	"	0,435	0,846	"	0,49	0,493
Rogowski II	"	0,258	1,425	"	0,26	0,93

Der Vergleich zeigt, daß die Rüdenbergsche Formel die größte Abweichung ergibt. Die gemessene Bremskraft ist etwa 3 mal so groß wie die gerechnete. Das stimmt mit dem zu Erwartenden überein, da ja der Rüdenbergschen Rechnung eine sinusförmige Feldverteilung unter dem Pol zugrunde gelegt ist, während in Wirklichkeit bei unseren Bremsen das Feld daselbst konstant ist.

Die Beckmannsche Formel stimmt für die Pasqualini-Bremse angenähert, gibt aber bei der Siemens-Bremse ebenfalls außerordentlich starke Abweichungen. Auch dies ist durch die der Beckmannschen Formel zu Grunde liegende Voraussetzung gerechtfertigt. Die breite Scheibe der Pasqualini-Bremse kommt dem Fall einer unendlich großen Platte weit näher als das schmale Metallband bei der Siemens-Bremse.

Man sollte annehmen, daß bei der Pasqualini-Bremse die Rechnung von Beckmann auf einen höheren Wert führt als die Messung; denn in der Rechnung wird angenommen, daß eine unendlich breite Platte vorhanden ist, während in Wirklichkeit doch nur eine begrenzte Scheibe vorhanden ist. Die Messung ergibt aber einen noch etwas größern Wert als den gerechneten, wenn auch der Unterschied nicht grade bedeutend ist (23%). Wahrscheinlich ist dies darauf zurückzuführen, daß der Verlauf der Bahnen der Wirbelströmung von Beckmann nur angenähert richtig getroffen wird und daß aus diesem Grunde sein Wert kleiner ausfällt als bei streng richtiger Durchführung des von ihm idealisierten Problems. Anscheinend überwiegt bei der Pasqualini-Bremse der letze Umstand.

Für die Siemens-Bremse muß natürlich die Formel von Beckmann zu große Werte ergeben, da ja der Wirbelströmung bei bandförmiger Scheibe ein größerer Widerstand entgegenwirkt als bei unendlich breiter Platte.

Von den Rogowskischen Formeln ist die erste ziemlich gut für die Pasqualini-Bremse, die zweite für die Siemens-Bremse zugeschnitten. Wir sehen, daß in diesen Fällen auch eine gute Übereinstimmung erzielt wird. Die Abweichung beträgt 15 bezw. 7%.

Wendet man die Formel I von Rogowski auch auf die Siemens-Bremse an, für die sie ja nicht zugeschnitten ist, so ergibt sich eine größere Abweichung aus dem einfachen Grunde, weil in der Rechnung eine viel größere Platte angenommmen ist, als in Wirklichkeit vorhanden ist. Das Entsprechende gilt umgekehrt für die Anwendung der Formel II auf die Pasqualini-Bremse. Hier rechnet man für einen bandförmigen Ring, während eine Platte vorhanden ist.

Aus unsern Versuchen können wir nun zusammenfassend folgenden Schluß ziehen. Für die Vorausberechnung von Zählerbremsen (d. h. diesen ähnlichen) kommen in erster Linie die Formeln von Rogowski in Betracht. Die Formel von Beckmann gibt für den Fall einer Kreisscheibe befriedigende Werte, wenigstens bei quadratischen oder kreisförmigen Polen. Die Abweichung nach Rüdenberg ist aber zu groß, als daß man seine Formel mit der für unsere Einzelpolbremse eingeführten Modifizierungen ohne Erfahrungsfaktoren auf die Praxis anwenden könnte.

Wenn auch die Rüdenbergsche Formel für kleine Geschwindigkeiten schlecht im Vergleich zu den übrigen abschneidet, so ist doch nicht zu bezweifeln, daß Rechnung und Experiment besser in Einklang stehen würden für Bremsen, auf welche

der Rüdenbergsche Ansatz ohne weiteres zu übertragen wäre. Aber auch für die Bremsen anderer Bauart (einzelpolige) gibt sie immerhin eine recht wertvolle Grundlage für einen Vergleich, wenn wir zu höheren Geschwindigkeiten gehen, da sie die einzige ist, die, wie bereits hervorgehoben, dort Gültigkeit hat.

4. Berechnung der Bremskraft über den proportionalen Bereich hinaus nach Rüdenberg und Vergleich mit der gemessenen.

In der nachstehenden Tabelle sind für je eine vollständige Bremskraftkurve der Pasqualini- und Siemens-Bremse die gerechneten Werte K mit den gemessenen K' zusammengestellt und ins Verhältnis gesetzt worden. Die entsprechenden Kurven sind durch Bild 8 wiedergegeben.

	n	K' (gemessen)	K (gerechnet)	$\frac{K'}{K}$	$\frac{K'}{K} \cdot 1{,}275$
	100	1450	622	2,33	2,96
	200	2540	1120	2,27	2,88
	300	3270	1425	2,28	2.9
	400	3680	1595	2.31	2,94
Pasqualini-Bremse	500	3900	1640	2.38	3,02
B = 1800	600	3860	1615	2.39	3,04
δ = 1,9 cm	700	3770	1560	2,42	3,07
d = 0,8 cm	800	3610	1431	2.52	3,20
$S_{abs.}$ = 4160	1000	3230	1315	2,45	3,11
	1200	2890	1170	2,47	3,14

	n	K' (gemessen)	K (gerechnet)	$\frac{K'}{K}$
	100	252	88,8	2,84
	200	450	147	3,06
	300	553	158	3,5
	400	593	156	3,8
Siemens-Bremse	500	593	146	4,06
B = 595	600	576	134	4,3
δ = 2,2 cm	700	549	123	4,46
d = 0,7 cm	800	514	112	4,59
$S_{abs.}$ = 1880	1000	450	94,6	4,76
	1200	398	82,2	4,84

Es zeigt sich, daß bei der Pasqualini-Bremse die Rüdenbergsche Funktion bis auf einen konstanten Faktor im ganzen Geschwindigkeitsgebiet den Verlauf der Bremskraft richtig wiedergibt. Die kritische Geschwindigkeit stimmt in der bei uns gegebenen Auslegung ohne weiteres mit der gerechneten überein. Der konstante Faktor ist praktisch gleich dem für kleine Geschwindigkeit gemessenen. Demnach gibt für der Pasqualini-Bremse ähnliche Bremsarten die Rüdenbergsche Formel unter Hinzufügung eines konstanten Faktors von der Größenordnung 3 die gemessene Bremskraftkurve richtig wieder.

Bei der Siemensbremse dagegen ist die gerechnete Bremskraftkurve nicht ohne weiteres durch einen konstanten Faktor in die gemessene überzuführen. Hier ist der Faktor eine Funktion der Geschwindigkeit. Die gemessene kritische Drehzahl liegt höher als die gerechnete. Offenbar rührt diese Abweichung bei der Siemens-Bremse daher, daß einerseits kein sinusförmig verteiltes, sondern ein konstantes anregendes Feld vorhanden ist; andererseits kann sich bei dem Rüdenbergschen

Idealfall infolge des eisenerfüllten Außenraumes das Feld der Rückwirkung viel ungehinderter und kräftiger ausbilden, als dies beim Einzelpol der Fall ist.

Die bis auf den konstanten Faktor bei der Pasqualini-Bremse vorhandene Übereinstimmung läßt sich dadurch erklären, daß hier in der breiten massiven Scheibe die Wirbelströmung sich stärker entwickeln muß, als in dem der Rüdenbergschen Rechnung zugrunde liegenden schmalen Metallband. Somit muß auch für den Einzelpol die kritische Drehzahl bei der Platte eher erreicht werden als beim Band.

Wenn wir also die Formel für die kritische Drehzahl auf die Pasqualini-Bremse anwenden, so liegt die Möglichkeit vor, daß die zunächst hier genau wie bei der

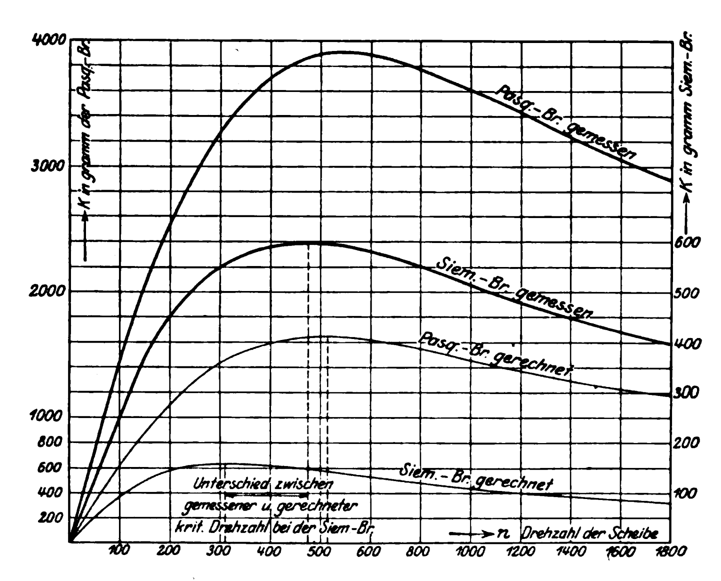


Bild 8. Vergleich zwischen gemessener und nach Rüdenberg gerechneter Bremskraft.

Siemens-Bremse infolge einer ungünstigeren Eisenverteilung geringere Wirbelstromrückwirkung in demselben Maße durch die breitere Scheibe erhöht wird, d. h. die kritische Drehzahl wieder heruntergedrückt wird.

Für die praktische Berechnung kann man nun zur Zeit nicht mehr angeben, als daß bei den Zählerbremsen etwa bis zu einem Viertel des nach Rüdenberg gerechneten n_{kr} mit Proportionalität zwischen Bremskraft und Geschwindigkeit auf etwa 3% gerechnet werden kann.

Aus der Konstanz des Faktors $\frac{K'}{K}$ bei der Pasqualini-Bremse für Geschwindigkeiten oberhalb der kritischen geht hervor, daß die Rüdenbergsche Formel in Bezug auf die Abhängigkeit der Bremskraft von der Geschwindigkeit auch für den Abstieg Gültigkeit hat, d. h. daß die Bremskraft proportional $\frac{1}{v}$ abfällt. Es besteht also für große Geschwindigkeiten bei der Pasqualini-Bremse die Beziehung:

$$K' = \text{Konstante} \cdot \frac{1}{v}$$

Ob diese Beziehung nun auch für die Siemens-Bremse erfüllt ist, wollen wir jetzt noch nachprüfen. Sie ist erfüllt, wenn für den Abfall der Bremskraft (große Geschwindigkeit) das Produkt aus dieser und der dazu gehörigen Geschwindigkeit konstant ist; wenn also die Beziehung besteht: $K' \cdot v = \text{Konstante}$.

	n	K′	K′ · n
Rotmessing;	1000	637	637 · 10³
d = 1,2	1200	541	650
δ = 1,9	1400	473	663
B = 2840	1600	418	670
	1800	372	670
	2000	336	672
	Pasqualini-Bremse		

n	K′	K′ · n	K′ $\sqrt{n}$	
700	549	384 · 10³	145 · 10²	Cu;
800	514	410	145	δ = 2,2
1000	450	450	142	B = 595
1200	398	478	138	d = 0,7
800	672	538 · 10³	190 · 10²	Cu 7
1000	588	588	186	δ = 1,8
1200	516	620	179	B = 700
1400	462	648	173	d = 0,7
Siemens-Bremse				

Wie die vorstehende Tabelle zeigt, geht bei der Pasqualini-Bremse tatsächlich der Abfall der Bremskraft genügend genau mit $\frac{1}{v}$. Bei der Siemens-Bremse dagegen ist diese Bedingung nicht erfüllt. Eine gute Annährung ergibt sich hier für: $K' \sqrt{v}$ = Konstante. Die Bremskraft fällt also bei der Siemens-Bremse mit $\frac{1}{\sqrt{v}}$ ab. Es besteht demnach für unsere beiden Bremsen, die doch grundsätzlich eine große

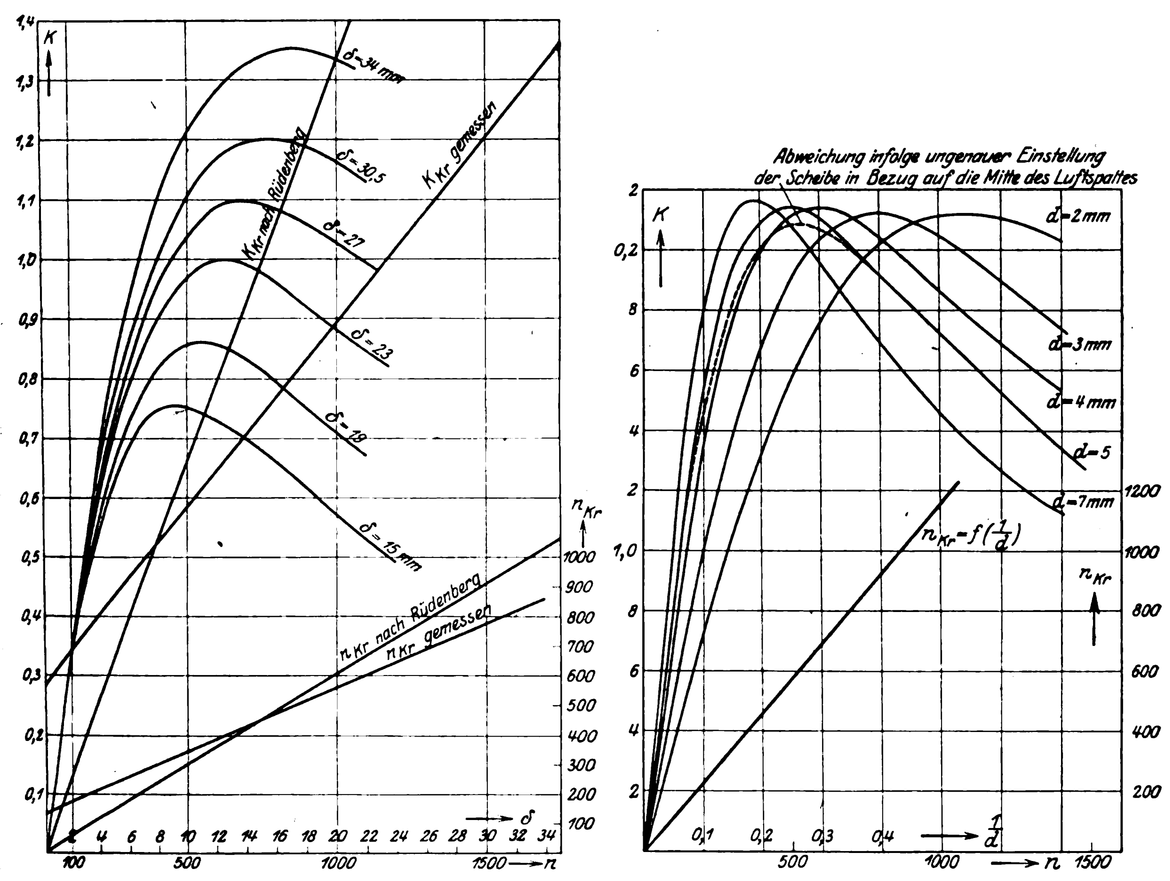


Bild 9. Verschiebung der Bremskraftkurve durch Änderung des Luftspaltes. (Pasqualini-Bremse); Material: Rotmessing, B = 1800; d = 0,8 cm.

Bild 10. Verschiebung der Bremskraftkurve durch Änderung der Scheibendicke. (Siemens-Bremse); Material: Kupfer, B = 595; δ = 1,8 cm.

Ähnlichkeit besitzen, ein wesentlicher Unterschied in der Art des Abfalles der Bremskraft. Die Siemens-Bremse zeigt für den Abfall eine Abhängigkeit der Bremskraft von der Geschwindigkeit, welche gut durch die von Rüdenberg und den eingangs erwähnten Autoren für die massive Wirbelstrombremse gefundene Beziehung wiedergegeben wird. Für den Abstieg, d. h. große Geschwindigkeiten ist die Rüdenbergsche Formel demnach auf unsere Bremsen mit weit auseinanderstehenden Polen nicht allgemein anwendbar, was die Abhängigkeit der Bremskraft von der Geschwindigkeit anbelangt.

Wir wollen nun noch untersuchen, inwieweit die Rüdenbergsche Formel den Einfluß der Größen: Luftspalt δ, Scheibendicke d, spezifischer Widerstand s und Induktion B auf die kritische Bremskraft und die kritische Drehzahl richtig wiedergibt.

a) Einfluß des Luftspaltes δ. Bild 9 zeigt die Verschiebung der Bremskraftkurve durch Veränderung des Luftspaltes.

Für sehr kleine Geschwindigkeiten ist der Luftspalt ohne Einfluß auf die Bremskraft. Das steht in Einklang mit der Theorie, da δ in den für den Anstieg

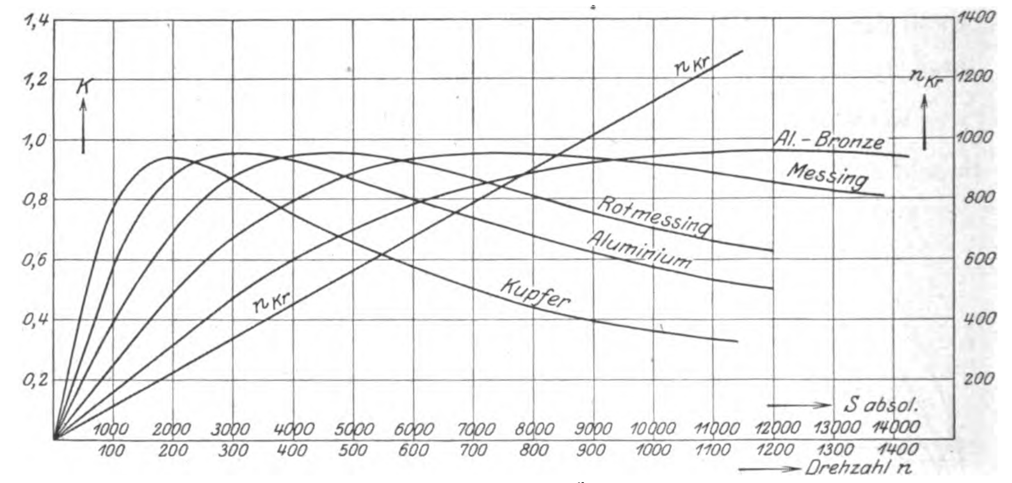


Bild 11. Verschiebung der Bremskraftkurve durch Änderung des spezifischen Widerstandes. (Pasqualini-Bremse); B = 1640; δ = 2,7 cm; d = 1,2 cm.

gültigen Formeln fehlt. Mit steigender Drehzahl findet eine Zunahme der Bremskrafterhöhung durch die Luftspaltvergrößerung statt. Die kritische Bremskraft nimmt mit zunehmendem Luftspalt linear zu. Nach Rüdenberg soll sie proportional mit δ gehen, da seine Formel lautet: $K_{kr} = \frac{1}{32} \lambda B^2 \delta$. Die Messung zeigt ein schwächeres als proportionales Anwachsen von K_{kr} mit vergrößertem δ. Die Erklärung für dieses Zurückbleiben ist darin zu suchen, daß bei unsern Bremsen der magnetische Widerstand des Rückwirkungsfeldes nicht überwiegend im Luftspalt liegt, wie bei Rüdenberg angenommen ist, sondern der Widerstand im Eisen gegen ihn in Betracht kommt. Damit ist die mit Vergrößerung von δ schwächer als proportional gehende Abnahme des Rückwirkungsfeldes begründet, welche die kritische Bremskraft mit δ langsamer als proportional zunehmen läßt. Die kritische Drehzahl nimmt ebenso wie die kritische Bremskraft mit δ linear zu. Nach Rüdenberg soll sie proportional mit δ gehen, weil:

$$V_{kr} = \frac{1}{4} \frac{\delta}{d} \frac{s}{\tau} \left[1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2\right].$$

Die Messung ergibt aber hier ebenso wie für die kritische Bremskraft ein langsameres Ansteigen. Die Ursache hierfür wird die gleiche sein, denn auch die kritische Drehzahl ist durch die Rückwirkung der Wirbelströmung bedingt.

b) Einfluß der Scheibendicke d. Aus Bild 10 ist die Verschiebung der Bremskraftkurve durch Veränderung der Bremsscheibendicke d zu ersehen.

Für sehr kleine Geschwindigkeiten geht, wie wir schon früher festgestellt haben, die Bremskraft proportional mit d. Mit wachsender Geschwindigkeit nimmt aber dann der Einfluß von d ab. Die kritische Bremskraft ist unabhängig von d. Das stimmt mit der Rüdenbergschen Formel für die kritische Bremskraft überein, da in ihr d fehlt. Oberhalb der kritischen Drehzahl schließlich kehrt sich der Einfluß von d um. Die Bremskraft nimmt dort zu für abnehmendes d. Diese Umkehr kommt in der Rüdenbergschen Formel zum Ausdruck, indem für große Werte von v die Bremskraft umgekehrt proportional d geht.

Die kritische Drehzahl nimmt mit abnehmendem d zu, bzw. sie geht proportional mit $\frac{1}{d}$, dem reziproken Wert von d, übereinstimmend mit der Rüdenbergschen Formel für v_{kr}.

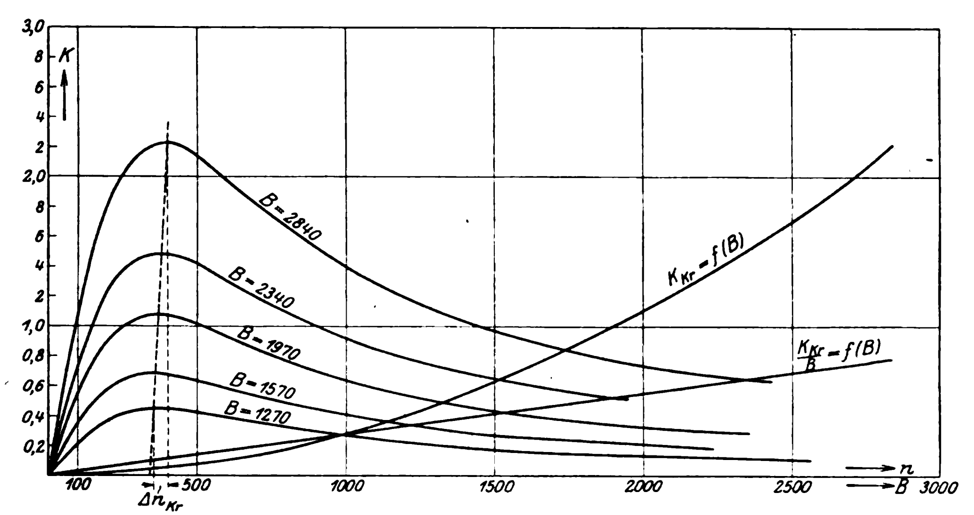


Bild 12. Verschiebung der Bremskraftkurve durch Änderung der Induktion. (Pasqualini-Bremse); Material: Rotmessing; $\delta = 1{,}9$ cm; d = 1,2 cm.

c) Einfluß des spezifischen Widerstandes s. Die Verschiebung der Bremskraftkurve, welche durch Veränderung des spezifischen Widerstandes des Bremsscheibenmaterials hervorgerufen wird, ist aus Bild 11 zu entnehmen.

Wie früher schon festgestellt, geht für kleine Geschwindigkeiten die Bremskraft umgekehrt proportional mit s. Die kritische Bremskraft ist unabhängig von s, was mit Rüdenbergs Formel übereinstimmt (s fehlt in der Formel für K_{kr}), und oberhalb der kritischen Geschwindigkeit nimmt die Bremskraft schließlich mit s zu. Auch diese Umkehr ist in Rüdenbergs Formel ausgedrückt. Es ist dieselbe Erscheinung, nur mit umgekehrtem Richtungssinn wie bei der Scheibendicke d.

Die kritische Drehzahl nimmt mit wachsendem spezifischem Widerstand zu. Die Messung ergibt für kleine spezifische Widerstände ein proportionales Ansteigen, wie die Theorie Rüdenbergs verlangt. Für die größeren spezifischen Widerstände sind Abweichungen vorhanden, die auf die Unzuverlässigkeit der Widerstandsbestimmung aus Proben zurückzuführen sein werden.

d) Einfluß der Induktion B. Im Bereich kleiner Geschwindigkeiten ist der Einfluß der Induktion auf die Bremskraft schon von Beckmann und Kempe (a. a. O.) zur Genüge untersucht worden. Sie haben in Übereinstimmung mit der Theorie gefunden, daß die Bremskraft mit dem Quadrat der Induktion geht. In Bild 12, das eine Bremskraftkurvenschar für veränderte Induktion darstellt, ist die

kritische Bremskraft als Funktion der Induktion aufgetragen worden. Die Kurven sind quadratischer Natur, wie sich daraus ergibt, daß die Beziehung: $\frac{K_{kr}}{B} = f(B)$ eine Gerade durch den Nullpunkt ergibt.

Es bleibt also die für den Anstieg gültige quadratische Beziehung zwischen Bremskraft und Induktion des unbeeinflußten primären Feldes auch für die kritische Bremskraft bestehen. Das steht in Übereinstimmung mit Rüdenbergs Formel für K_{kr}.

Die Bremskraftkurven (Bild 12) zeigen eine deutliche Zunahme der kritischen Drehzahl mit wachsender Induktion. Diese könnte nun zunächst auf eine wegen der zunehmenden Bremsleistung steigende Erwärmung der Bremsscheibe und damit erhöhten spezifischen Widerstand zurückzuführen sein. Die Erwärmung der Scheiben wurde jedoch durch dauernde Kontrolle und häufiges Abkühlenlassen gleichmäßig in kleinen Grenzen gehalten, so daß diese Ursache nicht ins Gewicht fallen kann. Es muß demnach eine in direktem Zusammenhang mit dem absoluten Wert der Induktion stehende Einwirkung vorhanden sein. Eine Erklärung für diese Erscheinung ist in der magnetischen Sättigung des Eisens der Bremse zu finden. Der Einfluß der rückwirkenden Wirbelstrom-Durchflutung wird mit zunehmender Sättigung geringer werden müssen, d. h. für ein stark gesättigtes Bremseisen wird bei gleichem absolutem Wert der Induktion eine größere rückwirkende Durchflutung nötig sein, um die gleiche Feldschwächung hervorzurufen, als bei schwacher Sättigung. Es wird also auch mit zunehmender Sättigung die Geschwindigkeit größer werden müssen, um das zum kritischen Betriebszustand gehörige Verhältnis zwischen primärem Fluß und dem der Wirbelströmung herzustellen.

5. Die Messung des resultierenden Flusses Φ im Luftspalt und Bestimmung des Flusses der Wirbelströmung Φ_w.

Der für eine beliebige Geschwindigkeit der Bremsscheibe im Luftspalt vorhandene Fluß Φ resultiert aus dem durch die Erregung aufgedrückten Φ_0 und dem von der Wirbelströmung erzeugten Φ_w. Es ist:

$$\Phi = \Phi_0 - \Phi_w.$$

Die Messung des resultierenden Flusses ermöglicht uns nun mit Hilfe der obigen Beziehung eine Bestimmnng des Flusses der Wirbelströmung Φ_w. Die Messung geschah in folgender Weise. Auf dem Pol der Bremse wurde eine der für die Aufnahme der Magnetisierungskurve ähnliche Prüfspule angebracht, die an ein ballistisches Galvanometer angeschlossen wurde. Der beim Kommutieren des Erregerstromes hervorgerufene Ausschlag gibt ein Maß für den die Spule jeweils durchsetzenden Fluß, der nun bei ruhender Scheibe sowie in Abhängigkeit von der Drehzahl derselben gemessen wurde. — Eigentlich hätte diese Messung auch wie die der Magnetisierungskurven in der Mitte des Luftspaltes vorgenommen werden müssen, was sich aber praktisch nicht verwirklichen läßt. Doch werden die relativen Werte der Feldschwächung, auf die es uns hier nur ankommt, auch für die Mitte des Luftspaltes gültig sein. —

Ich habe die am Galvanometer gemessenen Ausschläge in $^0/_0$ des Ausschlages bei stillstehender Scheibe aufgetragen, so daß die Kurve den für irgend eine Drehzahl jeweils vorhandenen Prozentsatz des Flusses Φ_0 in der Ruhe darstellt. Die Messung von Φ wurde für veränderten Luftspalt δ, Scheibendicke d und spezifischen Widerstand s ausgeführt. Da es sich nur um eine qualitative Messung handelt, konnte die Induktion im Interesse geringer Erwärmung der Bremsscheiben möglichst klein eingestellt werden. Aus der Kurve des resultierenden Flusses ergibt sich nun der Fluß der Wirbelströmung Φ_w als Abstand von einer durch die Ordinate Φ_0 zur Abszissenachse gezogenen Parallelen (Bild 13).

Eine direkte Messung des durch die Wirbelströmung hervorgerufenen Flusses läßt sich noch in folgender Weise vornehmen.

Bei erregter Bremse bringt man die Scheibe auf eine beliebige Drehzahl. Sobald der Beharrungszustand erreicht ist, wird der Antriebsmotor abgeschaltet. Die Bremsscheibe läuft dann aus und in dem Maße wie ihre Geschwindigkeit sich vermindert, wächst der Fluß im Luftspalt wieder auf seinen primären Wert bei ruhender Scheibe an. Der durch dieses Anwachsen des Flusses in der Prüfspule induzierte Integralstrom stellt nun ein Maß dar für den der beim Abschalten des Motors herr-

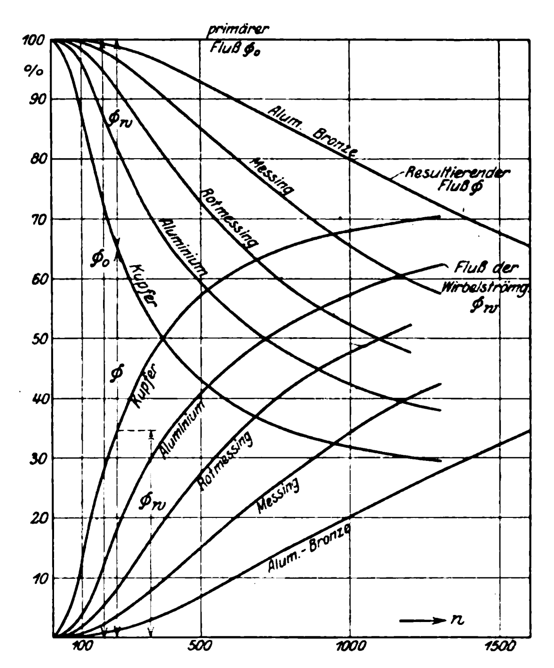


Bild 13. Der Resultierende Fluß Φ und der Wirbelströmungsfluß Φ_W in % des primären Flusses Φ_0 bei verändertem spezifischem Widerstand.
(Pasqualini-Bremse); $\delta = 2{,}7$ cm,
d = 1,2 cm.

schenden Drehzahl entsprechenden Fluß der Wirbelströmung. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Messung ist, daß die Auslaufzeit der Bremsscheibe klein ist im Verhältnis zur Schwingungsdauer des Galvanometers.

Die beim Auslauf der Bremsscheibe von verschiedenen Drehzahlen gemessenen Galvanometerausschläge als Funktion der Drehzahl aufgetragen haben den aus Bild 13 ersichtlichen Verlauf. Mißt man noch im Ruhezustande den primären Fluß durch Abschalten des Erregerstromes, so stellt die durch den entsprechenden Ausschlag des Galvanometers gezogene Parallele zur Abszissenachse den primären Fluß dar. Der Abstand von dieser Parallelen muß dann den nach der schon beschriebenen Methode gemessenen resultierenden Fluß darstellen.

Ein Vergleich zwischen 2 auf die beiden Arten gemessenen Kurven zeigt eine gute Übereinstimmung. Jedoch bleibt diese Auslaufmethode, was die Genauigkeit anbelangt, hinter der ersten zurück, weil die zu messenden Ausschläge für kleine Geschwindigkeiten sehr klein sind. Ferner wäre, um die Auslaufzeiten klein zu halten, eine künstliche Bremsvorrichtung erforderlich, da man mit der Induktion im Interesse kleiner Temperaturerhöhungen nicht hoch gehen darf.



Auf die Messung des Flusses der Wirbelströmung durch Auslauf wurde ich durch die Beobachtung gebracht, daß beim Ein- und Abschalten des die Bremsscheibe treibenden Motors der Zeiger des Strommessers im Erregerkreis der Bremse kurz um einige Teilstriche ausschlug. Dieser Ausschlag erfolgte bei der Kupferscheibe, wenn sie von einer hohen Drehzahl abgeschaltet wurde, erst nachdem die Geschwindigkeit schon ganz erheblich abgefallen war, und zwar, wie eine vergleichende Beobachtung ergab, in der Gegend der kritischen Drehzahl. Umgekehrt beim Anlauf der Scheibe zuckte der Zeiger schon bei einer der kritischen Drehzahl entsprechenden Geschwindigkeit, während er bei weiterer plötzlicher und starker Steigerung in Ruhe blieb. Eine oszillographische Untersuchung dieser Erscheinung müßte Klarheit über sie bringen. Sie war mir nicht möglich, da mir kein geeigneter Oszillograph zur Verfügung stand.

Der grundsätzliche Verlauf des resultierenden Flusses Φ als Funktion der Drehzahl ist dadurch charakterisiert, daß seine Kurve einen Wendepunkt hat. Sie setzt sich zusammen aus einem konkaven und einem konvexen Teil, die durch einen gradlinigen miteinander verbunden sind. Der Wendepunkt liegt, soweit die Genauigkeit der Bestimmung seiner Lage aus der Zeichnung einen sicheren Schluß zuläßt, bei der kritischen Drehzahl.

Am Wendepunkt hat jedenfalls der Differentialquotient der Kurve ein Maximum. Eine Festlegung dieses Maximums müßte sich nach der schon angedeuteten Methode oszillographisch vornehmen lassen, indem die durch den Verlauf des resultierenden Flusses gegebene Flußänderung in einer Prüfspule für den Wendepunkt ein Maximum der induzierten EMK hervorrufen müßte. Mit der Drehzahl der Bremsscheibe müßte sich dieses Maximum mit Hilfe der an die zweite Meßschleife des Oszillographen gelegten Spannung der Drehzahlmeßdynamo in Verbindung bringen lassen. Eine Nachprüfung in dieser Richtung war aus den schon angegebenen Gründen nicht möglich.

Bei Betrachtung der Kurvenscharen, welche den resultierenden Fluß bei verändertem spezifischem Widerstand oder veränderter Scheibendicke aber gleichbleibendem Luftspalt darstellen, läßt sich folgende Begründung für die obige Annahme, daß der Wendepunkt bei der kritischen Drehzahl liegt, finden. Das kritische Bremsmoment ist, wie die Messungen einwandfrei ergeben, unabhängig vom spezifischen Widerstand oder der Scheibendicke. Somit wird für die kritische Drehzahl auch der resultierende Fluß unabhängig von diesen beiden Größen sein. Demnach muß eine Parallele zur Abszissenachse durch den zur kritischen Drehzahl gehörigen Punkt einer beliebigen der Kurven des resultierenden Flusses die übrigen im kritischen, d. h. zur kritischen Drehzahl gehörigen Punkte treffen. Daß ein solcher ausgezeichneter Punkt ein anderer als der Wendepunkt der Kurven sein sollte, ist kaum als wahrscheinlich anzunehmen. Bei den Kurven für veränderten Luftspalt müßten entsprechend der Änderung der kritischen Bremskraft die Wendepunkte auf einer gegen die Abszissenachse geneigten Linie liegen.

6. Die Messung der Feldkurve und ihrer Verzerrung durch die Rotation der Scheibe.

Außer der schon beschriebenen Messung der Wirbelstromrückwirkung, welche über die Schwächung des Flusses im ganzen, ohne Rücksicht auf den räumlichen Verlauf der Feldkurve als Funktion der Drehzahl der Scheibe Aufschluß gibt, wurde noch der Verlauf der Feldkurve in Bezug auf den Pol, der Rückschlüsse auf die räumliche Verteilung des Feldes der Wirbelströmung bezw. ihre Verteilung selbst ermöglicht, in Abhängigkeit von der Drehzahl ermittelt. Um den räumlichen Verlauf der Feldschwächung verfolgen zu können, genügt die Messung in der einen ausge-



Schnitt: in der Drehrichtung (tangential). Schnitt: senkrecht zur Drehrichtung (radial).

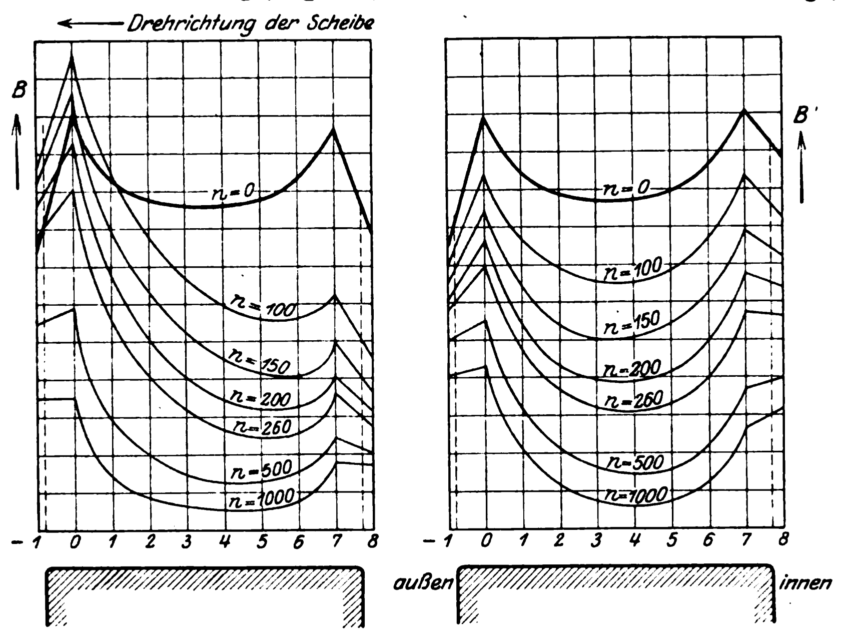


Bild 14. Die Feldkurve bei veränderter Drehzahl.
(Pasqualini-Bremse); Material: Kupfer; $\delta = 2{,}7$ cm, d = 1,2.

Tangentialer Schnitt. Radialer Schnitt.

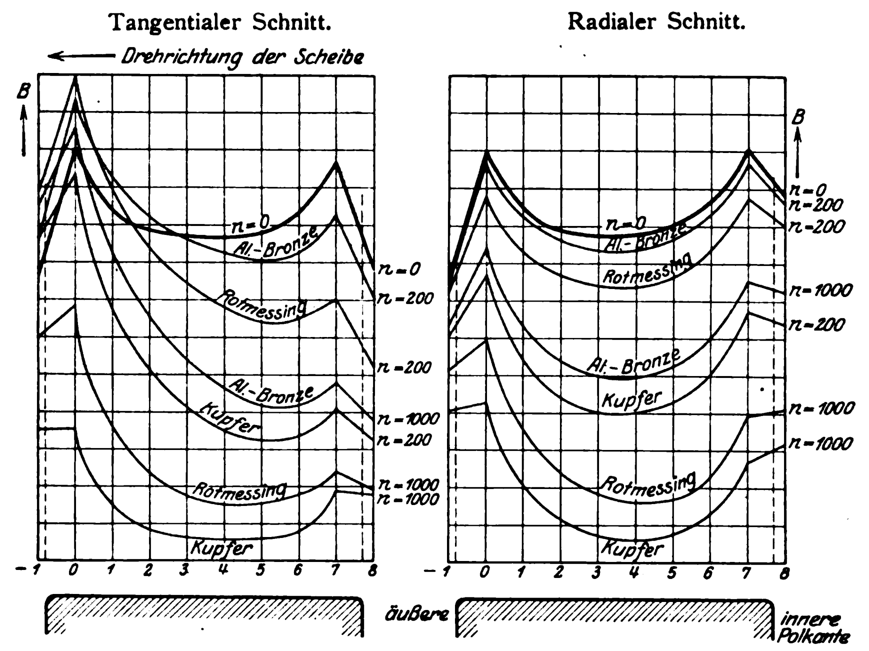


Bild 15. Die Feldkurve bei verändertem spezifischem Widerstand.
(Pasqualini-Bremse); $\delta = 2{,}7$ cm, d = 1,2 cm.

zeichneten Richtung — der Richtung der Bewegung — allein nicht. Zum mindesten muß sie auch noch in einem dazu senkrechten Schnitt vorgenommen werden. Aus diesen beiden Schnitten läßt sich dann mit genügender Zuverlässigkeit die räumliche Feldverteilung konstruieren. Zur Messung ist demnach eine Vorrichtung erforderlich,

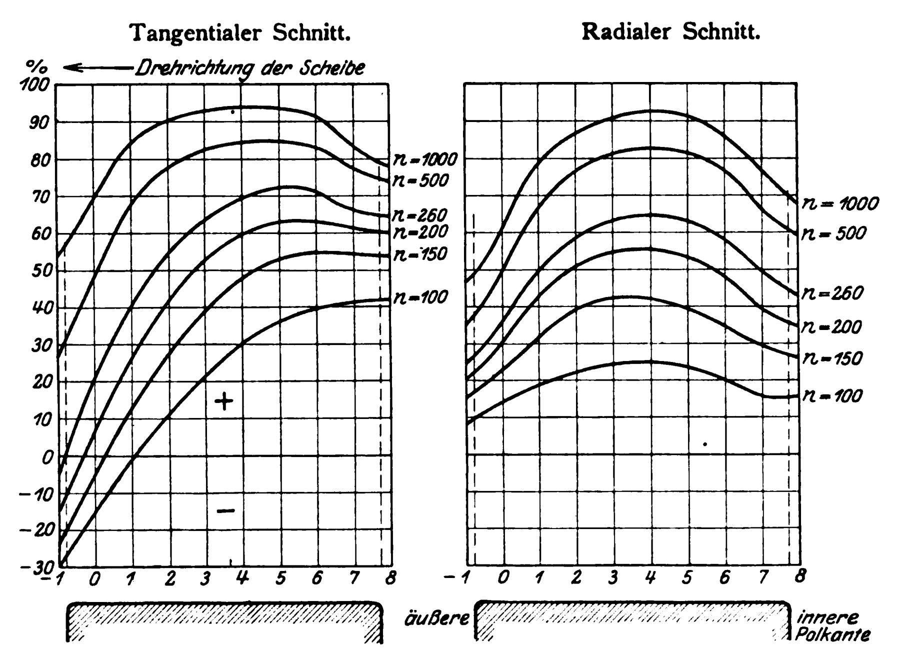


Bild 16. Das Feld der Wirbelströmung in % des primären Feldes bei veränderter Drehzahl. (Pasqualini-Bremse); Material: Kupfer; $\delta = 2{,}7$ cm; $d = 1{,}2$ cm.

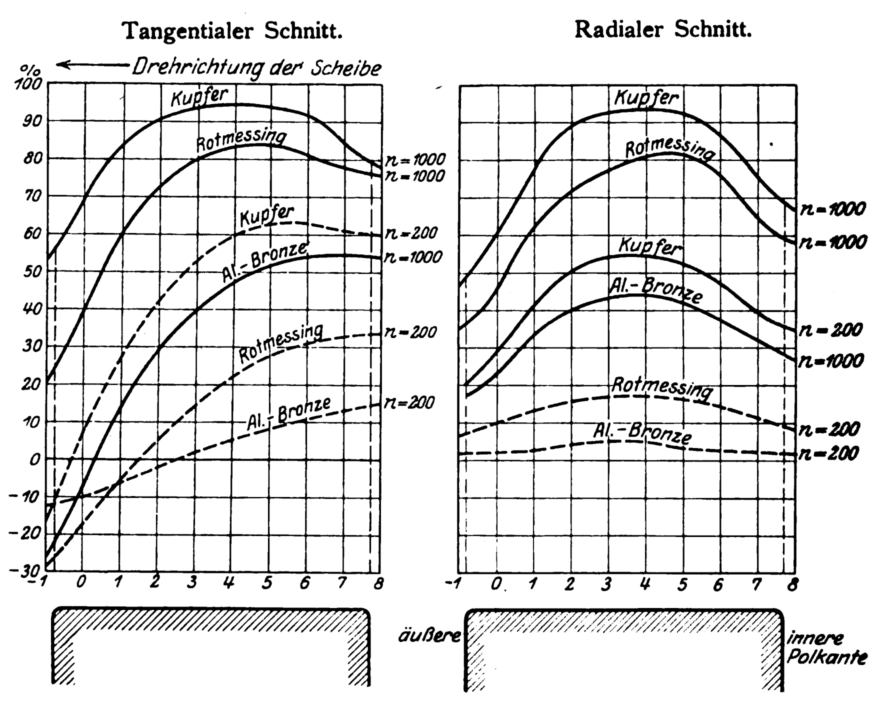


Bild 17. Das Feld der Wirbelströmung in % des primären Feldes bei verändertem spezifischem Widerstand.
(Pasqualini-Bremse); $\delta = 2{,}7$ cm; $d = 1{,}2$ cm.

welche es gestattet, sämtliche Punkte der Polfläche zu bestreichen und punktweise die an jeder Stelle vorhandene Induktion zu messen. Die hierzu angefertigte Meßvorrichtung ist eine Prüfspule aus Fiber, deren Durchmesser klein im Verhältnis zu

den Polabmessungen ist und deren Dicke eine Einführung in den Luftspalt zwischen Pol und Bremsscheibe gestattet. Sie ist an einem Lineal aus Hartgummi befestigt, mit Hilfe dessen sie in den Luftspalt eingeführt werden kann. Die Führung des Lineals, welche mit dem Magnetgestell der Bremse fest verbunden ist, ist so eingerichtet, daß es sowohl längs wie quer zum Pol verschoben werden kann, so daß alle Punkte der Polfläche bestrichen werden können. Zur Messung wurde die Prüfspule mit einem ballistischen Galvanometer verbunden, dessen Ausschläge beim Kommutieren des Erregerstromes der Bremse ein Maß für die Induktion an der betreffenden Stelle des Luftspaltes geben. Auf diese Weise wurde die Feldkurve in den beiden ausgezeichneten Richtungen: 1. in der Bewegungsrichtung, 2. senkrecht zur Bewegungsrichtung der Bremsscheibe punktweise aufgenommen.

Die Verzerrung der Feldkurve wurde für die Materialien: Kupfer, Rotmessing, und Aluminiumbronze gemessen, um die Einwirkung des spezifischen Widerstandes kenntlich zu machen. (Bild 14, 15.)

In der Bewegungsrichtung tritt bei kleinen Geschwindigkeiten an der auflaufenden Polkante schon eine erhebliche Schwächung, an der ablaufenden dagegen eine Verstärkung des Feldes auf. Mit zunehmender Geschwindigkeit geht diese auch schließlich in eine Schwächung über, welche aber immer hinter der an der auflaufenden Kante zurückbleibt. Senkrecht zur Bewegungsrichtung (radial) wird die Feldkurve zunächst gleichmäßig heruntergedrückt. Bei höheren Geschwindigkeiten überwiegt deutlich die Schwächung nach der Mitte der Scheibe zu.

Das Feld der Wirbelströmung. Aus den experimentell aufgenommenen Feldkurven bei stillstehender und rotierender Bremsscheibe läßt sich das Feld der Wirbelströmung ohne weiteres abgreifen. Das bei rotierender Scheibe gemessene Feld ist ja resultierend aus dem durch die Erregung aufgedrückten und dem von der Wirbelströmung erzeugten. Die Feldkurve der Wirbelströmung ergibt sich demnach als Differenz aus primärem und resultierendem Feld. Sie wurde in % der Ordinate des Feldes in der Ruhe aufgetragen, und zwar in den beiden Schnitten: tangential und radial (Bild 16, 17). Die positiven Ordinaten gelten für die schwächende (entmagnetisierende) Wirkung, die negativen für die verstärkende (magnetisierende) Richtung des Feldes der Wirbelströmung. Der Schnittpunkt der Feldkurve mit der Abszissenachse gibt offenbar die Stelle an, wo sich die entmagnetisierende Wirkung der Wirbelströmung in eine magnetisierende umkehrt. Für kleine Geschwindigkeiten liegt dieser Schnittpunkt innerhalb der Polfläche in Richtung der Bewegung (tangential) gesehen mehr oder weniger weit hinter dem Mittelpunkt, je nach der Größe des spezifischen Widerstandes oder der Dicke der Bremsscheibe für gleiche Geschwindig-

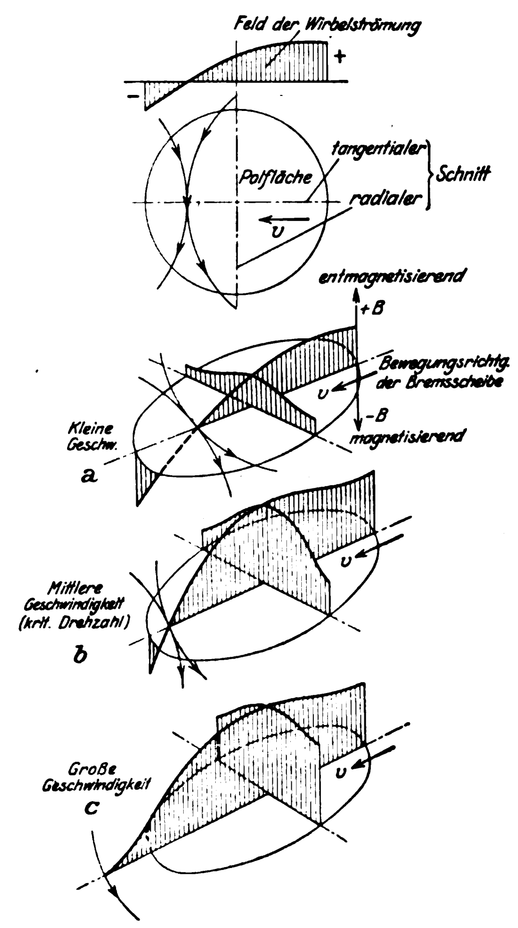


Bild 18. Das Feld der Wirbelströmung bei veränderter Geschwindigkeit.

keiten. Er nähert sich mit zunehmender Geschwindigkeit dem Polrand. Für die kritische Drehzahl liegt er fast an der Polkante. Das würde demnach bedeuten, daß für die kritische Drehzahl die Wirkung der Wirbelströmung fast ausschließlich entmagnetisierend geworden ist. Im radialen Schnitt (senkrecht zur Bewegungsrichtung) wächst das Feld der Wirbelströmung gleichmäßig über die ganze Polbreite mit zunehmender Geschwindigkeit an. Es zeigt sich mit wachsender Geschwindigkeit eine geringe Verschiebung des Maximums nach dem Mittelpunkt der Scheibe zu. Aus den mit Hilfe der beiden senkrecht zueinander stehenden Schnitte konstruierten perspektivischen Bildern (Bild 18) ist die Verschiebung der räumlichen Verteilung des Feldes der Wirbelströmung übersichtlich zu entnehmen.

7. Hysteresis der Bremskraft.

Bei der Messung der Bremskraft beobachtete ich Unterschiede von der Größenordnung bis zu 10% für ein und dieselbe Drehzahl und Erregung, die nicht auf den

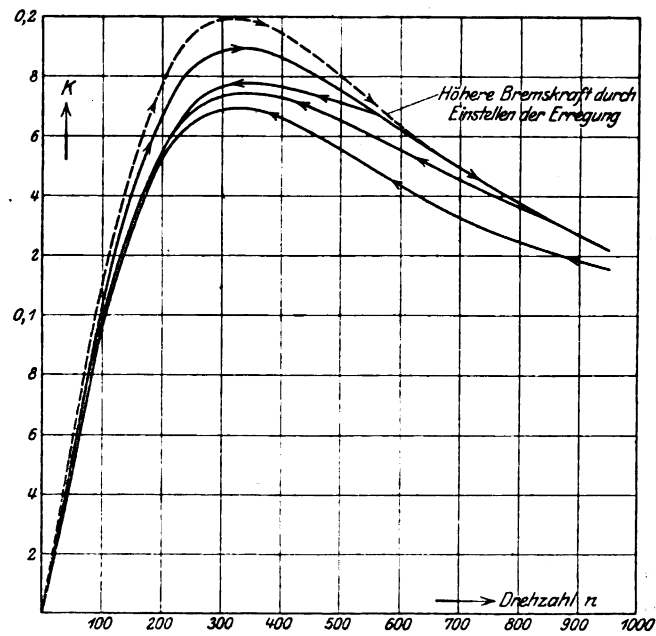


Bild 19. Unterschied zwischen der Bremskraft bei aufsteigender und abfallender Drehzahl (Bremskraft-Hysteresis).
(Siemens-Bremse); Material: Kupfer; $\delta = 1{,}8$ cm; $d = 0{,}7$ cm.

Ungenauigkeitsgrad der Meßvorrichtung, der etwa höchstens 2—3% betragen konnte, zurückzuführen waren. Nach systematischer Untersuchung dieser Abweichungen stellte sich heraus, daß die Bremskraft bei gleicher Erregung der Bremse und gleicher Drehzahl höher liegt, wenn man die betreffende Drehzahl durch stetiges Steigern derselben von einem niedrigeren Werte hinauf eingestellt hat, als wenn man sie von einem höheren Werte herabkommend einstellt. Steigert man die Drehzahl der Bremsscheibe vom Wert Null auf einen beliebigen Wert und geht dann stetig auf Null zurück, so ergibt sich der aus Bild 19 ersichtliche Kurvenzug. Kleine Schwankungen in der Geschwindigkeit haben kleinere Veränderungen der Bremskraft zur Folge; größere verursachen größere Abweichungen.

Ich führe diese Erscheinung auf die Hysteresis des Eisens im magnetischen Kreis der Bremse zurück. Wir haben es bei einer Schwankung der Drehzahl, welche

gleichbedeutend mit einer Schwankung der Rückwirkung und damit der Magnetisierung der Bremse ist, mit einer zyklischen Zusatzmagnetisierung in positiver oder negativer Richtung, je nachdem ob die Schwankung durch eine Abnahme oder eine Zunahme der Drehzahl hervorgerufen wurde, zu tun. Die Folgen, welche eine solche Zusatzmagnetisierung für den magnetischen Zustand des Eisens hat, sind aus einer Arbeit von Hoffmann[1]) übersichtlich zu entnehmen.

Der magnetische Zustand eines Ferromagnetikums ist durch einen bestimmten Punkt seiner Magnetisierungskurve A B C D (Bild 20) festgelegt. Es habe die Bremse nun bei ruhender Scheibe einen Zustand, der durch den Punkt P mit der Abszisse H und der Ordinate B dargestellt ist.

Wird die Scheibe jetzt in Drehung versetzt, so findet durch die Rückwirkung der Wirbelströmung eine Entmagnetisierung statt. D. h. es tritt zu dem in der Ruhe vorhandenen Felde H ein Zusatzfeld $-\Delta H$. Der magnetische Zustand ist jetzt durch den Punkt P′ charakterisiert. Nach Stillsetzung der Scheibe verschwindet dieses $-\Delta H$ und der magnetische Zustand ist wieder durch den Punkt P darge-

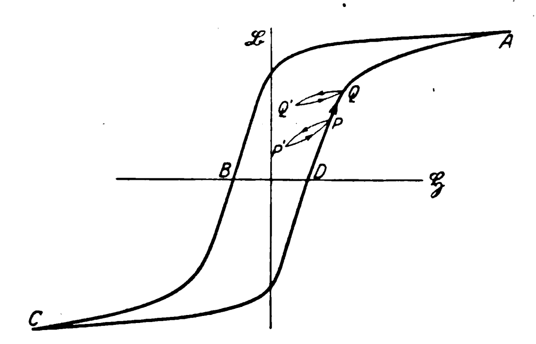


Bild 20. Zyklische Zusatzmagnetisierung. (Hoffmann, Arch. f. Elektr. Bd. I.)

stellt. Bei diesem Vorgang wurde eine kleine Schleife P P′ durchlaufen, deren Richtungssinn durch die eingezeichneten Pfeile gekennzeichnet ist. Die Ordinaten B liegen aber für die zunehmende Geschwindigkeit höher als für die abnehmende, d. h. das Bremsmoment muß, wie auch die Beobachtung zeigt, höher liegen für die zunehmende als für die abnehmende Drehzahl.

Der an und für sich kleine Unterschied in der Induktion kommt dabei im Bremsmoment, entsprechend der Beziehung zwischen den beiden Größen, ins Quadrat erhoben zum Ausdruck. Ferner wird der Unterschied auf dem Wege von P nach P′ zunächst zu-, dann wieder abnehmen entsprechend der spindelförmigen Gestalt der kleinen Schleife, was im Einklang steht mit dem Verlauf der aufgenommenen Kurven.

Würde nun andererseits zu dem bestehenden Zustand P ein Zusatzfeld $+\Delta H$ hinzugefügt, indem z. B. der Widerstand im Erregerstromkreis zu klein wäre für die zur Messung beabsichtigte Stromstärke, und diese erst durch nachträgliches Vergrößern des Widerstandes richtig eingestellt würde, so lägen die Verhältnisse folgendermaßen. Unmittelbar nach dem ersten Einschalten des Erregerstromes ist der magnetische Zustand durch den Punkt Q dargestellt. Durch die Herabregulierung des Stromes kommt man nun nicht zu dem Punkt P zurück, sondern zu einem höher gelegenen Punkt Q′. Durch eine derartig vorgenommene Einstellung des Erregerstromes erhielt ich auch in der Tat eine Erhöhung des Bremsmomentes (Bild 19).

[1]) Archiv f. El. Bd. I, S. 433.

8. Zusammenfassung.

Es werden die verschiedenen in der Literatur vorhandenen Formeln für die Bremskraft scheibenförmiger Wirbelstrombremsen mit Messungen verglichen, und daraus Gesichtspunkte für die Konstruktion von Elektrizitäts-Zähler-Bremsen sowie experimentelle Unterlagen für die allgemeine rechnerische Behandlung des Problems (Festlegung des Maximums der Bremskraft) gewonnen.

Weiter wird experimentell die Rückwirkung der Wirbelströmung auf den primären Fluß und die Verzerrung der Feldkurve durch die Rotation der Scheibe untersucht.

Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Finzi, der die vorliegende Untersuchung anregte und durch sein stetes Interesse förderte, meinen besten Dank ausspreche. Ebenso habe ich Herrn Prof. Rogowski, der auf die Arbeit erst nach Abschluß der Versuche Einfluß gewann, für viele wertvolle Ratschläge bei der Abfassung bestens zu danken.

Archiv für Elektrotechnik

X. Band. 5. u. 6. Heft 1921.

Über die physikalischen Grundgesetze der in der Isolatorentechnik auftretenden elektrischen Gleiterscheinungen.

Von

Max. Toepler.

Werden Metallsysteme auf sehr verschiedenes Potential gebracht, so treten zwischen ihnen Entladungserscheinungen auf. In einfachsten Fällen ist der Zwischenraum zwischen zwei Systemen homogen, z. B. mit Luft erfüllt; die bekannten Entladungserscheinungen — Korona (Glimmen, Streifen, Büschel) oder Büschellichtbogen (Glimmstrom), halbe und ganze Funken, Bogen[1]) — sind vielfach untersucht. Komplizierter, wenn sich im Zwischenraum verschiedenartige Medien gleichzeitig befinden, z. B. Luft und Isolator[2]) in der Isolatorentechnik. Hier treten als wesentlich Neues die Gleiterscheinungen an den Grenzen, den Oberflächen der Isolatoren, z. B. von Luft und Porzellan oder Glas auf — als Polbüschel analog den Koronaerscheinungen und als eigentliche Gleitphänomen analog den halben Funken. Man könnte Polbüschel auch Gleitkorona und Gleitbüschel auch Gleitfunkenkorona nennen.

Zwiefach ist hierbei die komplizierende Wirkung von Isolatoren im Zwischenraum:

1. An den Oberflächen treten scheinbare Ladungen auf (Flächendivergenz des Feldes infolge Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstanten).

2. Wahre Elektrizität aus den Metallen oder aus Stoßionisation in Luft wird auf den Oberflächen abgelagert und bleibt hier lange feldbildend liegen.

Ersteres fällt fort, wenn Isolator und Luft gleiche Dielektrizitätskonstante (gleich eins) haben; zur Vereinfachung der Betrachtungen über Gleitphänomene könnte man einen solchen „Einheits-Isolator" einführen.

Der zweite Einfluß veranlaßt vor allem, daß die Art des Spannungsanstieges von Beginn an, d. h. daß $dP:dt$ neben der Höchstspannung P_m bei Anwesenheit von Isolatoren einen wesentlich größeren Einfluß ausübt als bei Entladungen allein in Luft, wo die wahren Ladungen zwischen den Leitern so rasch vom Felde beseitigt, abgesogen werden, daß ihr Einfluß auf Anfangsspannungen, Grenzspannungen u. dgl. nur bei allerhöchsten Frequenzen erheblich wird.

Dem Einflusse von $dP:dt$ auf Gleitphänomene sind die vorliegenden Messungen in erster Linie gewidmet.

A. Überblick.

In diesem Überblicke beschränken wir uns auf den meistuntersuchten Fall, daß ein einzelner Gleitpol P (vgl. Bild 1) auf einer Glasplatte G (Dicke a cm, Dielektrizitätskonstante k, Kapazität der Oberflächeneinheit c) mit rückseitiger voller metallischer Belegung B aufsteht. An PB werde plötzlich eine Spannung P angelegt;

[1]) Diese Zweiteilung kommt ihrem inneren Wesen nach auf eine Trennung von Entladungsformen, die überwiegend aus Bahnelementen mit steigender Charakteristik aufgebaut sind, von solchen überwiegend aus Bahnstücken mit fallender Charakteristik hinaus, vgl. die Zusammenstellung M. Toepler, ETZ. 1907, S. 998 und 1025.

[2]) In vorliegender Arbeit ist unter Isolator schlechthin ein fester Isolator (Glas, Porzellan, Glimmer od. dgl.) gemeint, unter Luft, wo nicht anders bemerkt, solche von 20° Cels, 75 cm Hg und 50% rel. Feuchtigkeit.

ihr zeitlicher Verlauf bedingt die Ausbildung des Ladungsergusses auf die Isolatoroberfläche, d. h. des Gleitprozesses. Auch hier sei der bisher meistuntersuchte Fall: mit konstantem dP:dt werde eine weiterhin konstant bleibende Spannung P_m erreicht, den Betrachtungen zugrunde gelegt, und zwar sei die Ergiebigkeit der Elektrizitätsquelle so groß, daß dP:dt und P_m durch den Ladungsprozeß nicht rückbeeinflußt wird[1]).

Zur Beobachtung und Messung der Gleiterscheinung dient — der Anblick, erschwert durch kurze Dauer und Lichtschwäche — die Spur in vorheriger leichter Bepulverung mit Bärlappsamen od. dgl., oft verzerrt durch Luftbewegung, Wirbelbildung[2]) — das Bild, das nach Gleiten auf einer photographischen Platte G beim Entwickeln entsteht, dessen Ausdeutung dadurch erschwert ist, daß nur die Teile der Leuchterscheinung (der Leuchtfäden) stark photographisch wirken, die unmittelbar auf der Platte auflagen[3]).

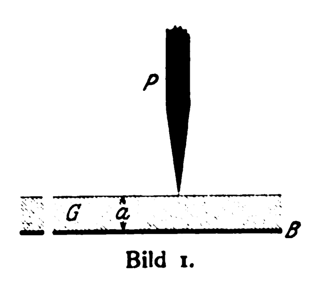


Bild 1.

I. In früheren Arbeiten[4]) habe ich schon geschildert, wie man sich den Ladungsvorgang zu denken hat, ohne noch auf Einzelheiten eingehen zu können: Die Isolatoroberfläche bildet ein System an- und nebeneinandergereihter Elementarkapazitäten (Oberfläche gegen Belag B). Dieses wird vom Gleitpole aus zunächst $P_m < P_0$ allseitig in der Nähe durch zahlreiche radiale schmale lichtschwache Leuchtfäden geladen (Polbüschel, Gleitkorona). P_0 heiße „Durchbruchspannung" gleitender Entladung. Der geringe Widerstand in den sich vom Pole aus weiterhin ($P_m > P_0$) bildenden Büschelstielen (Ladungskanälen, Funkenstücken) ermöglicht dann ein weiteres Vordringen der Ladung im eigentlichen Gleitprozesse. Die Ladungskanäle bilden hierbei gutleitende eventuell vielfach verzweigte Verlängerungen des Gleitpoles, an deren Enden jeweils das Weiterwachsen ganz ähnlich erfolgt, wie anfangs im Polbüschel direkt vom Gleitpole aus. „Gleitbüschel" bestehen also aus Ladungskanälen mit Leuchtfäden nach den Seiten und am Ende. Die vorwachsenden Ladungskanäle, also der Gleitprozeß, das Gleiten selbst schiebt das zu seiner Ausbreitung nötige Gefälle mit sich fort. Zum Weiterwachsen muß am Rande des schon geladenen Gebietes ein zu Stoßionisation hinreichendes Potentialgefälle F_i herrschen, in Luft von Atmosphärendruck auf 30 kV:cm zu schätzen; so lange dies besteht, so lange wächst der Ladungsprozeß selbsttätig weiter. Es sei nun versucht, diese Vorgänge im einzelnen zu schildern.

Polbüschel (Gleitkorona).

II. Am Gleitpole P steige die Spannung von Null rasch an. Überall im Raum sind einige Ionen und Elektronen vorhanden, diese und durch Stoßionisation neugebildete setzen sich überall im radialen Felde um P radial in Bewegung. Ist λ die mittlere freie Weglänge einer Luftmolekel (etwa 10^{-5} cm), so hat bekanntlich ein relativ zur mittleren gaskinetischen Fluggeschwindigkeit langsames Elektron $4 \cdot \lambda$, ein rasch bewegtes $4 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda$. Jeder Zusammenstoß bremse die im Felde F gewonnene Flugenergie völlig, dann beträgt die durchschnittliche Flugeschwindigkeit zwischen den Stößen

[1]) Der Meßbereich, für den der Überblick gilt, umfaßt bezüglich a etwa 0,1 bis 1,7 cm, bezüglich P_m 10 bis 50 kV, bezüglich dP:dt etwa 10^6 bis $350 \cdot 10^6$ kV:sec.

[2]) Vgl. M. Toepler, Phys. Zeitschr. 21, S. 706, 1920.

[3]) Über die speziellen Eigentümlichkeiten mehr photographischer Natur am Rande der Bilder vgl. die letztzitierte Arbeit. Die Dicke des Isolators G zwischen photographischer Oberschicht und Metallbelag B kann man bequem durch Zwischenschieben weiterer Spiegelglasplatten und Aufeinanderdichten dieser mit Alkohol verändern, vgl. M. T., Ann. d. Phys., 53. S. 219, 1917.

[4]) Vgl. vor allem M. Toepler, Wied. Ann. 66, S. 1063, 1898 und Ann. d. Phys. 21, S. 193, 1906.



u für Elektron ($\varepsilon = 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ stat. Einh., $m = 8{,}7 \cdot 10^{-28}$ gr)

$$\text{zwischen } \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot \varepsilon \cdot F}{m}} \text{ und } \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot \varepsilon \cdot F}{m}}$$

u für ein einwertiges Ion (Ladung ε, Molekülmasse M)

$$\sqrt{\frac{\lambda \cdot \varepsilon \cdot F}{M}}.$$

Für F_i rechnet sich:

u_i für Elektronen $32{,}9 \cdot 10^6$ cm : sec bis $39{,}1 \cdot 10^6$ cm : sec,
u_i für Stickstoffion (einwertig) nahezu $0{,}069 \cdot 10^6$ cm : sec.

Mit der Summe v_i dieser Geschwindigkeiten trennen sich im Felde F_i die Stoßprodukte.

Die Trennung der in Feldern $\geqq F_i$ erzeugten Elektronen oder Ionen kann zum Auftreten freier, d. h. feldbildender Elektrizität führen. Man hat also streng zu unterscheiden:

Stoßionisation, verbunden mit Lichtentwicklung, Leuchten;
Leitfähigkeit, gebunden an das Vorhandensein (Zahl und Beweglichkeit) von Elektronen oder Ionen;
freie Elektrizität, gegeben durch den Überschuß der Zahl der Träger eines Vorzeichens über die des anderen.

III. Das Feld ist überall längs der Plattenoberfläche schräg polabgewandt nach unten gerichtet. Die gleichnamigen Ionisierungsprodukte werden also fest gegen die Platte gedrückt, nur die ungleichnamigen setzen sich in Bewegung, natürlich polwärts. Von der durch Stoßionisation entstehenden Doppeldecke haftet also der dem Pole gleichnamige Teil fest an der Platte, der ungleichnamige wird von allen Seiten polwärts gezogen; Bärlappsamen u. dgl. wird vom Rande polwärts nach innen bewegt, die Spuren ähneln am Rande Einsturzgebilden [1]). Der Prozeß ist demnach genau genommen kein Ladungs-, sondern ein Entladungsvorgang, der endgültige Ladungszustand der Oberfläche stammt zumeist von den restierenden am Orte selbst erzeugten gleichnamigen Ionisierungsprodukten.

Am Gleitpole tritt die ungleichnamige Elektrizität ein und sucht dP : dt herabzusetzen; je nach Umständen staut sie sich vorher etwas in der Nähe des Poles (mit dem Pole ungleichnamiger Felddivergenz) oder wird vom Pole aus neutralisiert oder meist überneutralisiert (gleichnamige Felddivergenz).

Zwischen Pol und Rand sind die Elektrizitäten zwar getrennt, aber doch nahe bei einander, also ohne feldbildende Wirkung (ohne div.).

Am Rande des Gebietes mit Stoßionisation (wo $F = F_i$), also einem Ringe um den Gleitpol, wird infolge Wegziehens des ungleichnamigen Deckenteiles gleichnamige Elektrizität frei, feldbildend.

IV. Das Büschel um P wächst, sein Ionisierungsrand verschiebt sich unter dem Einflusse der dem Büschel zugeführten, vorhandenen und freiwerdenden Ladungen. Hier am Rande macht es nun einen fundamentalen Unterschied aus, ob die Verschiebungsgeschwindigkeit $v \gtrless v_i$ ist.

Für $v > v_i$ bildet sich durch die hier am Rande entstehenden Neuprodukte doch keine starke Divergenz des Feldes, da wegen $v > v_i$ das raschere Vorschreiten des Ortes mit F_i die im Entstehen begriffene Felddivergenz (freie gleichnamige Elektrizität) wieder durch neutralisierendes (nicht molisierendes) Zufließen von außerhalb (polabgewandt) neugebildeten ungleichnamigen Produkten hintangehalten wird. Für $v > v_i$ wandert also der Rand der Stoßionisation nur als schmaler Ring voll starker Divergenzdichte also mit geringer Menge freier Elektrizität mit der Geschwindigkeit v fort.

[1]) Näheres vgl. Phys. Zeitschr. M. T. l. c.

Sinkt v unter v_i, was ja früher oder später bei konstant gewordener Polspannung P_m eintreten wird, so entstehen außen (polabgewandt) keine Neuprodukte zur Neutralisation mehr (die Ausbreitung des geometrischen Ortes mit $F = F_i$ hinkt jetzt hinter v_i her). Der Ring mit starker Divergenzdichte, d. h. mit freier gleichnamiger Elektrizität, verbreitert sich! Die Superposition ihres Eigenfeldes[1]) zum bisherigen allgemeinen Felde (herrührend vom Pole und von den freien Ladungen, die sich eventuell schon um ihn herum auf der Platte befinden) gibt jetzt ein von beiden sehr verschiedenes Gesamtfeld. Die Radialkomponente des Gesamtfeldes um P ist polseits des Ringes freier Elektrizität durch diese herabgesetzt, polabgewandt vermehrt. In Bild 2 oben ist die anzunehmende Verteilung der freien Elektrizität des Ringes als schraffierte Fläche, der Verlauf des allgemeinen Potentiales als gestrichelte Linie und das nach Superposition vom Eigenfelde der Ringelektrizität zum allgemeinen entstandene Gesamtpotential strichpunktiert dargestellt. Es entsteht so ein Gebiet ohne Stoßionisation ($F < F_i$) zwischen Pol und Ringladung; ein sich radial erweiternder Ring, auf dem Stoßionisation stattfindet, löst sich vom übrigen Polgebiete mit Stoßionisation los. Damit ist aber das Erlöschen (falls $P_m < P_o$) oder das Stoppen (falls $P_m > P_o$) des gesamten Büschelwachsens eingeleitet.

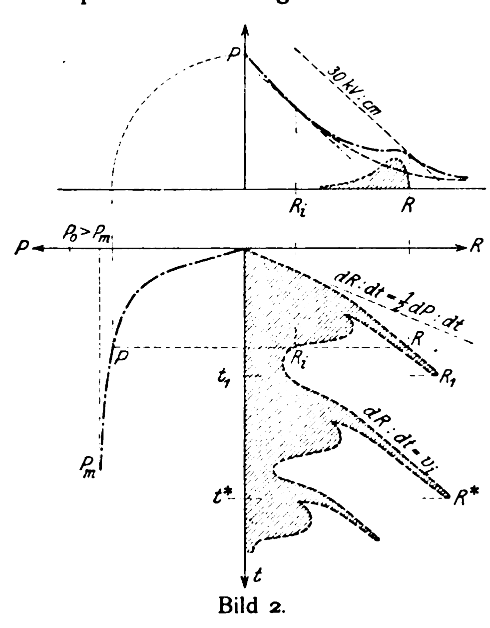


Bild 2.

Zunächst bestehen jetzt zwei Ionisierungsgebiete, eine innere Kreisfläche um P mit Radius R_i und der eben losgelöste Ring. Indem die Feldverflachung zwischen beiden zunimmt, schrumpft R_i fast bis zum Verschwinden zusammen; wieweit der Ionisierungsring fortschreiten kann, ohne zu erlöschen (wie groß R_1 wird), hängt von dP:dt und P_m ab. Bild 2 unten gibt ein Wachstumsdiagramm; das Gebiet mit Stoßionisation ist schraffiert, es ist das Gebiet, welches jeweils leuchtet.

Beim Weiteransteigen der Spannung am Pole wird sich noch während des Wachsens oder Erlöschens eines Ringes ein neuer bilden können. Auch noch beim konstanten Andauern der Spannung P_m wird durch Absaugen der ungleichnamigen Elektrizitätsreste das Feld um P regeneriert, aber nicht voll; die gleichnamige auf der Platte festsitzende Ladung wirkt abschwächend. Die Regeneration genügt aber erfahrungsgemäß, um erneut weithin über F_i hinauszukommen, denn das Spiel wiederholt sich, immer erneut lösen sich Ionisierungsringe ab[2]), jedesmal wird die Platte stärker geladen zurückbleiben, bis schließlich der Rückstau dieser Ladungen das Spiel zum allmählichen Erlöschen bringt, falls $P_m < P_o$, oder bis vor Eintreten des Erlöschens der Gleitprozeß durchbricht, falls $P_m > P_o$ ist.

Die Wachstumsgeschwindigkeit anfangs, v_a, vgl. Bild 2 unten, erreicht vermutlich (vgl. Abschn. XXIV) angenährt

$$v_a = \frac{1}{2}(dP:dt) \qquad [v, cm:sec;\ P, kV;\ t, sec]. \qquad (1)$$

[1]) Exakte Behandlung muß natürlich auch die „elektrischen Spiegelbilder" im Metallbelage B berücksichtigen.

[2]) Beweis: Ziegeldachartiger Figurenrand bei Versuchen mit vorzeitig abgebrochener Ladung, vgl. M. Toepler, Phys. Zeitschr. l. c.; welcher Ring der größte wird, hängt vom Verlaufe von P ab.

Der Begriff „mittlere Wachstumsgeschwindigkeit des Polbüschels" bedarf bestimmter Definition, z. B. $R_1 : t_1$ oder $R^* : t^*$. Letztere ist gleichfalls proportional mit $dP : dt$, aber viel kleiner [1]) als v_a (etwa zehnmal) und dabei für positive Polbüschel etwa doppelt so groß wie für negative, auch wohl nicht mehr unabhängig von der Glasdicke a.

V. Alle Büschelspuren um den Gleitpol (Polbüschel) oder um die Gleitbüschelstiele deuten auf einen Aufbau der Büschelteile zwischen Pol bzw. Stiel und Büschelrand aus einzelnen Leuchtfäden von nahe konstanter Breite (Dicke) hin [2]). Das Vorrücken der Stoßionisation in Ionisierungsringen erfolgt also offensichtlich nicht in geschlossener breiter Front (wie etwa ein Wassererguß), sondern es brechen lawinenartig viele einzelne schmale Ladungszungen gleichzeitig vor. Da nur Gebiete mit Stoßionisation Licht entwickeln, so zeigt sich beim Vorwachsen (nach Bild 2) wesentlich nur an den stumpfen Zungenspitzen ein Leuchten. Für den Beobachter und die Photographie ensteht der Eindruck des gleichzeitigen Vorhandenseins lückenloser Leuchtfäden (von etwa 0,05 cm Dicke für positive und noch weniger für negative).

Das Auftreten einzelner getrennter Leuchtfäden und ihre Feinstruktur (Schaft und Fahne [3])) spricht für die Entstehung jedes Fadens aus einem einzigen Ion oder Elektron. Es bildet sich zunächst durch Stoßionisation eine Ionen- bzw Elektronenwolke [4]). Nur deren zentral stehende Ionen pflanzen den Ionisierungsprozeß weithin polabgewandt fort und geben den Schaft; die seitlich gelegenen Ionen werden jeweils vom Felde der Wolke beiderseits seitlich abgedrängt, bilden so die Fahnen und befinden sich bald im (unter die Ionisierungsspannung verkleinerten) Rückstaufelde des gesamten rasch vorschreitenden Ionisierungsringes.

VI. Nach Abschnitt III fließt ungleichnamige Elektrizität längs des Leuchtfadens dem Pole zu. Negative Polbüschel sind genau genommene Büschel positiver Ionen, die positiven Polbüschel sind Büschel negativer Elektronen (oder Ionen).

Vermutlich besitzen alle

Leuchtfäden nahe Ohmschen Widerstand (2)

als Folge von Reibung, jedenfalls aber eine steigende Charakteristik, d. h. Stromverstärkung in ihnen ist nur durch Steigerung des Potentialgefälles längs ihnen zu erzwingen [5]).

VII. Die Elektrizitätsbewegung zwischen Pol und Rand behalte bis zuletzt den Charakter der Leitung in Leuchtfäden bei, d. h. es komme nur zur Bildung eines Polbüschels d. h. es bleibe $P_m < P_o$.

Es gilt, solange $dP : dt \geqq 200 \cdot 10^6$ kV : sec ist für den Radius R^* der Polbüschel [6]) auf Platten verschiedenster Dicke

$$\left.\begin{aligned} R_n^* &= P_m : 11{,}5 \\ R_p^* &= P_m : \;\; 5{,}9 \end{aligned}\right\} [R, \text{cm}; \quad P, \text{kV}] \qquad \begin{aligned} &(3_n) \\ &(3_p) \end{aligned}$$

für $dP : dt = 20 \cdot 10^6$ kV : sec ist R^* auf 0,6 dieser Werte gesunken.

[1]) P. O. Pedersen, Danske. Vid. Selsk. Math. Fysisk. Medd. 1. 11. 1919 findet Geschwindigkeiten proportional der Spannung, was (vgl. meine Angaben Tab. I) wohl auch auf Proportionalität mit $dP : dt$ hinauskommt.

[2]) Scheinbar widerspricht dem das Aussehen der Photogramme vielerorts, z. T. da nur unmittelbar auf der Platte aufliegende Fadenteile eine Spur hinterlassen, z. T. da Nebeneinanderlagerung lückenlos erfolgen kann.

[3]) Schaft, d. h. der eigentliche Leuchtfaden, Fahne, d. h. der lichte Schein, vgl. M. T. Phys. Zeitschr. l. c.

[4]) Diese Auffassung erklärt auch zwanglos die bekannte Verbreitung der Leuchtfäden bei niederen Drucken (nahe umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Drucke).

[5]) Eine Analogie finden nur am Kopfe leuchtende Fäden in den lichtlosen fadenförmigen Strömungsbahnen, die vom Glimmen einer frei im Raum stehenden Elektrode ausgehen, nur ruht hier das Ionisierungsgebiet, die Glimmhaut der Elektrode, während es sich bei den Leuchtfäden als Ionisierungsring verschiebt.

[6]) Vgl. M. T. Phys. Zeitschr. l. c. Die Plattendicken variierten zwischen 0,1 cm und 1,7 cm.

Die Erweiterung der Ionisierungsringe stockt also erfahrungsgemäß ($P_m < P_o$ werde mit $dP:dt \geqq 200 \cdot 10^6$ kV:sec erreicht), wenn die durchschnittliche radiale Feldstärke unter 11,5 kV:cm für negative, unter 5,9 kV:cm für positive Leuchtfäden sinkt. Dann bleibt offenbar für den Außenrand des Ringes, d. h. die Leuchtfadenköpfe weniger als 30 kV:cm, weitere Ionisierung hört auf[1]).

Das Gesamtbild des Polbüschels für bestimmtes P_m ist das Ergebnis wiederholten Übergießens (vgl. Bild 2 unten).

Anfangs (erste Übergüsse) enthält sowohl die negative als auch die positive Figur nur wenige nahe äquidistante Leuchtfäden gleicher Länge[2]), und zwar für großes dP:dt zahlreichere als für kleines.

Abgelagerte freie Ladungen hemmen, vorhandene Ionen und Erwärmung begünstigen neue Ergüsse auf alten Bahnen. Die Leuchtfäden späterer Übergüsse haben dementsprechend zwei Tendenzen, die Lücken der früheren auszufüllen, alte Bahnen zu benutzen. Dabei überwiegt erstere bei negativen, letztere bei positiven Ergüssen, denn in negativen Polbüscheln lagern sich die Leuchtfäden zu geschlossenen Sektoren nebeneinander und es bleiben nur schmale lichtlose Schlitze, in positiven Polbüscheln findet dagegen mehr gruppenweises Übereinanderlagern statt.

Die Gesamtfiguren (Summe aller Übergüsse) sind für großes $dP:dt \geqq 300 \cdot 10^6$ kV:sec Kreisflächen, deren Rand auch bei positiven Polbüscheln fast geschlossen und wenig eingekerbt erscheint, negative Polbüschel zeigen viele Sektoren mit schmalen Schlitzen. Bei kleinem $dP:dt \leqq 10 \cdot 10^6$ kV:sec besitzt die Gesamtfigur negativer Polbüschel wenige breite Sektoren mit breiten Schlitzen (ja sogar schlitzloser allseitiger Erguß tritt auf); die positiven Polbüschel zeigen in diesem Falle die bekannte Sterngestalt[3]) mit ihren tiefen Einkerbungen als Folge des gruppenweisen Zusammenlagerns nachträglicher Leuchtfäden. Die Zahl der Gruppen, d. h. der Sternstrahlen, nimmt ab mit abnehmendem dP:dt, die Tiefe der Einkerbungen nimmt zu.

VIII. Aus der starken Gruppenbildung bei positiven Polbüscheln ist auf eine etwas längerdauernde Hysteresis geringeren Widerstandes bei positiven als bei negativen Leuchtfäden zu schließen. An und für sich ist die

Nachwirkung der Leuchtfäden sehr kurzdauernd, (4)

schon nach 10^{-7} sec hat die Luft im Leuchtfaden fast die ursprüngliche Durchschlagfestigkeit[4]). Trotzdem bringt immer erneute Benutzung der gleichen Bahn schließlich eine fundamentale Veränderung der Bedingungen für weitere Strömungen in ihr zustande; ist über eine Stelle eine bestimmt angebbare Elektrizitätsmenge[5]) innerhalb sehr kurzer Zeit geflossen, so verwandelt sich dieses Strömungsstück in einen „Ladungskanal", ein Stück „Funken".

[1]) In allen Gasen, in denen negative Elektronen und positive Ionen die Elektrizität tragen, ist wohl das gleiche Zahlenverhältnis 1:2 für negativ und positive Polbüschelradien zu erwarten; dies Verhältnis gilt nach K. Przibram, Phys. Zeitschr. 21, S. 482, 1920 nahezu auch für N_2 und H_2; für CO_2 und Cl_2 nicht, hier sind wohl beide Träger Ionen oder Ionenelektronengemische oder geladene größere Gasklumpen.

[2]) Beweis: Gestalt der Polbüschelphotogramme bei vorzeitig abgebrochener Entladung mit Anordnung III Abschnitt XXV, vgl. M. T. Phys. Zeitschr. l. c.; mit großem dP:dt erzeugte positive Polbüschel sehen bis auf den zentralen Teil ganz so aus wie Gleitbüschel mit großem dP:dt, d. h. wie Bild 3b vorliegender Übersicht.

[3]) Photogramme negativer Polbüschel bei mittlerem dP:dt vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 53, S. 217, 1917; positive Polbüschel S. Mikola, Phys. Zeitschr. 18, 158, 1917, beide bei P. O. Pedersen l. c., daselbst auch Angabe älterer Literatur.

[4]) Beweis: M. T. Phys. Zeitschr. l. c., Größe der Rückschlagspuren. Ganz fehlt die Nachwirkung nicht, wie auch aus Polbüschelgrößen bei technischer Wechselspannung vgl. Abschnitt XXVIII zu schließen ist.

[5]) Für negative Leuchtfäden etwa 1 stat. Einh. vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 53, S. 232, 1917, hier ist der Mechanismus der Bildung eines Ladungskanales eingehend behandelt.



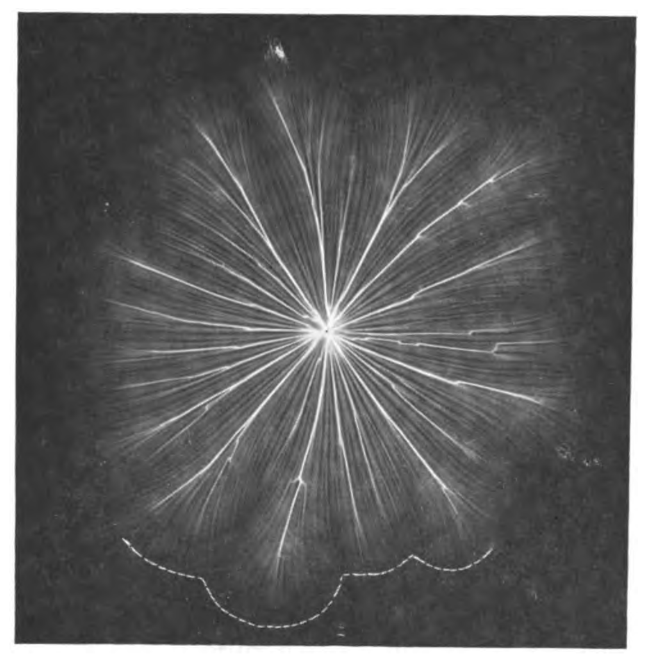


Bild 3a.

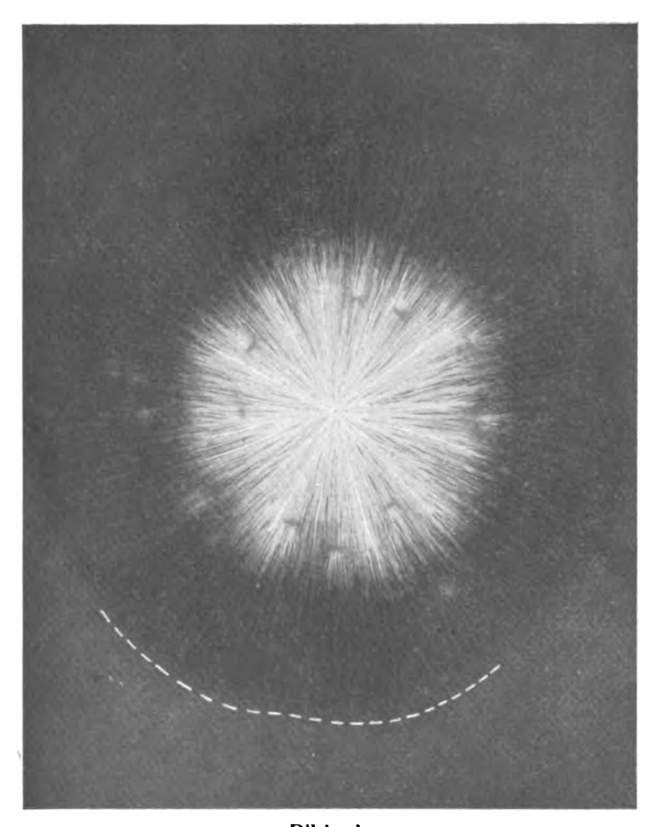


Bild 3b.

Toepler, Über die physikalischen Grundgesetze der in der Isolatorentechnik auftretenden elektrischen Gleiterscheinungen.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

„Durchbruchspannung" P_o heiße die Spannung, bei der diese Umwandlung auf einzelnen Leuchtfäden eines Polbüschels zuerst erreicht wird. Es ist angenähert

$$\left.\begin{array}{l} P_o = 48{,}5 \cdot \sqrt{a} \text{ für negative Ergüsse} \\ P_o = 45 \cdot \sqrt{a} \text{ für positive Ergüsse}^{1)} \end{array}\right\} [P_o, \mathrm{kV};\ a, \mathrm{cm}] \qquad (5)$$

und zwar unabhängig vom Werte dP : dt [2]).

Der für P_o erreichte Radius des Polbüschels sei mit l_o bezeichnet; aus (3) und (5) ist l_o zu rechnen; beobachtet ist ungefähr

$$\left.\begin{array}{l} l_o = 4{,}2 \cdot \sqrt{a} \text{ für negative Figuren} \\ l_o = 8 \cdot \sqrt{a} \text{ für positive Figuren}^{3)} \end{array}\right\} [l_o, \mathrm{cm};\ a, \mathrm{cm}]. \qquad (6)$$

Gleitbüschel (Gleitfunkenkorona).

IX. Mit dem Auftreten von Ladungskanälen ändert sich der Gesamtcharakter des Ergusses, der eigentliche Gleitprozeß (Bildung einer Gleitfunkenkorona) beginnt.

Der Übergang erfolgt mehr oder minder allmählich, je größer oder je kleiner dP:dt ist, besonders auffällig wird dies bei negativen Ergüssen. Bild 3a zeigt, wie ein negativer, Bild 3b wie ein positiver Gleiterguß während des Vorwachsens, und zwar kurz nach seinem Durchbruche mit größtem dP:dt aussieht [4]). Bei sehr großem dP:dt (vgl. auch Bild 4a) schwenken die weiterwachsenden Leuchtfadenköpfe ganz kontinuierlich in die beim kontinuierlichen Entstehen der Ladungskanäle allmählich sich ändernde Feldrichtung ein; bei mittlerem dP:dt (etwa $100 \cdot 10^6$ kV:sec), vgl. Bild 4b, erfolgt die Kanalbildung erst kleine Zeit nachhinkend, die noch nicht ganz erloschenen Leuchtfäden des Polbüschels schwenken in scharfem Knicke in die sich ändernde Feldrichtung ein; bei dP:dt $\leqq$ etwa $50 \cdot 10^6$ kV:sec (vgl. Bild 4c), war das Wachsen des Polbüschels beim Durchbruche des Gleitprozesses schon erloschen [5]).

Auch die Zahl der Durchbruchstellen, an denen rings um P nahe gleichzeitig die Umwandlung erfolgt hängt von dP : dt ab; die Durchbrüche erfolgen nicht genau gleichzeitig (kenntlich an kleinen Unterschieden in l_o); bei kleinem dP:dt haben

[1]) Die Werte (5) gelten für Glas mit Dielektrizitätskonstante 7,5; allgemeingültiger wäre a durch $7{,}5 : 4\pi \cdot c$ zu ersetzen.

[2]) Vgl. auch Tab. XV, Abschnitt XXVIII.

[3]) Vgl. Messungen von l_o M. Toepler, Ann. d. Phys. 53, S. 225, 1917 und Phys. Zeitschr. l. c.

[4]) Da die in natürlicher Größe wiedergegebenen Photogramme 3a und 3b mit Anordnung III, Abschnitt XXV hergestellt wurden — 3a mit F gleich 1,50 cm und F′ gleich 1,00 cm, 3b mit F gleich 1,25 cm und F′ gleich 1,00 cm —, so kam hier nach Tab. I die Spannung am Gleitpole auf 32,6 kV (entsprechend F′) mit dP:dt gleich $327 \cdot 10^6$ kV:sec bzw. $287 \cdot 10^6$ kV:sec (entsprechend F) und sank sofort wieder auf Null. Die Bilder 3a und 3b zeigen also jedes nicht nur die Hinfigur (Ladung), sondern auch ihr superponiert die Rückschlagspur (Rückentladung nach dem Pole, vgl. M. Toepler, Phys. Zeitschr. 21, S. 709, 1920). Letztere ist bei 3a kaum zu erkennen, stört also hier gar nicht; umgekehrt bei 3b, wo die Hinfigur sehr schwach, die Rückschlagfigur aber so stark ist, daß in ihr nur die Ladungskanäle der schwachen Hinfigur soeben noch erkennbar sind. Die Schwärzung der Originalplatte, d. h. die Hinfigur reichte bis zu der je für einen Figurensextanten gestrichelt eingezeichneten Linie. Die Plattendicke a betrug 0,120 cm, das Polbüschel hatte also nach Gleichung (6) im Augenblicke des Entstehens (Durchbruches) der Ladungskanäle bei 3a 1,45 cm, bei 3b 2,8 cm Radius. Die Gleitfigur selbst erreichte 4 cm Radius — soweit man erkennen kann ohne irgend wahrnehmbaren Absatz oder Wachstumsruck bei 1,45 cm bzw. 2,8 cm zwischen Polbüschel und Gleitfigur, bei 3b stört freilich sehr die stark ausgeprägte Rückschlagspur. Die Zahl der Durchbrüche beträgt 23 bei Bild 3a und mindestens 13 in 3b. Hätte die Spannung 32,6 kV länger angedauert, so wären die Gleitfiguren noch weiter gewachsen, z. B. bei Bild 3a nach Gleichung (14a) bis zu einer radialen Länge von etwa 150 cm.

Weiteres Beispiel völligen Fehlens jeglichen Einschnittes zwischen Pol- und Gleiterguß ist die von K. Przibram, Phys. Zeitschr. 19, 1918, Bild 4 gegebene Photographie in Stickstoff.

[5]) Beispiele für 4b und 4c sind in den Photogrammen M. Toepler, Ann. d. Phys. 53, Tafel 1 und 2, 1917 zu finden, vgl. auch oben Bild 6b und 6c.

die ersten Durchbrüche Zeit zu breiterer Entwicklung, entziehen also weiteren die Entstehungsmöglichkeit. $350 \cdot 10^6$ kV : sec gibt 20 bis 18 Durchbrüche, vgl. Bild 3 und 5; $200 \cdot 10^6$ kV : sec 12 bis 8, vgl. Bild 6a und 6b; $\leqq 20 \cdot 10^6$ kV : sec nur noch 3 bis 1, vgl. Bild 6c. Damit hängt zusammen daß allgemein gilt: großes dP : dt gibt regelmäßigere und mehr kreisrunde Gleitergüsse als kleineres dP : dt.

X. Für 1 cm Ladungskanal in Ergüssen, die mit dP : $\geqq 200 : 10^6$ kV : sec hergestellt wurden, gilt[1])

$$E \cdot W = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \qquad [E, \text{Coulomb}; \; W, \text{Ohm}] \tag{7}$$

E ist die gesamte durch das Kanalstück geflossene Elektrizitätsmenge, W das Verhältnis von Potentialgefülle (in Volt: cm) zur Stromstärke (in Ampere).

Je länger das gleiche E braucht, um durch ein Kanalstück zu fließen (Zeit T), um so größer wird der Widerstand; Molisation, Abkühlung u. a. m. haben Zeit zur Wirkung. Es ist also wohl allgemeiner zu setzen

$$E \cdot W = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\alpha T},$$

worin α eine noch nicht festgestellte Konstante bedeutet.

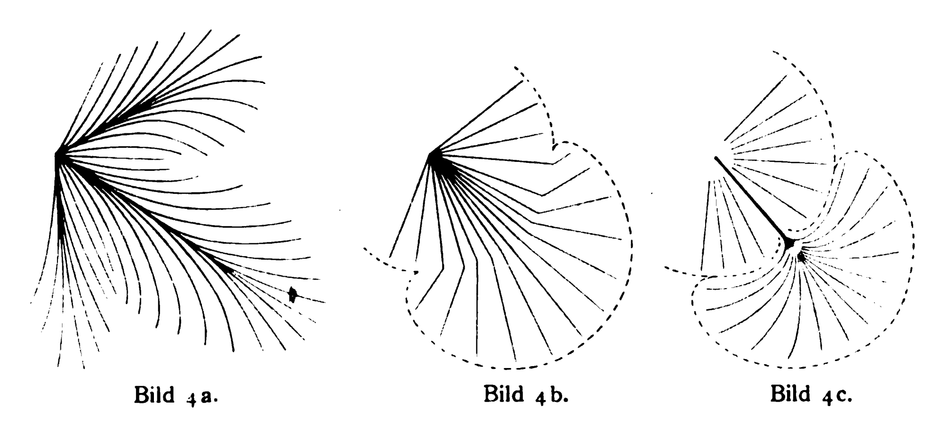


Bild 4a. Bild 4b. Bild 4c.

Außer größerer Leitfähigkeit zeigt sich auch[2])

längerdauernde Hysteresis derselben in den Ladungskanälen (8)

als wie in den Leuchtfäden.

XI. Da die Kanäle gut leiten, so bilden sie gewissermaßen vorwachsende Verlängerungen des Poles. Von ihren vorschreitenden Enden aus bilden sich Endbüschel (Teilbüschel) aus, die ganz wie die Polbüschel aus Leuchtfäden aufgebaut sind. Für diese Endbüschel gilt wieder das für Polbüschel Gesagte in sachgemäßer Übertragung, z. B. Feld am Fadenkopfe etwa 30 kV : cm, Loslösung eines Ionisierungsbogens sobald $v < v_i$, durchschnittliches Gefälle beim Stoppen auf negativen Fäden 11,5 kV : cm auf positiven 5,9 kV : cm. Die Länge l_e des regulären Endbüschel vom Kanalende bis zum Büschelrande ist angenährt gleich l_0, noch etwas kleiner fällt die Breite b des Büschels beiderseits eines Ladungskanales aus, also

$$\left.\begin{array}{l} l_e \text{ und } b \leqq 3{,}6 \cdot \sqrt{a} \text{ für negative Ergüsse} \\ l_e \text{ und } b \leqq 7{,}2 \cdot \sqrt{a} \text{ für positive Ergüsse} \end{array}\right\} [l_e, \text{cm}; \; b, \text{cm}; \; a, \text{cm}]. \tag{9}$$

Wird der Abstand zweier vorwachsender Ladungskanäle größer als 2 b, so wird Platz zu einer Spaltung des Ladungskanales. Als Ideal der Anordnung der Ladungskanäle von einem Gleitpole aus ergibt sich demnach Bild 5. Der Aufbau negativer und besonders positiver Gleitergüsse, hergestellt mit möglichst großem

[1]) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 219, 1906.

[2]) Beweis z. B. das Verhalten der Rückschlagspuren bei Anordnung III, vgl. M. T. Phys. Zeitschr. l. c.

dP : dt, ist tatsächlich so. Je kleiner dP : dt, um so unregelmäßiger der Aufbau, hierzu kommt dann noch bei negativen Ergüssen unterhalb $50 \cdot 10^6$ kV : cm die in Abschnitt XIII zu schildernde Rückstufenbildung.

XII. Während der Polbüschelbildung existiert freie Elektrizität (Felddivergenz) wesentlich nur am Pole und am Ionisierungsringe (Leuchtfadenköpfe), vgl. Abschnitt III. Die Komponente des Gesamtfeldes verläuft auf der Plattenoberfläche im wesentlichen radial.

Bei Gleitfiguren geht auch noch von den Ladungskanälen starke Feldwirkung aus; unregelmäßige Gestalt der Kanäle kompliziert die Feldverteilung, Unregelmäßigkeiten ihres Vorwachsens ändern beständig die Feldrichtung, besonders am Figurenrande. Ist letzterer, wie bei positiven Figuren in eine lockere Reihe von Leuchtfadenköpfen aufgelöst, so ergibt sich aus deren Wechselwirkungen manchmal ein ganz krauses Durcheinander der Wachstumsrichtungen im letzten Wachstumsstadium.

Die Tangente der Leuchtfäden der Photogramme gibt die Richtung der Feldkomponente in der Plattenoberfläche am Fadenkopfe im Augenblicke, in dem dieser sich im Berührungspunkte der Tangente befand [1]).

XIII. Messungen und Beobachtungen zeigten, daß Größe und innerer Aufbau des Gleitergusses davon abhängen, mit wie großem dP : dt man das gleiche konstantbleibende P_m erreicht.

Im Bereiche von $300 \cdot 10^6$ kV : sec bis $2 \cdot 10^6$ kV : sec nimmt nicht nur die Gesamtgröße f_m ab, sondern auch die Teile, also auch R^*, l_0, l, l_e sowie b; angenähert gilt:

$$\text{alle Längen proportional } \sqrt{dP : dt}. \qquad (10)$$

Für den inneren Bau der Ergüsse gilt (jedoch ohne scharfe Grenze zwischen den einzelnen Ergußformen):

A. bei negativen Ergüssen:

$dP : dt \geqq 300 \cdot 10^6$ kV : sec gibt lange, glatte federartige Ergüsse, die offensichtlich ohne Stocken auf die Isolatoroberfläche ausgebreitet wurden, wie bei Bild 3a, 4a, 5 und 6a;

dP : dt etwa $100 \cdot 10^6$ kV : sec, der Erguß stockt öfters, Polbüschel schnürt sich ab wie Bild 4b, die Gleitfigur zeigt lange federförmige, aber auch kurze fächerförmige Teile unregelmäßig gemischt, wie Bild 6b;

dP : dt $30 \cdot 10^6$ kV : sec bis $20 \cdot 10^6$ kV : sec, Polbüschel scharf abgegrenzt wie Bild 4c, regelmäßige, fächerförmige Ruckstufen, die Spur des Ergusses erscheint also geschichtet, geperlt (Optimum der Schichtung) wie Bild 6c;

dP : dt etwa $2 \cdot 10^6$ kV : sec, der Erguß bleibt geruckt, aber Regelmäßigkeit der fächerförmigen Ruckstufen und Gesamtausdehnung schon sehr verringert;

$dP : dt < 10^6$ kV : sec, nur noch sehr verkümmerte Büschelbildung, entferntere Oberflächenteile haben Zeit, sich durch Elektronen- und Ionenfang aus der umgebenden Luft lichtlos zu laden; schließlich unterbleibt jeder leuchtende Ladungsvorgang durch Gleiten vom Pole aus.

Allgemein ist aber damit zu rechnen, daß bei zunehmender Verkümmerung des von der Polspitze ausgehenden Gleitprozesses die gewöhnliche räumliche

[1]) Vgl. als schönes, jederzeit leicht zu erhaltendes Beispiel für das Einschwenken von Leuchtfädenköpfen in eine stark sich ändernde Feldrichtung, Phot. 1 bei K. Przibram, Wiener Akad. Ber. 108. IIa. S. 1161.



Korona (Streifenentladung) von der rückwärtigen Polzuführung aus direkt die Oberfläche ladet[1]).

In Bild 7 sind Wachstumsdiagramme für verschiedene dP:dt schematisch dargestellt.

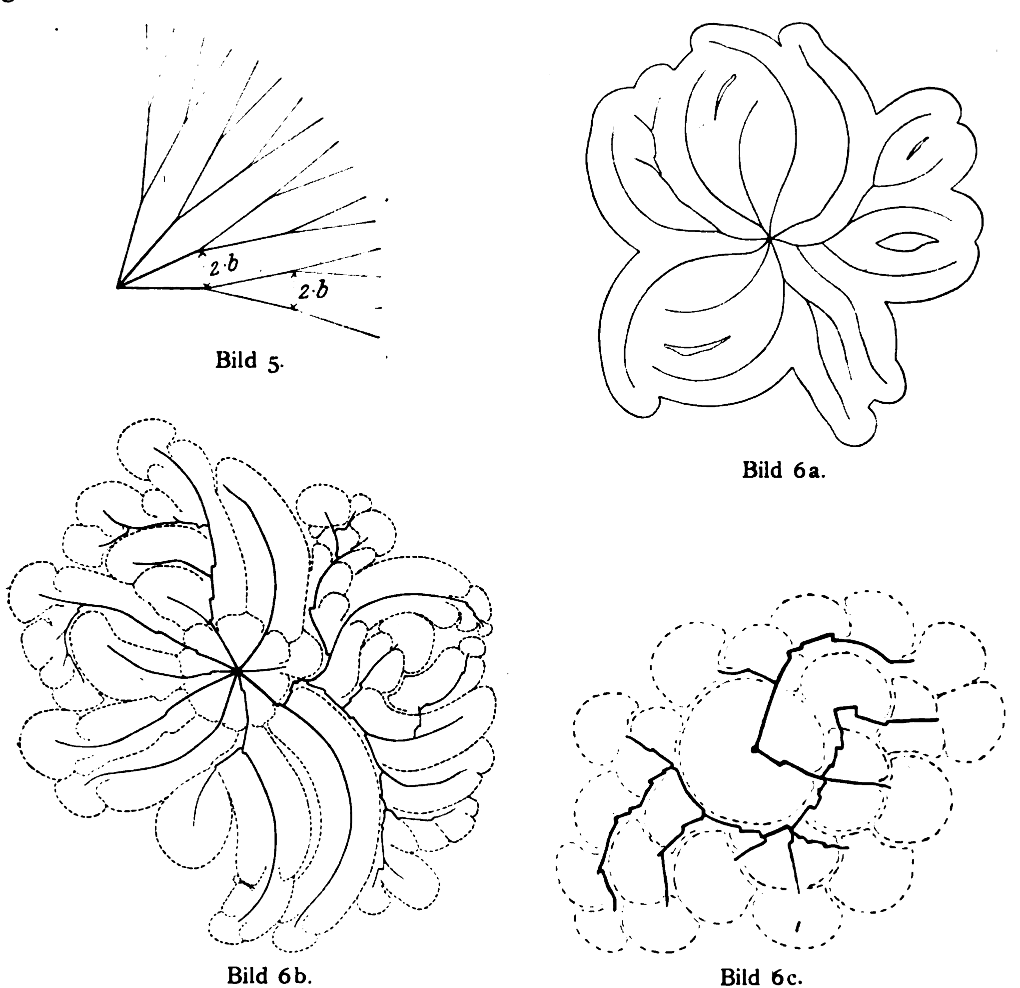


Bild 5.

Bild 6a.

Bild 6b.

Bild 6c.

B. positive Ergüsse:

Ihre Größe schrumpft in gleicher Weise bei Abnahme von dP:dt, ausgehend von glatten Ergüssen wie Bild 5 tritt bei kleinerem dP:dt erst Abschnürung des Polbüschels, dann Ruckstufen im Gleitergusse auf; diese bleiben aber sehr unregelmäßig[2]).

[1]) Die Bilder 6a ($\frac{1}{4}$ linear), 6b ($\frac{1}{3}$ linear) und 6c ($\frac{1}{3}$ linear) geben nach Pausen photographischer Aufnahmen verkleinerte Umrisse und Ladungskanäle; sie sind mit Anordnung II, I und V (443 Ohm) bei gleicher Spannung (F gleich 0,80 cm entsprechend 26,6 kV) aufgenommen auf Platten von a gleich 0,148 cm, gleich 0,164 cm und gleich 0,214 cm, also von angenähert gleicher Dicke; dP:dt war auf $\geqq 200 \cdot 10^6$ kV:sec, $\leqq 200 \cdot 10^6$ kV:sec und $20 \cdot 10^6$ kV:sec zu schätzen. Ein Photogramm wie 6b siehe M. T., Meteorolog. Zeitschr. 1917, S. 235, Fig. 3a, Photogramm wie 6c ebenda Fig. 3b und 3c sowie Ann. d. Phys. 53, 217, Phot. 3, 4 und 5, sowie P. O. Pedersen l. c. Bild 5.

[2]) Regelmäßiger Bau wie Bild 5 führt oft zu einer regelmäßigen schachbrettartigen Bärlappspur (mit Rhomben statt Quadraten), die aber nicht mit Ruckstufenbildung verwechselt werden darf.

XIV. Die Abnahme der Figurengröße (und der Wachstumsgeschwindigkeit, vgl. Abschnitt XV) bei verkleinertem dP:dt bis zum völligen Verkümmern erklärt sich ohne weiteres aus dem Abklingen der Leitfähigkeit der Ladungskanäle und Leuchtfäden durch Abkühlung, Molisation u. a. m.

Auch die Ruckstufenbildung ist leicht zu erklären: Aus Abschnitt IV folgt, daß die Wachstumsgeschwindigkeit v oder df:dt des Figurenrandes nur im Mittel (über Stoppen und Wachsen) unter v_i sinken kann, aber nie durchweg. Will an einer Randstelle df:dt unter v_i sinken, so löst sich ein mit v_i vorschreitender Ionisierungsbogen los. Da die Quelle nur $v < v_i$ hergeben will, muß bald ein Stoppen und Erlöschen des Vorwachsens des Bogens folgen unter Ablagerung einer Zone dem Pole gleichnamiger Elektrizität. Steigt dann die Spannung innerhalb der Figur weiter an, so kann und wird schließlich dieser abgelagerte hindernde Ladungsbogen wieder unter hohen Spannungsgefälle durchbrochen werden. Das df:dt, d. h. v an dieser Stelle ist zunächst wieder $> v_i$, mangels genügender Zufuhr sinkt aber v rasch wieder unter v_i, Losreißen eines Ionisierungsbogens, Stoppen, Erlöschen folgt. So wiederholt sich die Bildung fächerförmiger Teilergüsse am Rande; die gesamte Figur wächst durch abwechselndes Vorschieben der verschiedensten Randteile.

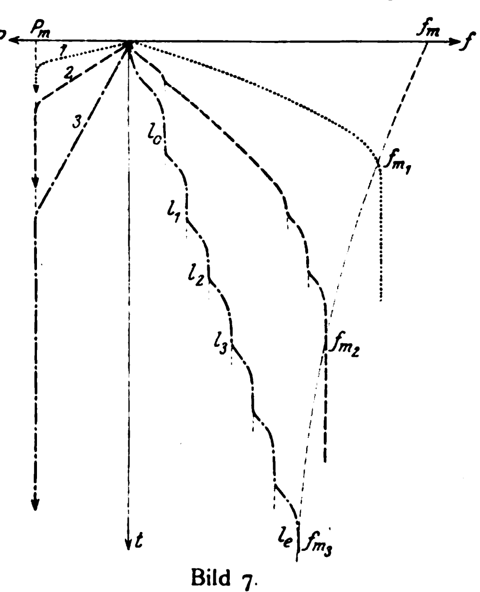


Bild 7.

Der Fächerradius l der Vorschiebungen, Ruckstufen, Perlen ist unabhängig von dem Winkel des Sektors, den der Teilerguß einnimmt. Nahe am Pole ist l vom dP:dt des Poles abhängig[1], fern vom Pole aber von dem dP:dt benachbarter Ladungskanäle. Für dP:dt etwa gleich $50 \cdot 10^6$ kV:sec ist[2])

$$l = 3{,}56 \cdot \sqrt{a} \qquad [l, \text{cm}; a, \text{cm}]. \qquad (11)$$

Die Ruckstufenbildung, Schichtung, Perlung ist also ein Anzeichen für $v \leqq v_i$ und zugleich ein Vorbote völligen Erlöschens[3]).

XV. Für die Absolutwerte der Wachstumsgeschwindigkeit folgt aus II und XIII, da das

$$\text{Optimum der Ruckstufenbildung bei } v \leqq v_i \qquad (12)$$

eintritt, daß zu $25 \cdot 10^6$ kV:sec eine Geschwindigkeit von $\leqq 36 \cdot 10^6$ cm:sec gehört.

Nach Tabelle XII ist allgemein v numerisch gleich dP:dt, da aber andere Schätzungen (vgl. Abschnitte XXI und XXVI) kleinere Werte gaben, so kommt wohl

$$v = \tfrac{1}{2}(dP:dt) \qquad [v, \text{cm:sec}; P, \text{kV}; t, \text{sec}], \qquad (13)$$

während des Anstieges von P der Wahrheit nahe. Dies gilt, vgl. Bild 13d, angenähert gleich für negative und positive Gleitergüsse.

XVI. Aus Gleichung (13) folgt: Bei gleichem P während des Anstieges, also zu Zeiten umgekehrt proportional dP:dt, ist die jeweils erreichte Ergußlänge f gleich auf verschiedensten Platten und auch bei verschiedenstem dP:dt. Bild 8

[1]) Vgl. auch Bild 14.

[2]) Vgl. die Messungen M. Toepler, Ann. d. Phys. 53, S. 226, 1917.

[3]) Auch die Schichtung des Büschellichtbogens in freier Luft (vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 63, S. 109, 1897 u. a. m.) und die bekannte Geißlerrohrschichtung erfolgen nahe beim Erlöschen von kontinuierlichen Strömen; desgleichen die Bildung der Perlschnur bei Blitzen, vgl. M. Toepler, Meteorolog. Zeitschr. 1917, S. 225.

zeigt für zwei verschiedene Werte $dP:dt$, bei Kurve 1 größer als bei 2, den (hypothetischen) Spannungsverlauf, durch den dies ermöglicht wird. Am Kopfe treibt größeres Gefälle für 1 den Prozeß schneller vorwärts; vgl. Abschnitt II. Die Endbüschellängen l_{e1} und l_{e2} gehorchen[1]) dem Gesetze (10). Da nahe die gleiche Elektrizitätsmenge in Zeiten umgekehrt proportional $dP:dt$ ausgegossen wird, muß nach Gleichung (7) das Gefälle längs dem Ladungskanale $f_1 - l_{e1}$ größer sein als längs $f_2 - l_{e2}$.

XVII. Für die schließlich erreichte größte Gleitlänge f_m gilt als einfachste Interpolationsformel

$$f_m = \gamma \cdot P^5 \cdot c^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{dP:dt}{300 \cdot 10^6}} \quad [f_m, \text{ cm}; P, \text{ kV}; c, \text{ cm}; t, \text{ sec}] \qquad (14a)$$

mit γ gleich $0{,}17 \cdot 10^{-6}$ für negative und $0{,}20 \cdot 10^{-6}$ für positive Ergüsse, vgl. Abschnitt XXII u. XXIII. Ruckstufenbildung, besonders Abschnürung des Polbüschels, drückt sich durch Auftreten von Knickstellen im Spannungsverlaufe aus, vgl. Bild 9.

Jeder Gleiterguß besteht aus Endbüscheln (Länge l_e) und Ladungskanal (Länge $f_m - l_e$). Für l_e gilt Gleichung (9). Bei größtem $dP:dt$ sind die Längen $(f_m - l_e)$ fast gleich für negative und positive Ergüsse; dementsprechend steigt das Verhältnis negativ und positiv f_m von 1 : 2 für $P_m = P_0$ bis auf 1 : 1, wenn P_m groß

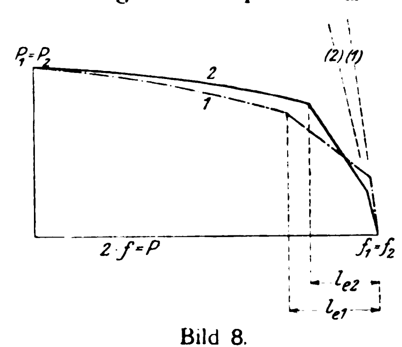
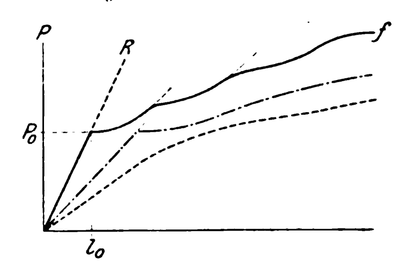


Bild 8.



Für kleines, mittleres, großes $dP:dt$.

Bild 9.

gegen P_0 (vgl. $f_p : f_n$ in Tabelle IIb bis VIIb). Der Längenunterschied negativer und positiver Gleitergüsse rührt hier überwiegend von dem Unterschiede ihrer Endbüschel her. Dies berücksichtigt die Interpolationsformel[2])

$$f_m - l_e = \mu \cdot P_m^3 \cdot (P_m - 33\sqrt{a}) \cdot \sqrt[4]{\frac{dP:dt}{300 \cdot 10^6}}. \quad [f_m, l_e, a \text{ in cm}; P, \text{ kV}; t, \text{ sec}]. \quad (14b)$$

Hierin ist angenähert

$$\mu = 10 \cdot 10^{-6} : a^{\frac{3}{2}} = 21{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot c^{\frac{3}{2}}. \quad [a, \text{ cm}; c, \text{ cm}]$$

Für kleinere $dP:dt$ überwiegen die positiven $(f_m - l_e)$ über die negativen vgl. $f_p : f_n$ in Tab. VIIIb bis Xb), erstere nehmen entsprechend Formel (14b) wie $\sqrt[4]{dP:dt}$ ab, letztere aber etwas schneller. Als Grenzwert für das Verhältnis positiver zu negativen $(f_m - l_e)$ wird bei $10 \cdot 10^6$ kV : sec etwa 1,35 erreicht, d. h. angenähert das Verhältnis der Beweglichkeit negativer Ionen zu positiven Ionen in trockener Luft.

Allgemein kann man sagen:

der Unterschied negativer und positiver Gleitergüsse verschwindet um so mehr, je größer $dP:dt$ ist.

[1]) Vorausgesetzt, daß Gleichung (10) nicht nur für die Endbüschel fertiger Gleitergüsse gilt, sondern auch schon während des Vorwachsens, wogegen aber mancherlei spricht.

[2]) Da $33 \cdot \sqrt{a}$ angenähert die Durchbruchspannung P_0 ist, so hat $(P_m - 33 \cdot \sqrt{a}) : (f_m - l_e)$ die physikalische Bedeutung des durchschnittlichen Gefälles längs des Ladungskanales; dies ist also umgekehrt proportional P^3.

Für große f_m und P_m wird also f_m proportional $P^4 \cdot c^{\frac{3}{2}}$. Beide Formeln (14) genügen bis etwa f_m gleich 60 cm; welche Formel noch größere Gleitlängen richtig wiedergibt, konnte noch nicht festgestellt werden, denn leider sind die Messungen sehr großer Gleitlängen dadurch unsicher, daß die verfügbaren Kapazitäten nicht genügten, um Komplikationen durch Ruckstufenbildung höherer Ordnung d. h. Funkenbüschelbildung hintanzuhalten.

Ungenügende Kapazitäten oder Stromquellen; Bildung von Funkenbüscheln.

XVIII. In die Gleitfigur fließt die Elektrizitätsmenge $E = \alpha \cdot \psi \cdot c \cdot P$; die geladene Fläche ψ ist bei Vollbelegung nahe $\pi \cdot f^2$, α ein Zahlfaktor zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$[1]).

Am Anfange eines Ergusses gilt Gleichung (13), also $f = P:2$, so daß

$$E = \frac{1}{4}\alpha\pi c P^3 = 2\alpha\pi c f^3 \quad \text{[alles in stat. Einh.].} \tag{15}$$

Hieraus Stromstärke i_P am Pole

$$i_P = \frac{dE}{dt} = \frac{3}{4}\cdot\alpha\cdot\pi\cdot c\cdot P^2\cdot\frac{dP}{dt} = 6\,\alpha\cdot\pi\cdot c\cdot f^2\frac{df}{dt}\,{}^{2)} \quad \text{[stat. Einh.].} \tag{16}$$

Ist ψ klein, so gibt der Einfluß des Abströmens eine leicht angebbare Korrektion der ohne ψ geltenden Polspannung, z. B. bei Anordnung II auf Anbringen des Faktors $C_{12} : (C_{12} + \alpha \cdot c \cdot \psi)$.

Ist ψ groß so tritt etwas wesentlich Einschneidenderes, Bildung von Funkenbüscheln, auf.

Nur bei genügender Elektrizitätszufuhr reguliert der Gleitprozeß den Strom nach Gleichung (16); bei großen Gleitfiguren ist i_P durch die Elektrizitätsquelle der Versuchsanordnung begrenzt, z. B. ist für Anordnung II[3])

$$i_{max} = \frac{C_F}{720}\cdot\frac{P_F^2}{4\cdot F}. \quad [\text{i, Amp.; } C_F\text{, cm; } P_F\text{, kV; F, cm}]. \tag{17}$$

Formel (16) zeigt, daß für nahe konstante Stromstärke sowohl $dP:dt$ als auch die Wachstumsgeschwindigkeit $df:dt$ für zunehmendes P rasch kleiner wird. Damit steigt der Einfluß der Molisation und Abkühlung in der Gleitspur. Die Erfahrung (Abschnürung von „Funkenbüscheln") lehrt, daß hierdurch der Gleitprozeß vor Erreichen von f_m und P_m völlig zum Stillstande kommt — bei f_1 und P_1, „erstes Funkenbüschel" schnürt sich ab. Gleichung (16) mit (17) gibt f_1^2, also auch ψ_1, d. h.

die erste Ergußfläche proportional C_F umgekehrt proportional c, (18)

wie Tabelle XII bestätigt.

Es kann weiterhin zweierlei eintreten:

1. Die dem Pole weiter zugeführte Elektrizität steigert die Polspannung bis P_m, aber es bleibt bei einer vom Pole ausgehenden Ladungserhöhung innerhalb der Gleitfigur f_1; f_1 ist unabhängig von $P_m \geqq P_1$.

2. Die Spannung steigt nach dem ersten Stoppen P_1 weiter so hoch, daß ein Durchbruch durch die um P herum abgelagerten Ladungsreste des ersten Ergusses, d. h. ersten Funkenbüschels, also durch f_1 eintritt; ein zweiter

[1]) Messungen von K. Przibram, Wien. Akad. Ber. IIa, S. 1203, 1919 deuten darauf hin, daß wohl α näher $\frac{1}{3}$ als $\frac{2}{3}$ liegt.

[2]) Benutzt man nicht absolute statische Einheiten, so ist für i in Amp., c in Farad, P in Volt, t in sec der Faktor $1:90000$ auf der rechten Seite hinzuzufügen (für c in cm, P in kV ist $1:81\cdot10^6$ zu nehmen).

[3]) M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 220, 1906; für i in Ampere, C_F in Farad, F Länge der Hauptfunkenstrecke in cm, P_F zugehörige Anfangsspannung in Volt ist $0{,}8\cdot10^{-3}$ statt 720 zu setzen.

Erguß; zweites Funkenbüschel lagert sich an das erste. Der Prozeß wiederholt das alte Spiel in einer erhöhten Spannungslage[1]); u. s. w.

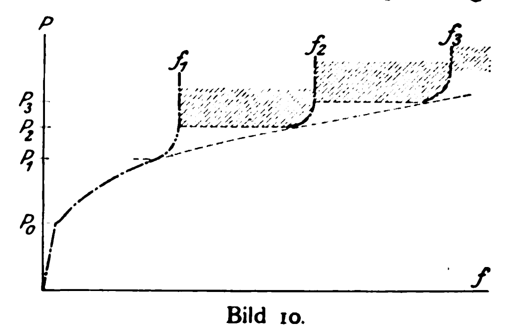


Bild 10.

Die einzelnen Teilergüsse ähneln den fächerförmigen Ruckstufen des Abschnittes XIV, nur sind sie viel größer und bestehen ihre Fächerstäbe aus Funkenkanälen, nicht aus Leuchtfäden; man kann daher zweckmäßig „Funkenbüschel“ von „Fadenbüscheln“ unterscheiden.

Bleibt i_P konstant, so haben alle Funkenbüschel gleiche Größe, vgl. Bild 12.

Ist unter dem Gleitpole nur nach einer Richtung hin ein Belegsektor rückseits vorhanden, so daß die einzelnen Funkenbüschel sich nicht rings um das erste nebeneinander lagern können, sondern hintereinander, so erhält man mit wachsendem P größte Gleitlängen, die sich wie 1 : 2 : 3 usw. verhalten. Das P_m f_m - Diagramm zeigt entsprechende Ruckstufen f_1 f_2 f_3 usw. wie Bild 10, Übergangsgebiete sind schraffiert.

Die einzelnen Funkenbüschel zerfallen ihrerseits wieder sekundär in Fadenbüschel, wenn $dP : dt \leqq v_i$.

Isolatormaterial, Gas.

XIX. Änderungen des Materials des Isolators wirken nur, insofern hierdurch die Kapazität die Plattenoberflächeneinheit, d. h. von c geändert wird; Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante wirkt wie eine Vergrößerung der Plattendicke. Zunehmende Leitfähigkeit des Isolators wirkt zunächst im wesentlichen nur wie eine Zunahme der Kapazität der Oberflächeneinheit, also wie Abnahme der Plattendicke[2]).

Für die Technik ist von Wichtigkeit, daß die Größe der Gleitergüsse (Gleitfunkenkorona) von der Oberflächenbeschaffenheit des Isolators nur wenig beeinflußt wird, ob glatt oder rauh (ob trocken oder feucht), ob rein oder verstaubt[3]).

Änderungen der Natur des Gases lassen alles qualitativ ungeändert. Über das Maß des quantitativen Einflusses ist sehr wenig bekannt[4]). In sehr feuchter Luft

[1]) Der Mechanismus der Auflösung einer kontinuierlichen Elektrizitätsströmung in einem „Funkenstrom“ durch Einschalten von Kapazität und Funkenstrecke in den Stromkreis (z. B. bei Influenzmaschinen) ist bekannt: Aufladen der Kapazität bis zum Erreichen eines bestimmten Spannungsniveaus, Entladung der Kapazität bis zu einem kleinen Restniveau, Selbstabschnürung des weiteren Abfließens infolge Erkaltens od. dgl. des Funkens bei Abnahme der Strömung in ihm, Neuauffüllung bis zum alten Durchbruchsniveau usf. Er findet eine weitgehende Analogie in den intermittierenden Quellen; hier ist die Selbstabschnürung durch Unterbrechung einer Heberwirkung veranlaßt.

Bei Bildung einer „Funkenbüschelreihe“ haben wir das gleiche Spiel, aber mit dem Unterschiede, daß die Ergußmassen jeweils nicht neutralisiert (wie bei Funkenstrom) oder beseitigt (wie bei Quelle) werden, sondern als Hemmnis vorgelagert bleiben. Jeder erneute Erguß erfordert ein etwas erhöhtes Ergußniveau, da der Rückstau der unbeseitigten Menge durchbrochen werden muß.

Für die Bildung einer „Fadenbüschelreihe“ (vgl. Abschnitt XIV) gilt das gleiche, nur ist hier der Träger des Spiels nicht eine bestimmte, willkürlich wählbare metallische Kapazität, sondern der Abfluß selbst reguliert die von ihm aus dem Rande des schon vorhandenen Ergusses zu seiner Bildung beanspruchte Elektrizitätsmenge.

[2]) Vgl. die Messungen an Gleitfunken auf Flüssigkeitsoberflächen M. Toepler, Phys. Zeitschr. 8, S. 743, 1907 und Verh. d. deutschen Phys. Ges. 1907, S. 428.

[3]) Vgl. M Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 198, 1906.

[4]) Über Polbüschelgrößen in verschiedenen Gasen (Luft, N_2, O_2, H_2, CO_2 und Cl_2) vgl. K. Przibram, Phys. Zeitschr. 21, S. 480, 1920 aus den Beobachtungen desselben, Phys. Zeitschr. 19, S. 299, 1918, läßt sich folgern, daß in Stickstoff bis zu viel kleineren dP : dt glatte, ungeruckte Ergüsse entstehen als in Luft.



erhält man etwas kleinere Figuren als in trockener, vgl. Abschnitt XXVIII[1]). Die Größe und Gestalt (Kreis oder Stern) der Polbüschel hängt, wie aus dem Überblicke hervorgeht, von der Ionisierungsspannung, vom Werte v_i, von der Leitfähigkeit und deren zeitlichem Abklingen längs der Leuchtfäden ab, für Gleitprozesse kommen die Konstanten des Ladungskanales hinzu. Einfache quantitative Beziehungen von Gas zu Gas sind also kaum zu erwarten; es dürfte sich empfehlen, ähnlich den bekannten kritischen Daten der Wärmelehre, für die verschiedenen Gase „elektrisch korrespondierende Zustände" (z. B. die Durchbruchsspannung P_o) als Bezugswerte aufzusuchen.

Dem Gasdrucke ist der Polbüschelradius recht angenähert umgekehrt proportional[2]); für Gleitfiguren fehlen Messungen noch völlig[3]).

B. Messungen.

XX Versuchsanordnungen (vgl. Bild 11).

Anordnung I M; F; $C_1 C_2$; W; P G B.

M 60 plattige Influenzmaschine.

F Hauptfunkenstrecke zwischen Messingkugeln von 6 cm Durchmesser (Anfangsspannung, minus P_F).

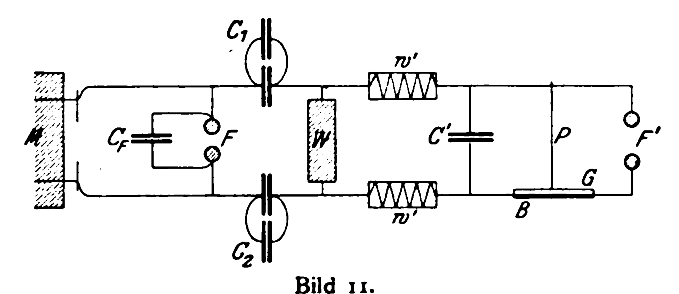


Bild 11.

$C_1 C_2$ je zwei Schachtelbatterien von zusammen 80000 cm, wirksame Kapazität C_{12} in Anordnung also 40000 cm.

W Widerstand (selbstinduktionslos) ca $12 \cdot 10^6$ Ohm.

P G B Gleitsystem wie Bild 1, P Gleitpol, 0,5 ein dicker Kupferstab mit Spitze von $7{,}5^0$ Achsenwinkel, G ebene Glasplatte (ev. photographische Platte); B rückseitiger voller Metallbelag.

Anordnung II dasselbe nur Kapazität C_F von 4850 cm zugeschaltet, also M; F; C_F; $C_1 C_2$; W; P G B.

Anordnung III F' eine Hilfsfunkenstrecke zwischen 6 cm Messingkugeln zugeschaltet, also M; F; C_F; $C_1 C_2$; W; P G B, F'.

Anordnung IV ohne F', statt W Selbstinduktion S von kleinem Widerstande, also M; F; C_F; C_1 C_2; S; P G B.

Anordnung V M; F; C_F; C_1 C_2; W; W'C'W'; P G B; hierin W' zwei gleiche Flüssigkeitswiderstände C' eine Kapazität von 1600 cm.

Anordnung VI W' durch zwei gleiche Selbstinduktionen S' ersetzt, also M; F; C_F; $C_1 C_2$; W; S'C'S'; P G B.

Anordnung VII hochgespannter technischer Wechselstrom (100 Wechsel : sec) eines Transformators speist P G B.

Mit Ausbruch des Funkens F (Anfangsspannung minus P_F) beginnt die Elek-

[1]) Analog erschwert bekanntlich Feuchtigkeit die Büschelbildung im Raume; in feuchten Gasen ist die Ionenbeweglichkeit kleiner als in trockenen.

[2]) Vergl. W. v. Bezold. Pogg. Ann. 144. S. 337 u. 526. 1871, S. Mikola l. c., P. O. Pedersen l. c.

[3]) Bei einigen orientierenden Messungen mit Gleitfunken auf engen Glasrohren in weiten evakuierten Rohren erhielt ich nur Längen etwa umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Luftdrucke.

trizitätsbewegung; sie läßt sich bei allen Anordnungen leicht übersehen[1]), solange der Gleiterguß um P herum nicht merklich beeinflußt, d. h. wenn C_1, C_2 und C' groß sind und f klein bleibt.

Anordnung I und II geben raschen, V langsameren Anstieg der Spannung zu konstantbleibendem Endwerte, wie im Überblicke vorausgesetzt ist.
Anordnung III an- und sofortigen Abstieg.
Anordnung IV gedämpfte Schwingung um $P = 0$.
Anordnung VI gedämpfte Schwingung um $P = P_F$.
Anordnung VII ungedämpfte Schwingung um $P = 0$.

Große Gleitfiguren zeigen große Schwankungen in der Längsentwicklung auch bei sonst gleichen Bedingungen (auch wenn jedesmal die sehr störenden Oberflächenladungen von G sorgfältigst beseitigt sind); es bleibt ja dem Zufalle überlassen, wie viele miteinander konkurrierende Ergüsse von P aus sich bilden (vgl. Abschnitt IX). Breitere Ergüsse fallen im Durchschnitte auch länger aus. Erfahrungsgemäß ist nun bei genügender Stromzufuhr die radiale Länge gleich, ob sich unter dem Pole ein voller Metallbeleg befindet, oder ob nur ein Sektor von 45^0 belegt ist. Auf einem solchen Belagssektor ist aber der Elektrizitätsbedarf des Ergusses viel kleiner, und man erhält normale radiale Längen auch dann noch, wenn bei Vollbelegung die Kapazität der Batterien nicht ausgereicht hätte. Zur Messung großer Gleitlängen wurde stets dieser Kunstgriff benutzt.

XXI. Anordnung I; durch Gleitprozeß regulierter Spannungs-Anstieg. Beim Erreichen der F entsprechenden Anfangsspannung erhält man eine vermittels W verzögerte Entladung der Batterie $C_1 C_2$, bestehend aus Initialfunken und Aureole. In ersterem kommt in Funkenform nur diejenige Elektrizität zum Ausgleiche, die fast widerstands- und selbstinduktionslos zur Funkenbildung in F zur Verfügung steht, d. h. auf der „Elektrodenkapazität" von F sitzt. Durch die Aureole fließt nachher die ganze übrige Elektrizität von $C_1 C_2$ nach Maßgabe von W ab. Wie tief in F die Spannung sinkt und wie rasch dies erfolgt, in welcher Weise also die Spannung beiderseits W (also auch am Gleitsysteme) ansteigt, hängt wesentlich von der Stärke des Initialfunkens in F, also der Elektrodenkapazität von F ab, wie die Spannung beiderseits W dann abklingt von der Größe W.

Zur „Elektrodenkapazität" gehören nicht nur die direkt mit F verbundenen Leiterteile — in meinen Versuchen auf 150 cm Kapazität zu schätzen[2]); die Bildung eines Ergusses um P wirkt wie eine allmählich eintretende wesentliche Vermehrung der Elektrodenkapazität. Die Vorgänge bei F und P sind also eng gekoppelt. Speziell die Art und Geschwindigkeit des Spannungsanstieges am Gleitpole P wird um so mehr vom Ergusse um P beeinflußt, je größer letzterer ist.

Für Polbüschel kam dies bei meinen Messungen noch nicht in Betracht, für diese verhalten sich Anordnung I und II gleich; alles im Überblicke für Polbüschelbildung Gesagte gilt auch quantitativ für beide.

Der gesamte Gleitprozeß zerfällt bei negativen Figuren mit großer Regelmäßigkeit in fast gleiche Ruckstufen, fächerförmige Büschel, Perlen, manchmal noch regelmäßiger als bei Anordnung II im Optimum der Ruckstufenbildung; längs hinreichend großer Gleitbüschelphotogramme ließen sich im günstigsten Fall 34 hintereinander gereihte fast gleiche Stufen unterscheiden. Dies deutet darauf hin, daß hier der Gleitprozeß mit einer konstanten mittleren Geschwindigkeit vorwächst[3]). Der Anstieg der Polspannung bis zu ihrem für längere Zeit nahe konstantem Grenzwerte reguliert sich dementsprechend.

[1]) Angenommen ist zu vollem Überblicke die Kenntnis des Verhaltens des Funkens F (bzw. F'); vgl. hierzu M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 220, 1906.

[2]) Alle meine bisherigen Arbeiten über Gleiten sind mit Anordnung I oder einer sehr ähnlichen ausgeführt.

[3]) Nach M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 214, 1906 ist sie $\geqq 10^7$ cm : sec, also etwa gleich v_i, wie nach Abschnitt IV und XIV zu erwarten.

XXII. Anordnung II, raschester Spannungsanstieg.

Zuschaltung der Kapazität C_F von 4850 cm erhöhte die Elektrodenkapazität F auf etwa 5000 cm. Um das übrige System vor Eigenschwingungen von C_F möglichst zu schützen, waren die Zuleitungen zu C_F beiderseits unmittelbar hinter den Polkugeln von F abgezweigt. Jetzt tritt bei F entsprechend C_F ein starker Initialfunken auf; der Widerstand in F sinkt auf kleinste Beträge, ebenso die Spannung. Ob und wieviel Elektrizität noch durch das Gleitphänomen um P frei wird, ist nur noch von verschwindend kleinem Einflusse. Die Spannung an W und an P steigt jetzt unabhängig vom Gleitphänomen an (C_1 C_2 hinreichend groß vorausgesetzt).

Der Spannungsverlauf bei F während des starken Initialfunkens in F ist unabhängig von der Elektrodenkapazität, er ist außer für sein erstes Ansetzen angebbar[1]). Für ein System, Kapazität C_F ohne Selbstinduktion, ohne Ohmschen Widerstand aber mit Funken F in dem Gleichung (7) gilt, hat man für Strom i Anfangsladung E_0 und abgeflossene Ladung E

$$i = + \frac{dE}{dt} = \frac{E_0 - E}{C_F} \cdot \frac{E}{k \cdot F}$$

und Analoges mittels $C_F \cdot P = E_0 - E$ für die Spannung. Zählt man die Zeit von der Funkenmitte, d. h. dem Augenblicke, wo $E_0 : 2$ entladen ist, so gilt

$$P = P_F \frac{e^{-\frac{P_F}{k \cdot F} \cdot t}}{1 + e^{-\frac{P_F}{k \cdot F} \cdot t}}; \qquad t = \frac{k \cdot F}{P_F} \cdot \ln \frac{P}{P_F - P}$$

für P und P_F in kV, F in cm, t in sec ist k gleich $0{,}8 \cdot 10^{-6}$. Hieraus

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{kF}(P_F - P) \text{ und } \left(\frac{dP}{dt}\right)_{max} = \frac{P_F^2}{4kF} \text{ zur Zeit } t = 0.$$

Das zweite bis einschließlich neunte Zehntel der Ladung der Elektrodenkapazität fließt während der Zeit

$$t_{0,1}^{0,9} = k \frac{F}{P_F} \cdot \ln 81$$

ab; der Mittelwert $(dP:dt)_{0,1}^{0,9}$ während dieser Zeit ist $0{,}728\ (dP:dt)_{max}$.

In Tabelle I ist zu verschiedenen Funkenlängen F (zwischen Kugeln von je 6 cm Durchmesser) die zugehörige Anfangsspannung (minus P_F angesetzt), der Maximal- und der Mittelwert von $dP:dt$ und die Bildungsdauer T_F des Funkens, berechnet als $\frac{10}{8} \cdot t_{0,1}^{0,9}$ angegeben.

Tabelle I.

F in cm	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
$-P_F$ in kV	9,1	17,1	25,2	32,6	39,7	46,4	52,8
$(dP:dt)_{max} : 10^6$ in kV:sec	103,5	182 8	264,6	332,1	394,0	442,5	497,8
$(dP:dt)_{0,1}^{0,9} : 10^6$ in kV:sec	75,4	133.1	192.7	241.9	287,0	326,7	362,6
$T_F \cdot 10^6$ sec	0,119	0.127	0.129	0,133	0,137	0,141	0,144

Das Potentialverhalten am Gleitpole kommt also für jedes F dem eingangs im Überblicke zugrunde gelegten nahe.

Die Schilderungen im Überblicke (für großes $dP:dt$) geben einfach Ergebnisse der Versuche mit Anordnung II wieder; unter $dP:dt$ daselbst ist das mittlere $dP:dt$ hier gemeint, unter P_m der maximale Endwert von P, d. h.

[1]) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, S. 220 und 221, 1906. Daselbst z. T. Unklarheiten wegen Vertauschungen von E und $E_0 - E$.



($-P_F$). Insbesondere ließ sich hier das Verhalten bei großen und mittleren $dP:dt$ feststellen; Übergänge von Pol- zu Gleitbüschel wie Bild 4a und 4b, Gleitergüsse glatt wie 5 und 6a, halbgeruckt wie 6b. Sehr große Figuren auch mit sehr großem mittlerem $dP:dt$ zeigen oft recht scharf abgetrenntes Polbüschel, federförmige Mittelstücke und fächerförmig geruckte Enden, da $dP:dt$ anfangs und am Ende kleiner als mitten während des Ergusses sind. Eine Grenze für die Länge ungeruckter, federförmiger Ergußstücke scheint es nicht zu geben; wenn es nicht zu Verzweigungen wie Bild 5 kam, wurden Federn von über 30 cm Länge beobachtet.

Die Angaben der Tabelle II bis VII umfassen auch große Gleitlängen, hier war dann nur ein Sektor von etwa 45° rückseits belegt, vgl. Abschnitt XX. Neben $P_m = +P_F$ ist in den Tabellen auch der korrigierte Endwert von P, nämlich $P_F \cdot C_{12} : (C_{12} + \frac{2}{3} c \cdot \psi)$ angegeben. Dort, wo infolge mangelnder Ergiebigkeit der Kapazität C_{12} der Zerfall des Ergusses in Funkenbüschel hinreichend scharf eintrat, wurden in der Tabelle mehrere Werte f_m, entsprechend f_1 bzw. f_2 usw. des Bildes 10 angegeben. Die Tabellenwerte sind hier wie bei allen weiteren Mitteln aus je wenigstens fünf Messungen gewonnen; n. s. bedeutet nicht sichtbar.

Wählt man $f_m = \gamma \cdot P^5 \cdot c^2$ als Interpolationsformel, so erhält man für γ aus den Endwerten von P die in den Tabellen angegebenen Werte; γ ist für jede Platte außerhalb des Einflußbereiches der Polbüschel nahe konstant (die eingeklammerten Werte für vorzeitigen Stillstand infolge Funkenbüschelbildung kommen natürlich nicht in Betracht). Verschiedene Platten haben aber ein etwas verschiedenes γ; es besteht wohl noch ein durch die Formel nicht voll gepackter individueller Platteneinfluß; Platten mit besserer Leitfähigkeit besitzen ein etwas größeres γ als solche mit schlechterer.

XXIII. Anordnung V, langsamerer Spannungsanstieg. Während des Ausbruchs des Funkens F, also innerhalb etwa $0{,}13 \cdot 10^{-6}$ sec nach Tabelle I springt die Spannung P_w beiderseits W auf $Pw_0 = P_F$ und sinkt dann nach dem Gesetze $P_w = P_F \cdot e^{-\frac{t}{W C_1}}$ langsam ab. Gleichzeitig steigt die Spannung P am Gleitpole

$$P = P_F \cdot e^{-\frac{t}{W \cdot C_{12}}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2 w' C'}}\right) \cdot \frac{C_{12}}{C_{12} + C' + \frac{2}{3} c \psi}$$

die Zuführungsstromstärke ist $i = (P_w - P) : w'$. Ferner ist nahezu (da W sehr groß $12{,}5 \cdot 10^6$ Ohm), solange ψ klein,

$$dP : dt = \frac{P_F}{2 w' C'} \cdot e^{-\frac{t}{2 w' C'}}$$

der Anstieg beginnt mit

$$(dP : dt)_{max} = P_F : 2 w' C', \quad i_{max} = P_F : w'.$$

Anordnung V gibt also ähnlich wie II einen Anstieg der Polspannung mit angenähert angebbarem $dP:dt$ zu konstant bleibendem Endwerte $P_m = P_F \cdot C_{12} : \left(C_{12} + C' + \frac{2}{3} c \cdot \psi\right)$; sie eignete sich zur Untersuchung des Einflusses von $dP:dt$ im Intervalle $100 \cdot 10^6$ kV : sec bis 10^6 kV : sec.

Ausführliche Messungen wurden mit C' gleich 1600 cm und w' je gleich 200, dann je 443, je 1500 und je 4420 Ohm ausgeführt (Kupfersulfatwiderstände 3 cm² Querschnitt); mit doppeltem C' zahlreiche Stichproben. Die allgemeinen Ergebnisse sind die im Überblicke für $dP:dt < 100 \cdot 10^6$ kV : cm zusammengestellten. Es genüge hier in Tabelle VIII, IX und X den Beobachtungssatz mit C' gleich 1600 cm und w' je 443 Ohm, welcher beste Ruckstufenbildung bei negativen Ergüssen ergab, ungekürzt wiederzugeben. γ' ist nach Formel $f = \gamma' \cdot P_w'^5 \cdot c^2$ berechnet, für kleines P_w' macht sich die Nähe des Polbüschel, für große die Funkenbüschel-

Tabellen IIa bis VIIa; Anordnung II; negatives Gleiten.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_n cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^{\kappa}$
Tabelle IIa. Glimmer a = 0,024 cm; c = 23,1 cm; 21,9° C; 75,9 cm Hg; LF 39%.						
0,20	0,6	5	1,9	7,5	7,50	15,0
0,25	n. s.	25	4,2	9,1	9,02	13,2
0,30	n. s.	40	6,1	10,7	10,54	8,8
0,35	n. s.	60	7,6	12,3	12,02	(5,7)
0,35	n. s.	100	12,2	12,3	11,83	9,9
0,40	n. s.	60	8,1	13,9	13,58	(3,3)
0,40	n. s.	145	16,5	13,9	13,12	(8,0)
0,40	n. s.	210	21,7	13,9	12,78	11,9
0,45	n. s.	80	9,3	15,5	15,02	(2,3)
0,45	n. s.	160	17,3	15,5	14,55	(4,8)
0,45	n. s.	210	22,5	15,5	14,25	6,9
Tabelle IIIa. Glas a = 0,169 cm; c = 3,69 cm; 20,8° C; 74,5 cm Hg; LF 47%.						
0,40	1,3	6	1,9	13,9	13,90	26,9
0,50	1,4	40	4,0	17,1	17,06	20,3
0,60	n. s.	120	9,4	20,3	20,15	20,8
0,80	n. s.	500	20,6	26,6	25,78	(13,3)
0,80	n. s.	510	33	26,6	25,77	21,3
1,00	n. s.	1200	30,4	32,6	30,20	(8,9)
1,00	n. s.	1400	63,5	32,6	29,80	19,8
Tabelle IVa. Glas a = 0,196 cm; c = 3,21 cm; 20,7° C; 74,6 cm Hg.						
0,50	1,2	10	2,0	17,1	17,10	13,3
0,625	n. s.	67	4,8	21,2	21,09	11,2
0,75	n. s.	310	9,9	25,2	24,60	11,9
Tabelle Va. Glas a = 0,228 cm, c = 2,44 cm; 19,6° C; 74,1 cm Hg; LF 40%.						
0,50	1,4	12	1,9	17,1	17,10	21,8
0,60	n. s.	25	2,9	20,3	20,30	14,1
0,80	n. s.	266	9,2	26,6	26,13	14,2
1,00	(3,1)	660	24,8	32,6	31,92	12,4
1,20	n. s.	2350	47,0	38,3	35,26	14,7
1,40	n. s.	2600	82	43,8	39,61	14,1
1,50	n. s.	2700	87	46,4	41,80	11,4
1,60	n. s.	3450	115	49,1	43,05	13,0
Tabelle VIa. Glas a = 0,396 cm; c = 1,59 cm; 19,5° C; 73,9 cm Hg; LF 43%.						
0,80	2,4	100	5,7	26,6	26,54	17,1
1,00	n. s.	720	14,5	32,6	31,90	17,6
1,20	n. s.	1060	32,5	38,3	37,25	17,8
Tabelle VIIa. Glas a = 1,15 cm; c = 0,55 cm; 20,0° C; 74,0 cm Hg; LF 47%.						
1,40	3,5	160	7,4	43,8	41,8	15,5
1,60	n. s.	450	13,8	49,1	48,9	10,6

Tabellen IIb bis VIIb. Anordnung II, positives Gleiten.

Tabelle IIb. Glimmer a = 0,024 cm; c = 23,1 cm; 21,9° C; 75,9 cm Hg; LF 39%.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^8$	$f_p : f_n$
0,20	n. s.	5	2,2	7,5	7,50	17,4	1,16
0,25	n. s.	25	4,6	9,1	9,02	14,4	1,10
0,30	n. s.	40	5,8	10,7	10,54	8,4	0,95
0,35	n. s.	55	8,1	12,3	12,03	(6,0)	1,07
0,35	n. s.	120	16,7	12,3	11,73	14,1	1,37
0,40	n. s.	160	8,6	13,9	13,58	(3,5)	1,06
0,40	n. s.	135	17,6	13,9	13,17	(8,3)	1,07
0,40	n. s.	200	21,2	13,9	12,83	11,4	0,98

Tabelle IIIb. Glas a = 0,169 cm; c = 3,69 cm; 20,8° C; 74,5 cm Hg; LF 47%.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^8$	$f_p : f_n$
0,40	2,2	25	3,8	13,9	13,88	43,0	2,00
0,50	n. s.	50	4,5	17,1	17,04	23,1	1,13
0,60	n. s.	150	9,8	20,3	20,11	21,9	1,04
0,80	n. s.	600	23,5	26,6	25,62	(15,6)	1,14
0,80	n. s.	550	34	26,6	25,72	22,2	1,03
1,00	n. s.	1200	31,5	32,6	30,20	(6,9)	1,04
1,00	n. s.	1500	67	32,6	29,54	21,8	1,09

Tabelle IVb. Glas a = 0,196 cm; c = 3,21 cm; 20,7° C; 74,6 cm Hg.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^8$	$f_p : f_n$
0,50	2,3	18	2,7	17,1	17,08	18,0	1,35
0,625	n. s.	137	6,6	21,2	20,97	15,8	1,38
0,75	n. s.	440	12,8	25,2	24,17	15,1	1,29

Tabelle Vb. Glas a = 0,228 cm; c = 2,44 cm; 19,6° C; 73,9 cm Hg; LF 41%.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^8$	$f_p : f_n$
0,50	2,6	12	2,8	17,1	17,10	32,1	1,48
0,60	n. s.	60	6,3	20,3	20,25	30,9	2,17
0,80	4,2	435	11,8	26,6	25,87	17,0	1,28
1,00	n. s.	885	29,3	32,6	31,62	15,4	1,18
1,20	n. s.	2600	52,3	38,3	35,04	16,6	1,11
1,40	n. s.	2600	96	43,8	39,61	16,6	1,17
1,50	n. s.	3000	94	46,4	41,36	13,0	1,08
1,60	n. s.	3400	112	49,1	43,13	12,6	0,98

Tabelle VIb. Glas a = 0,396 cm; c = 1,59 cm; 19,5° C; 73,9 cm Hg; LF 43%.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^8$	$f_p : f_n$
0,80	4,5	150	7,5	26,6	26,42	23,4	1,32
1,00	5,6	815	19,3	32,6	31,92	23,5	1,34
1,20	n. s.	780	39,7	38,3	37,53	20,9	1,22

Tabelle VIIb. Glas a = 1,15 cm; c = 0,55 cm; 20,0° C; 74,0 cm Hg; LF 47%.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	Anf. P kV	End P kV	$\gamma \cdot 10^8$	$f_p : f_n$
1,40	8,1	115	9,6	43,8	43,8	21,8	1,30
1,60	8,5	710	19,2	49,1	48,7	23,7	1,39

Tabellen VIIIa bis Xa, Anordnung V mit w′ je 443 Ohm, negatives Gleiten.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_n cm	P_w kV	$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{max}$: 10⁶ kV : sec	End P kV	$\gamma' \cdot 10^6$	$\gamma' : \gamma$
Tabelle VIIIa. a = 0,169 cm; c = 3,69 cm; 21,2° C; 74,9 cm Hg; LF 47%.								
0,60	0,9	30	3,4	20,4	12,89	19,53	8,90	0,43
0,80	n. s.	200	8,8	26,6	16,81	25,28	6,27	0,47
1,00	n. s.	300	14,5	32,6	20,60	30,80	3,83	0,43
1,20	n. s.	480	30,6	38,3	24,21	34,99	4,28	—
Tabelle IXa. a = 0,228 cm; c = 2,44 cm; 19,6° C; 75,5 cm Hg; LF 49%.								
0,60	0,9	—	—	20,4	12,89	—	—	-
0,80	n. s.	50	4,3	26,6	16,81	25,53	6,61	0,47
1,00	n. s.	200	12,3	32,6	20,60	31,10	7,08	0,57
1,20	n. s.	600	19,9	38,3	24,21	35,98	5,53	0,38
1,40	n. s.	800	36	43,8	27,68	41,07	5,19	—
1,40	n. s.	850	43	43,8	27,68	40,76	6,40	0,45
Tabelle Xa. a = 0,396 cm; c = 1,59 cm; 19,4° C; 75,0 cm Hg; LF 49%.								
0,80	1,15	—	—	26,6	16,81	—	—	—
1,00	n. s.	100	6,7	32,6	20,60	31,27	8,88	0,50
1,20	n. s.	300	14,4	38,3	24,21	36,55	8,70	0,49
1,40	n. s.	550	27,9	43,8	27,68	41,53	8,90	—
							Mittel	0,464

Tabellen VIIIb bis Xb. Anordnung V mit w′ = 443 Ohm; positives Gleiten.

F cm	R* cm	ψ cm²	f_p cm	P_w kV	$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{max}$: 10⁶ kV : sec	P_w kV	$\gamma' \cdot 10^6$	$\gamma' : \gamma$	$f_p : f_n$
Tabelle VIIIb. a = 0,169 cm; c = 3,69 cm, 21,2° C.; 74,9 cm Hg; LF 47%.									
0,60	1,8	80	5,6	20,4	12,9	19,47	14,58	0,53	1,61
0,80	n. s.	200	10,7	26,6	16,8	25,28	7,59	0,34	1,21
1,00	n. s.	510	17,8	32,6	20,6	30,43	4,99	0,73	1,23
1,20	n. s.	900	42,5	38,3	24,2	34,96	5,96	—	1,39
Tabelle IXb. a = 0,228 cm, c = 2,44 cm; 19,6° C; 75,5 cm Hg; LF 44%.									
0,60	1,7	30	3,3	20,4	12,9	19,54	19,55	0,63	—
0,80	n. s.	180	8,3	26,6	16,8	25,40	13,10	0,77	1,94
1,00	n. s.	300	14,3	32,6	20,6	30,98	8,35	0,54	1,62
1,20	n. s.	650	28,5	38,3	24,2	35,91	7,99	0,48	1,43
1,40	n. s.	1200	53,0	43,8	27,7	40,22	8,43	0,51	1,24
Tabelle Xb. a = 0,396 cm; c = 1,59 cm; 19,7° C; 75,0 cm Hg; LF 48%.									
0,80	2,6	80	5,4	28,6	16,8	25,52	19,46	0,83	—
1,00	3,8	200	10,8	32,6	20,6	31,19	14,38	0,61	1,60
1,20	n. s.	500	21,1	38,3	24,2	36,36	13,10	0,63	1,47
							Mittel	0,601	

bildung störend bemerkbar. Ferner ist $\gamma':\gamma$ von Tab. II bis VII angegeben; die Verlangsamung des $dP:dt$ von $200 \cdot 10^6$ bis $100 \cdot 10^6$ kV:sec auf nur $28 \cdot 10^6$ bis $12 \cdot 10^6$ kV:sec verkleinert also die Gleitergüsse auf 0,46 für negative, auf 0,60 für positive.

Mit $C' = 1600$ cm und w' 4420 Ohm, also für $dP:dt$ etwa $2{,}8 \cdot 10^6$ bis $1{,}2 \cdot 10^6$ kV:sec ist die Figurengröße nochmals auf 0,6 der Angaben in Tabelle VIII bis X geschrumpft.

XXIV. Funkenbüschel. Da die Kapazität C', 1600 cm, relativ zu $\frac{2}{3} c \cdot \psi$ klein war, kam es hier zu ganz auffallend scharfer Ausbildung von Funkenbüscheln. Bild 12 gibt eine auf $\frac{1}{4}$ linear verkleinerte Pause (Umriß und Ladungskanäle) eines

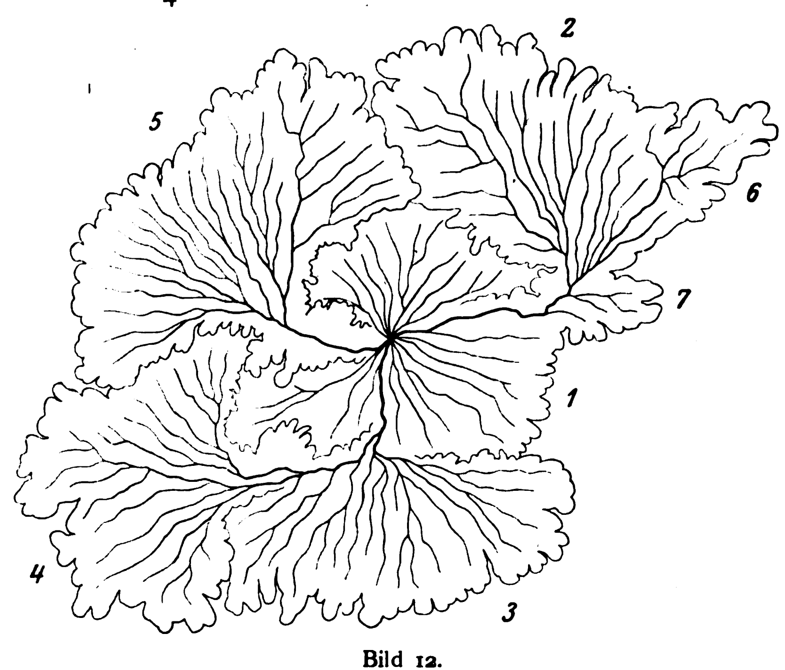


Bild 12.

aus Funkenbüscheln aufgebauten negativen Ergusses bei rückseitiger Vollbelegung[1]); dem zentralen Teilergusse 1 folgten offensichtlich (aus Art des Übergreifens an den Berührungsrändern) zunächst 2, dann 3 und 4, schließlich 5, während 6 und 7 in der Entwickelung stecken geblieben sind.

War nur ein Sektor von 40° rückseits belegt, so reihten sich die einzelnen Funkenbüschel nicht wie bei Bild 12 um das erste zentrale herum, sondern radial auf dem Sektor hintereinander; so ergab Anordnung V mit w' je gleich 443 Ohm für F = 1,40 cm auf a = 0,228 cm, d. h. c = 2,44 cm bei elf nacheinander hergestellten Bärlappspuren folgende Lagen ausgesprochener Abschnitte in dem Gesamtergusse:

Tabelle XI.

Negative Gleitfigur	Positive Gleitfigur
16,3 + 16,3 + 13,8 cm	24 + 29 cm
16,5 + 17,0 + 14,7 cm	21 + 17 + 18,5 cm
15,0 + 13,0 + 11,5 cm	22,5 + 25 cm
18,8 + 19 cm	24 + 24 cm
11,0 + 11,5 + 10 + 9 cm	23,5 + 21,5 cm.
11,2 + 16 + 16,5 cm.	

[1]) Die Versuchsdaten zu Bild 12 sind: a = 0,228 cm, c = 2,44 cm, F = 1,00 cm, $C_z = 5000$ cm, $C_{12} = 40000$ cm, W = 10^7 Ohm, w' = 4420 Ohm, C' = 800 cm, 19° Cels., 75,6 cm Hg, 47 % Luftfeuchte.

Öfters beobachtet man den sekundären Zerfall einzelner Funkenbüschel in Reihen von Fadenbüscheln.

Nach Abschnitt XVIII ist die Bildung von Funkenbüscheln ein allgemeines Phänomen des Auftretens intermittierender Erschöpfungspausen bei ungenügender Elektrizitätszufuhr zum Gleitpole. In Tabelle XII sind alle Werte f_1, f_2 und f_3 für positive Funkenbüschel, die von mir sicher beobachtet wurden, zusammengestellt. C_P bedeutet die mit dem Gleitpole direkt verbundene Kapazität[1]); bei Anordnung I, II und IV ist dies C_{12}, bei Anordnung V und VI ist es C'. Die bei Ausbildung von f_1, f_2 und f_3 jeweils geladenen Flächen waren: ψ_1 nahe gleich $\frac{3}{2} f_1^2$, ψ_2 etwas größer als $2 \cdot f_1^2$ und ψ_3 etwas kleiner als $3 \cdot f_1^2$.

Beim Erreichen von f_1 sei die Polspannung P_1; dann ist höchstens E_1 gleich $\frac{2}{3} c \cdot \varphi_1 \cdot P_1$, also nahe $c \cdot f_1^2 \cdot P_1$ auf die Platte geströmt, und es ist $E_0 = C_P \cdot P_1 + E_1$ seitens der Elektrizitätsquelle frei geworden. Ist f_1 nahe gleich der für voller P_m möglichen größten Gleitlänge f_m (nach Gleichung 14), so ist P_1 nahe gleich P_m; bilden sich für P_m soeben zwei Funkenbüschel, so daß $f_1 = \frac{1}{2} f_m$ ist, so wird $P_m = P_1 \cdot \sqrt[5]{2}$ sein (wegen Gleichung 14); ist $f_1 = \frac{1}{3} f_m$, so P_m gleich $P_1 \cdot \sqrt[5]{3}$. Tabelle XII gibt so berechnete Werte $E_1 : E_0$.

Tabelle XII; positive Funkenbüschel.

Anordnung	F cm	P_F kV	$\frac{dP}{dt} : 10^6$ kV : sec	$C_P \cdot 10^3$ cm	c cm	f_1 cm	f_2 cm	f_3 cm	$E_1 : E_0$	v_1 cm : sec
II	0,40	13,9	110	40	23,1	6,0	11,7	17,5	0,0399	$59,2 \cdot 10^6$
II	0,40	13,9	110	40	23,1	8,5	17,6	22,4	0,0400	$83,8 \cdot 10^6$
II	0,40	13,9	110	160	23,1	16,5	—	—	0,0378	$130,6 \cdot 10^6$
II	0,80	26,6	203	40	3,69	25	—	—	0,0546	$190,8 \cdot 10^6$
II	1,00	32,6	242	40	3,69	31,5	67	—	0,0839	$268,7 \cdot 10^6$
II	1,00	32,6	242	40	2,44	35	—	—	0,0696	$259,8 \cdot 10^6$
II	1,50	46,4	327	40	2,44	44	92	—	0,1058	$356,3 \cdot 10^6$
IV; $S = 0{,}286 \cdot 10^6$ cm	0,40	23,9	110	160	23,1	13,3	22,5	—	0,0327	$139,1 \cdot 10^6$
IV; $S = 0{,}926 \cdot 10^6$ cm	0,40	23,9	110	160	23,1	17,4	—	—	0,0419	$137,7 \cdot 10^6$
V; $w' = 4420$ Ohm	1,30	36,9	2	1,6	3,69	8,7	18	—	0,163	$0,57 \cdot 10^6$
V; $w' = 4420$ Ohm	1,30	36,9	2	1,6	2,44	9,7	22,5	—	0,126	$0,60 \cdot 10^6$
V; $w' = 443$ Ohm	1,00	29,3	20	1,6	3,69	18	—	—	0,425	$12,29 \cdot 10^6$
V; $w' = 443$ Ohm	1,40	39,4	28	1,6	2,44	23	46,5	—	0,447	$18,78 \cdot 10^6$

Man sieht, daß bei Anordnung II und IV der Spannungsanstieg zum ersten Male ins Stocken geriet, als der Elektrizitätsbedarf der Platte erst 4% bis 6% des von der Quelle lieferbaren erreicht hatte; also nicht mangelnde Ladung, sondern mangelnder Strom begrenzt das Vorwachsen.

Die Wachstumsgeschwindigkeit während der Bildung von f_1 ist angenähert als

$$v_1 = f_1 : P_1 \Big\backslash \frac{dP}{dt}$$

zu rechnen. Aus den Tabellenwerten für v_1 erkennt man: Die Wachstumsgeschwindigkeit v_1 während des ersten Teiles des Gesamtergusses (ersten Funkenbüschels) ist proportional und numerisch fast gleich $dP : dt$.

[1]) Analogon zur „Elektrodenkapazität" bei Funkenbildung im Raume.

XXV. Anordnung III, vorzeitig abgebrochene Ladung[1]). Durch Einschalten von $F' < F$ in Anordnung II wird die am Gleitpole ansteigende Spannung noch während des Anstieges wieder auf Null herabgesetzt. Die Zeit $T_{F'}$ des Abstieges wäre analog wie T_F in Tabelle I abzuschätzen. In der Regel schiebt sich aber zwischen T_F und $T_{F'}$ noch die bekannte „Verzögerung" des Funkenausbruches F', so daß

$$T_{FF'} = \frac{T_F P_{F'} + T_{F'} P_F}{P_F}$$

nur einen Mindestwert für die Gesamtdauer gibt.

Je kleiner $T_{FF'}$ ist, um so kürzer und kreisförmiger fällt bei gleichen F' die Gleitfigur aus. Die Anordnung eignet sich nur zu qualitativem Vergleiche von

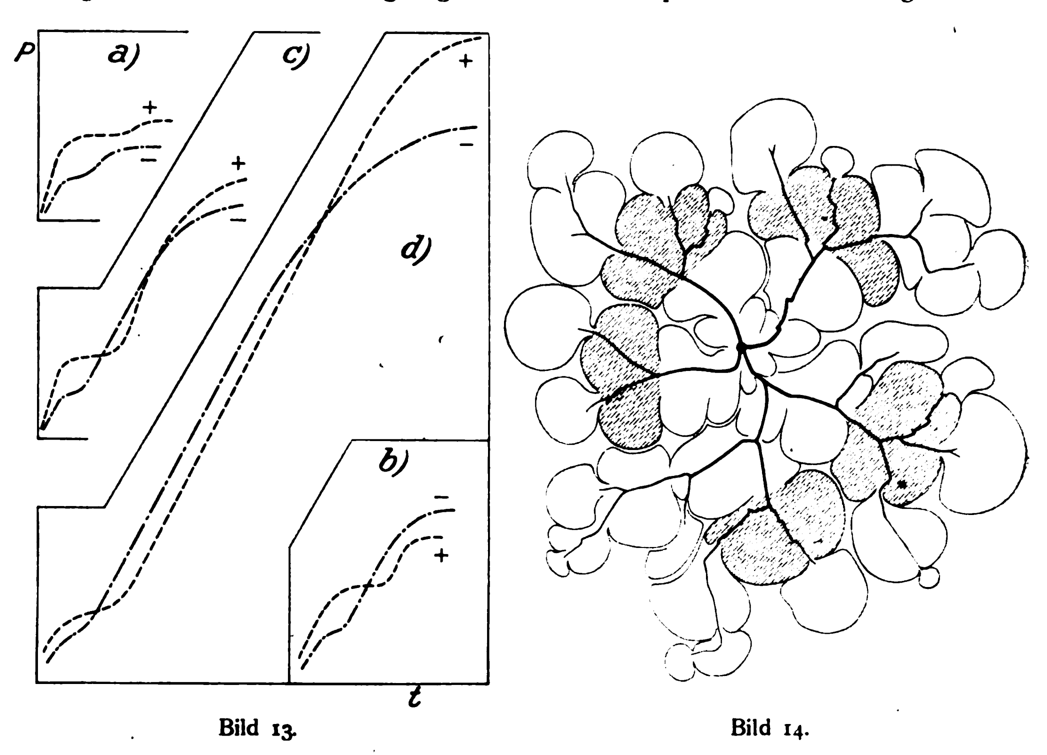


Bild 13. Bild 14.

Wachstumsgeschwindigkeiten. Bild 13 gibt vier Diagramme für wachsendes Verhältnis $P_m : P_0$, und zwar für mittleres $dP:dt$, wo noch Polbüschel von Gleitfigur sich abhebt. Die Bilder 3a und 3b zeigen die Gestalt von Gleitfiguren an einer Zeitstelle nahe rechts von dem unteren Kreuzungspunkte der negativen und positiven Kurven in Bild 13d, nur war bei ihnen $dP:dt$ noch größer, der Übergang von Pol = zu Gleitfigur also bis zur Unsichtbarkeit ausgeglichen.

Bemerkenswert ist die Gleichheit der mittleren Wachstumsgeschwindigkeit langer negativer und positiver Gleitfiguren.

XXVI. Anordnung VI, gedämpfte Wechselspannung um $P = P_F$. Ist C_{12} sehr groß, so wird

$$P = P_F \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t\right),$$

worin $T = 2\pi \sqrt{2 S' C'}$ also für $t = 0$ $dP:dt = 0$ und

$$(dP:dt)_{max} = P_F \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

[1]) Ausführlicheres zu Anordnung III vgl. M. Toepler, Phys. Zeitschr. 21, S. 706, 1920.

Wegen C_{12} gleich 40000 cm und C′ gleich 1600 cm und wegen der Dämpfung wurden als Maximalwerte nicht $2 \cdot P_F$ sondern 7% bis 8% weniger erreicht, wie durch Parallelschalten von F′ sich ergab. In Tabelle XIII ist dies berücksichtigt.

Der Erguß der ersten Schwingung war größer als alle übrigen und ließ sich meist aus den Photogrammen gut herauslesen; hier bei Anordnung VI als einziger von allen benutzten fehlt das Polbüschel gänzlich, vgl. Bild 14; die Spannung steigt anfangs langsamer an, als zur Ausbildung eines Polbüschels merklicher Größe nötig ist, die nahe Umgebung des Poles hat Zeit, sich lichtlos zu laden, und durch diese spurlose Ladung erfolgt dann der Durchbruch.

Je nach dP : dt zeigt die negative Figur mehr oder minder scharfe Ruckstufen. Ist $(dP:dt)_{max}$ sehr hoch, so ist nur der polseitige Anfang und das periphere Ende der Gleitergüsse scharf geruckt, der mittlere Teil nicht; solche Spuren wurden mit S′ gleich je $0{,}038 \cdot 10^6$ cm und mit S′ je gleich $0{,}092 \cdot 10^6$ cm ($T = 3{,}57 \cdot 10^{-6}$ sec) erhalten. Erst als durch S′ je $1{,}39 \cdot 10^6$ cm T auf $13{,}0 \cdot 10^{-6}$ sec und $(dP:dt)_{max}$ auf etwa $10 \cdot 10^6$ kV : sec kam, war die photographische Spur durchgehendes scharf geruckt. Bild 14 gibt (in $\frac{1}{3}$ linear) die Pause von Umriß und Ladungskanälen eines Photogrammes (Tabelle XIII 4. Zeile von unten unter $T = 13{,}0 \cdot 10^6$ sec, a = 1,672 cm usw.). Die Fadenbüschel zu Anfang (am Pole) und am Ende (Figurenrande) jedes Ergusses sind kleiner als in der Mitte (l_{max} in Tabelle XIII) entsprechend der Zu- und Abnahme von dP : dt während des Ergusses. In Bild 14 sind die größten Zwischenbüschel auf jedem Zweige schraffiert, um hervortreten zu lassen, wie groß die Gleitfigur im Augenblicke mit größtem dP : dt am Gleitpole war.

In Tabelle XIII sind zum Vergleiche neben l_{max} nach Gleichung (11) berechnete Zwischenbüschellängen (die etwa dem Optimum der Ruckstufenbildung mit Anordnung II entsprechen) angegeben; l_{max} kommt, wie zu erwarten, den Werten l nahe.

Wie die Tabelle zeigt, findet beste Ruckstufenbildung bei dP : dt gleich rund $10 \cdot 10^6$ kV : sec statt; der Wert $20 \cdot 10^6$ kV : sec ist schon merklich zu groß[1]).

Tabelle XIII; Anordnung VI; negative Figuren.

$T \cdot 10^6$ sec	a cm	F cm	P_{max} kV	$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{max} : 10^6$ kV : sec	f cm	l_{max} cm	l cm	Bemerkungen	v_m cm : sec
13,0	0,176	0,50	32,5	7,86	8,6	1,5	1,48	gut geruckt	$1{,}32 \cdot 10^6$
13,0	0,175	0,625	40,3	9,74	16,3	1,3	1,50	scharf geruckt	$2{,}50 \cdot 10^6$
13,0	0,565	0,625	40,3	9,74	4,8	2,2	2,68	gut geruckt	$0{,}74 \cdot 10^6$
13,0	0,541	0,75	47,9	11,58	12,8	2,6	2,61	scharf geruckt	$1{,}97 \cdot 10^6$
13,0	1,672	1,25	75,4	18,23	13,5	3,8	4,60	wenig überhastet	$2{,}08 \cdot 10^6$
13,0	1,676	1,25	75,4	18,23	10,3	2,9	4,61	wenig überhastet	$1{,}58 \cdot 10^6$
3,57	0,553	0,75	47,9	188,8	9,9	2,6	2,65	stark überhastet	$5{,}56 \cdot 10^6$

Da nach den Photogrammen die gesamte Gleitlänge f_m schon während des ersten Spannungsanstieges T : 2 erzielt wurde, so ist die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit v_m gleich 2 f : T, vgl. letzte Tabellenreihe. Ist während des Ergusses v proportional dP : dt, so wird für das Maximum von dP : dt die Geschwindigkeit $\pi \cdot v_m$ erreicht. Die Wachstumsgeschwindigkeit mit bester Ruckstufenbildung beträgt hiernach rund $6 \cdot 10^6$ cm : sec.

[1]) Bemerkt sei, daß diese Schätzungen von dP : dt unabhängig von den vielleicht doch nicht ganz einwandfreien Konstanten der Funkenbildung in F sind.



XXVII. Anordnung IV, gedämpfte Schwingung um $P = 0$. Nach Ausbruch von F steigt die Spannung am Gleitpole wie bei Anordnung II innerhalb T_F auf P_F, weiterhin ist dann

$$P = P_F \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t, \text{ worin } T = 2\pi \sqrt{C_{12} \cdot S}$$

mit schwacher Dämpfung.

Die Superposition der bei den verschiedenen Wechseln entstehenden Ladungsergüsse stört in den Staubfiguren und Photogrammen. Da sowohl positive Polbüschel als Endbüschel doppelt so groß sind wie negative, hatte der Figurenrand stets positiven Charakter.

Der in Tabelle XIV wiedergegebene Beobachtungssatz zeigt dieselben Gleitlängen wie Tabelle Va und Vb, eine begünstigende Wirkung durch Hysterese ist, wenn vorhanden, durch die Dämpfung ausgeglichen.

Tabelle XIV; $a = 0{,}288$ cm; $c = 2{,}44$ cm; 22^0 C; 76 cm Hg.

Selbstinduktion in cm ihr Widerstand in Ohm T/4 in sec		$0{,}226 \cdot 10^6$ 0,11 $4{,}96 \cdot 10^{-6}$		$0{,}181 \cdot 10^6$ 0,17 $4{,}46 \cdot 10^{-6}$		$0{,}0926 \cdot 10^6$ 0,086 $3{,}19 \cdot 10^{-6}$		$0{,}0286 \cdot 10^6$ 0,11 $1{,}77 \cdot 10^{-6}$		$0{,}0217 \cdot 10^6$ 0,031 $1{,}54 \cdot 10^{-6}$	
F cm	P_F kV	f_n cm	f_p cm	f_n cm	f_p cm	f_n cm	f_p cm	f_n cm	f_p cm	f_n cm	f_p cm
0,50	17,1	4,4	4,1	3,3	3,1	3,5	3,6	3,8	4,3	4,0	4,2
0,75	25,2	10,1	10,5	13,4	14,0	11,4	9,6	11,2	11,2	11,0	10,8
1,00	32,6	26,3	29,5	27,0	28,8	27,0	27,6	25,6	25,1	23,1	23,6
1,25	39,7	50,5	47,5	53,3	52,2	53,8	52,4	43,2	43,2	37,5	38,5

Bei kleinsten Schwingungsdauern scheint die Zeit zur Ausbildung größter Gleitlängen während T:4 nicht mehr auszureichen; störende Funkenbüschelbildung ließ sichere Schlüsse nicht zu.

XXVIII. Anordnung VII, ungedämpfte Wechselspannung. Dämpfung und Kürze der Schwingungsdauer unterscheiden auch den letztbehandelten Fall noch stark von den in der Technik meistvorkommenden. Einige Stichproben mit sinusförmigem Wechselstrom (100 Wechsel in der Sekunde) eines Hochspannungstransformators[1]) gibt Tabelle XV; Spannungsangaben nicht effektiv, sondern Scheitelwerte, also absolute Maximalwerte in kV.

Der Charakter des Figurenrandes war stets der positiver Figuren, wie im vorigen Abschnitte. Tabelle XV gibt nicht Radien R in cm von Polbüscheln für Polspannungen P in kV, sondern P:R. Man sieht, daß P:R auch hier fast konstant ist (man bedenke, daß a und P im Verhältnisse 1:10 variieren). Die Absolutwerte von R übersteigen aber die für das vorhandene dP:dt nach Gleichung (3) und (10) zu extrapolierenden bedeutend.

Entsprechend der Kleinheit von dP:dt, um 20000 kV:sec, wäre für einmaligen Spannungsstoß P:R etwa gleich 0,6 zu erwarten; statt dessen ist rund 8 beobachtet, also starke Nachwirkung der Erwärmung und Leitfähigkeit bei ungedämpfter Schwingung.

Da $(dP:dt)_{max}$ klein, so war Polbüschel von Gleitbüschel scharf getrennt, die Durchbruchspannung P_0 leicht festzustellen. Die Werte P_0 sind fast die gleichen wie bei großem dP:dt und einmaligem Spannungsstoße.

[1]) Einer der Transformatoren der Porzellanfabrik Hermsdorf S. A. für 250000 Volt, 35 kVA, geliefert von den Siemens-Schuckert-Werken; der Fabrikleitung sei auch hier für die Unterstützung der Messungen gedankt.

Tabelle XV.

Plattenmaterial	Glas	Glas	Glas	Glas	Glas	Porzellan	
Dicke a in cm	0,170	0,197	0,197	0,488	0,488	1,76	1,76
% Luftfeuchte	74	58	83	58	74	58	83
ϑ^0 C	18	20	16	20	18	20	16
b cm Hg	73,0	73,1	73,0	73,1	73,0	73,1	73,0
Polspannung	Werte von P : R in Kilovolt : cm.						
4,5	6,43	—	5,63	-	5,63	- -	—
9,1	9,1	8,23	9,1	7,5	8,7	8,2	8,7
13,6	9,1	7,3	9,1	—	8,5		—
18,1	7,9	6,4	8,1	7,0	7,9	10,2	9,1
22,6		7,2	6,7	7,1	7,9	8,0	10,3
27,1				6,7	8,1	7,8	8,7
31,6				6,8		7,1	6,9
36,1						7,9	7,6
45,2						6,9	7,8
54,2						6,2	7,8
58,7						5,7	—
Durchspannung P_0	17,4	22,6	21,7	32,2	26,8	59,4	49,8
$P_0 : \sqrt{a}$	42,2	50,4	48,9	46,0	38,3	44,7	37,5

Vermehrte Luftfeuchte vergrößerte P : R, behinderte also etwas die Polbüschelbildung, d. h. die Leuchtfäden und setzte P_0 etwas herab.

Gleitbüschellängen sind nicht angegeben, da wegen ungenügender Stromergiebigkeit Funkenbüschelbildung in starkem Maße eintrat (vgl. Abschnitt XVIII), die Angaben also nur speziellste Bedeutung für den benutzten Transformator hätten. Aus der Größe der Funkenfächer könnte auf die Ergiebigkeit der Stromquelle zurückgeschlossen werden[1]).

Schlußbemerkungen.

XXIX. Von den im Überblicke Abschnitt I bis XIX für den speziellen Fall, konstantes P_m wird mit nahe konstantem dP : dt erreicht, angegebenen Beziehungen bleibt für alle benutzten Arten des Spannungsverlaufes am Gleitpole (einschließlich technischer Wechselspannung) als Wesentlichstes erhalten:

1. „Durchbruchspannung" P_0 scheidet zwei ganz verschiedene Ergußformen; $P_{max} < P_0$, wofür Polbüschel ausschließlich aus Leuchtfäden („Gleitkorona") entsteht, von $P_{max} > P_0$ mit Gleitergüssen aus Leuchtfäden und funkenförmigen Ladungskanälen („Gleitfunkenkorona"). Hierbei ist P_0 für negative und positive Ergüsse fast gleich und nahe $45 \cdot \sqrt{a}$ auf Glas (oder Porzellan) bei allen Versuchsanordnungen.

2. Die Breite der Gleitkorona (Radius des Polbüschels) wächst proportional der Spannung und ist für negative Ergüsse halb so groß wie für positive.

Die Länge der Gleitfunkenkorona wächst proportional P^4 bis P^5.

Beide sind um so kleiner, je langsamer die Spannung schwankt, d. h. je kleiner durchschnittlich dP : dt ist.

[1]) Natürlich handelt es sich hier weniger um die während einer Halbschwingung insgesamt gelieferte Menge, als um die während der Gleitbüschelbildung, also während etwa 10^{-7} sec verfügbare, also auf der „Elektrodenkapazität" sitzende Menge.

3. Für Gleiten scheidet ein bestimmter Wert, der „Eigenzeitgradient" $(dP:dt)_i$ etwa gleich $30 \cdot 10^6$ kV:sec mit zugehöriger „Eigengeschwindigkeit" v_i etwa gleich $15 \cdot 10^6$ cm:sec des Wachsens zwei Arten des Ergusses: $(dP:dt) > (dP:dt)_i$ mit $v > v_i$ glatte Ergüsse mit federförmigen Ergußteilen von $(dP:dt) < (dP:dt)_i$ mit $v < v_i$, wofür der Ladungserguß in Aneinanderreihungen von gleichgroßen fächerförmigen Ergußteilen aus Leuchtfadenbüscheln besteht, geruckte Ergüsse.

4. Bei ungenügender Stromzufuhr tritt Stocken des Ergusses in größeren Intervallen, Zerfall desselben in Ruckstufen höherer Ordnung, in aneinandergereihte „Funkenfächer" ein.

XXX. Der voranstehend allein und umfassend behandelte Fall, Spitze auf rückseits voll belegter Isolatorplatte, ist eine in der Technik nur selten vorkommende Kombination von Stromleitungen und Zwischenisolator. Messungen geringerer Stichproben zeigten, daß bei Benutzung eines Metallstreifens oder ähnlichen Metallbelages als oberseitiger Elektrode statt der Spitze auf der Isolatorplatte mit voller Rückbelegung die Längen der Gleitfiguren nur sehr wenig geändert sind; es tritt wesentlich nur eine Behinderung des Ergußbeginnes ein, was zu Schwellwerten der Spannung analog den bekannten Anfangsspannungen im Raume führt. Recht umfassende Messungen für Punktpol auf Isolatorplatte mit rückseitigem schmalen Metallstreifen statt voller Belegung liegen vor[1]), freilich nur mit Anordnung I, also ohne Rücksicht auf dP:dt wie alle meine früheren Messungen. Hier ist Pol- und Gleitfigur nur in Richtung des unterseitigen Belagstreifens nahezu voll entwickelt, senkrecht dazu, also seitlich des Streifens stark verkümmert.

Der in vorliegender Arbeit besprochenen Gleitanordnung Bild 1 schließen sich ferner unmittelbar die an, bei denen zwei gleiche mit entgegengesetzter Spannung ($+P_m$ und $-P_m$) gespeiste Pole beide auf der Oberfläche einer Isolatorplatte mit geerdetem rückseitigen Metallbelage aufstehen. Es gelten dann einfach die Formeln des Überblicks, nur ist statt a die doppelte Dicke der Isolatorplatte einzusetzen[2]). Natürlich bildet sich hier um jeden der beiden Pole der zugehörige negative bzw. positive Erguß.

Für den technisch viel wichtigeren Fall eines Poles (Spitze oder Ring) an einem Isolatorrohre mit leitender Seele habe ich Messungen geringeren Umfanges ausgeführt und z. T. veröffentlicht[3]).

Auf sehr weite Rohre (großer Umfang U bei relativ kleiner Wandstärke a) sind die Entladungsgesetze für ebene Platten ohne weiteres zu übertragen. Je enger die Rohre, um so mehr macht sich die Beschränkung der zur Ladung verfügbaren Oberfläche geltend; neben c bzw. a wird die Größe $U \cdot c$ bzw. $U:a$ von Bedeutung ($n \cdot c$ Kapazität der Rohrlängeneinheit). Für Gleitbüschellängen f (Gleitfunkenkorona) gilt, sobald $U < f$, nicht mehr Gleichung (14), sondern f wird proportional $P^3 \cdot U \cdot c$; für Polbüschel (Gleitkorona) gilt das für Platten Gesagte, speziell auch Gleichung (5) und Gleichung (6) bis zu Werten $U \cdot c$ gleich 10 cm^2 hinab. Vielleicht wird es zweckmäßig sein, Spannungen in Vielfachen von P_0, Rohrumfänge u. dgl. in Vielfachen von l_0 auszudrücken, um einfachste Beziehungen bei beschränkter Ladungsfläche zu finden.

Auch für Rohre gelten also qualitativ die im vorigen Abschnitte nochmals zusammengestellten Beziehungen. Es ist anzunehmen, daß diese sich allgemein, natürlich mit sachgemäßen Abänderungen, auf die Mehrzahl der technisch benutzten Isolatorenformen übertragen lassen. Da im Überblicke die inneren physikalischen Zusammenhänge der einzelnen Konstanten eingehend angegeben sind, so dürften

[1]) Vgl. besonders M. T. Wied. Ann. 66, S. 1061, 1898, Ann. d. Phys. 21, S. 193, 1906 und 23, S. 867, 1907.
[2]) Vgl. M. T. Physikal. Zeitschr. 8, S. 919, 1907.
[3]) Vgl. M. Toepler, Abh. Isis, Dresden 1907, S. 18.

zur quantitativen Festlegung der geänderten Verhältnisse jeweils einige Stichmessungen genügen.

Von besonderer Bedeutung wird wohl meist die Trennung zwischen Gleitkorona und Gleitfunkenkorona sein, speziell also die Kenntnis der beide trennenden Durchbruchspannung P_0 (nicht zu verwechseln mit Durchschlagspannung, bei der der Isolator durchschlagen wird). Will man z. B. Gleitfunkenbildung technisch verwenden (zu Zündungen, Momentanbeleuchtung), so wird Kleinhalten von P_0 z. B. durch Anwendung besonders dünner Glimmerplatten od. dgl. wichtig. In der Isolatorentechnik andererseits wird man sich mit der harmlosen Gleitkorona abfinden und nur die gefährlichere weithinreichende Gleitfunkenkorona vermeiden (Kurzschlüsse). Isolatoren möchten also in erster Linie so gebaut sein, daß ihre Durchspannung P_0 höher liegt als die größte Betiebspannung. Läßt sich aber das Auftreten von Gleitfunkenkorona nicht hintanhalten, so ist zu berücksichtigen, daß dann zu scheiden ist zwischen stromstarker Elektrizitätszufuhr mit langen Gleitergüssen und stromschwächerer, bei der infolge ausgesprochener Funkenbüschelbildung die Gleitlängen nicht mehr proportional P^4 bzw. P^3 zunehmen. Die Überschlagspannung bei stromschwachem Transformator kann also höher ausfallen als bei stromstarkem, eine Prüfung mit ersterem sichert also nicht für letzteren.

Wurde vorangehend die Gleitfigur in ihrer Abhängigkeit von der Polspannung besprochen, so kann man nach Kenntnis dieser natürlich auch umgekehrt aus gegebener Gleitspur, aus ihrer Größe, Zahl der Einkerbungen, Zahl der Gleitdurchbrüche, Ruckstufenbildung u. a. m. auf Höhe und vor allem auch auf das zeitliche Verhalten der Polspannung schließen. Vielleicht läßt sich z. B. so der Verlauf plötzlicher Überspannungen in Stromnetzen feststellen.

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, die ungeheuere Wachstumsgeschwindigkeit der leicht erkennbaren und fixierbaren Ladungsergüsse zur Messung kleinster Zeitintervalle (bis 10^{-9} sec, wie Pedersen zeigte) zu benutzen.

Dresden, Physikal. Inst. d. Techn. Hochschule, den 30. 12. 1920.

Ausgleichsvorgänge beim Parallelschalten von Synchronmaschinen.

Von

J. Biermanns.

1. Allgemeines. Die durch den plötzlichen Kurzschlußstrom großer Wechselstromerzeuger hervorgerufenen, oft verheerenden Wirkungen haben wohl die meisten der in der Praxis stehenden Ingenieure schon erfahren müssen. Man hat sich seit der letzten Zeit leidlich gegen die auftretenden Erscheinungen zu schützen gewußt, nicht zuletzt, seitdem die Theorie derselben auf eine gesicherte Grundlage gestellt worden ist.

Nicht so glücklich sind wir bisher bei der Form des plötzlichen Kurzschlusses gewesen, die die denkbar schwersten Beanspruchungen der Maschine selbst und der betroffenen Leitungsteile im Gefolge hat, und die durch das falsche Parallelschalten von Synchronmaschinen realisiert wird. Wenn dieses letztere sich auch durch gute Betriebsführung im allgemeinen vermeiden läßt, so lehrt doch die Erfahrung, daß es selbst in gut geleiteten Zentralen immer wieder vorkommt, und die dann auftretenden schweren Maschinenschäden und Betriebsstörungen erheischen gebieterisch eine Lösung auch dieses Problems. Wir können uns jedoch gegen eine



Gefahr am besten schützen, wenn wir sie erst genau kennen, und ich habe es deshalb im folgenden unternommen, die beim falschen Parallelschalten von Synchronmaschinen auftretenden Ausgleichsvorgänge einer genaueren Untersuchung zu unterziehen. Auf diesen Punkt allein soll die Arbeit sich jedoch nicht beschränken, anschließend an die Theorie sollen vielmehr verschiedene Schutz- bzw. Vorbeugungsmaßnahmen einer kritischen Betrachtung unterworfen werden.

Wenn ich mich dabei im mathematischen Teil der Arbeit möglichst kurz fasse, so hoffe ich, da der Rechnungsvorgang dem bei der Untersuchung des plötzlichen Kurzschlusses mehrfach benützten entspricht, dennoch verständlich zu bleiben.

2. Die Differentialgleichungen des Problems und ihre Lösung. Um die entgegenstehenden mathematischen Schwierigkeiten überhaupt überwinden zu können, sind wir zunächst gezwungen, das Problem in einigen wichtigen Punkten zu vereinfachen, wobei wir natürlich streng darauf achten müssen, daß das Verhalten der idealisierten Maschine dem der wirklichen Maschine nicht gerade in wesentlichen Punkten widerspricht.

Wir denken uns eine Maschine von einfachster Bauart, die nach Art eines Turbogenerators mit konstantem Luftraum und verteilter Erregerwicklung ausgeführt ist. Stator und Induktor seien lamelliert, so daß Wirbelstromerscheinungen von nennenswerter Bedeutung ausgeschlossen sind. Der Induktor besitze ferner eine Dämpferwicklung mit gleichem Kupfergewicht, also gleicher Zeitkonstante wie die Erregerwicklung, deren Achse senkrecht auf derjenigen der Erregerwicklung steht. Außerdem sei die Maschine während des ganzen Ausgleichsvorganges ungesättigt, d. h. ihre magnetische Charakteristik sei eine Gerade und ihre Selbst- und Gegeninduktivitätskoeffizienten konstante Größen. Die Vernachlässigung sämtlicher Eisenverluste will daneben wenig bedeuten.

Von den begangenen Vereinfachungen ist am folgenschwersten die Vernachlässigung der Eisensättigung, denn sie ist geeignet, uns ein etwas abweichendes Bild von der vor allem interessierenden Höhe der zu erwartenden Überströme zu geben. Dagegen beeinflussen alle übrigen vereinfachenden Annahmen, so die Vernachlässigung der Wirbelstromverluste und die Annahme einer Dämpferwicklung auf dem Induktor, welch letztere gerade die wesentlichste Eigenschaft der Wirbelströmung im massiven Induktoreisen, nämlich ein Querfeld in der Polachse auszubilden, zur Geltung bringen soll, lediglich den zeitlichen Verlauf der Überströme in unbedeutendem Maße.

Die betrachtete Maschine denken wir uns entgegen dem Uhrzeigersinne mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω (in Polteilungsgraden) angetrieben und mit einem Strome i_e erregt; die Klemmen des zweiphasig bewickelten Stators mögen an die Klemmen eines unendlich ergiebigen Zweiphasen-Netzes angeschlossen sein, das seine Phasenspannungen

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= E \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \\ \text{und} \qquad e_2 &= E \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{1 a}$$

unbekümmert um den von der Maschine entnommenen Strom unveränderlich aufrecht erhält. Es bezeichnen ferner

$$L_1 = L_{11} \cdot (1 + \tau_1) \tag{1 b}$$

den Selbstinduktionskoeffizienten je einer der unter sich gleichen Statorphasen, r_1 den entsprechenden Ohmschen Widerstand,

$$L_2 = L_{22} \cdot (1 + \tau_2) \tag{1 c}$$

den Selbstinduktionskoeffizienten der Erregerwicklung und der dieser völlig gleichen Dämpferwicklung, r_2 den entsprechenden Ohmschen Widerstand,

$$L_{24} = L_{13} = M \cdot \cos \omega \cdot t \tag{1 d}$$

den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen Statorphase 2 und Erregerwicklung bzw. Statorphase 1 und Dämpferwicklung,



$$L_{23} = L_{14} = -M \cdot \sin \omega \cdot t \tag{1 e}$$

den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zwischen Statorphase 2 und Dämpferwicklung bzw. Statorphase 1 und Erregerwicklung,

$$\tau = 1 - \frac{1}{(1 + \tau_1) \cdot (1 + \tau_2)} = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \tag{1 f}$$

endlich den totalen Streufaktor der Maschine, wo τ_1 und τ_2 die Streufaktoren der Statorwicklungen bzw. Induktorwicklungen allein sind. Nach den obigen Festlegungen gibt α die Phasenverschiebung des Vektors der Netz-EMK gegenüber dem Vektor der Maschinen-EMK an, α ist also ein Maß für die Güte des Parallelschaltens der Maschine, und zwar muß bei richtigem Parallelschalten $\alpha = 0$ sein. $\alpha = \pi$ bedeutet Schalten in Phasenopposition. Wie bereits gesagt, betrachten wir zunächst ω und damit α als konstante Größen, d. h. das Polrad verharre während des betrachteten Ausgleichsvorganges starr in seiner einmal zum Netzvektor eingenommenen relativen Lage.

Mit den gegebenen Bezeichnungen lauten nun die Differentialgleichungen unseres Problems, wenn noch i_1, i_2, i_3 und i_4 die Momentanwerte der Ströme in beiden Stator- bzw. Induktorphasen bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 \cdot \frac{d\,i_1}{dt} + \frac{d\,(L_{31} \cdot i_3)}{dt} + \frac{d\,(L_{41} \cdot i_4)}{dt} + r_1 \cdot i_1 &= -e_1, \\
L_1 \cdot \frac{d\,i_2}{dt} + \frac{d\,(L_{32} \cdot i_3)}{dt} + \frac{d\,(L_{42} \cdot i_4)}{dt} + r_1 \cdot i_2 &= -e_2, \\
L_2 \cdot \frac{d\,i_3}{dt} + \frac{d\,(L_{13} \cdot i_1)}{dt} + \frac{d\,(L_{23} \cdot i_2)}{dt} + r_2 \cdot i_3 &= 0, \\
L_2 \cdot \frac{d\,i_4}{dt} + \frac{d\,(L_{14} \cdot i_1)}{dt} + \frac{d\,(L_{24} \cdot i_2)}{dt} + r_2 \cdot i_4 &= r_2 \cdot i_e.
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Um dieses System von 4 nicht linearen, simultanen Differentialgleichungen auf eine integrierbare Form zu bringen, sind eine ganze Reihe von Umformungen erforderlich. Dabei werden wir uns zunächst auf die Ermittlung der freien Ausgleichsströme beschränken, d. h. wir setzen zunächst die rechte Seite der letzten der Gleichungen (I) gleich Null.

Führen wir in das angeschriebene System von Differentialgleichungen die durch die Gleichungen (I) gegebenen Beziehungen ein und differenzieren wir die Klammern aus, so folgt

$$L_1 \cdot \frac{d\,i_1}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_3}{dt} - M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_4}{dt} - i_3 \cdot \omega \cdot M \sin \omega \cdot t - i_4 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t + i_1 \cdot r_1 = - E \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha), \tag{2 a}$$

$$L_1 \cdot \frac{d\,i_2}{dt} + M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_3}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_4}{dt} + i_3 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t - i_4 \cdot \omega \cdot M \cdot \sin \omega \cdot t + i_2 \cdot r_1 = - E \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha), \tag{2 b}$$

$$L_2 \cdot \frac{d\,i_3}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_1}{dt} + M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_2}{dt} - i_1 \cdot \omega \cdot M \cdot \sin \omega \cdot t + i_2 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t + i_3 \cdot r_2 = 0, \tag{2 c}$$

$$L_2 \cdot \frac{d\,i_4}{dt} - M \cdot \sin \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_1}{dt} + M \cdot \cos \omega \cdot t \cdot \frac{d\,i_2}{dt} - i_1 \cdot \omega \cdot M \cdot \cos \omega \cdot t - i_2 \cdot \omega \cdot M \cdot \sin \omega \cdot t + i_4 \cdot r_2 = 0. \tag{2 d}$$

Nun müssen eine Reihe von Rechenoperationen vorgenommen werden, die bezwecken, die trigonometrischen Funktionen fortzuschaffen, das vorstehende Gleichungssystem also in ein lineares umzugestalten. Zu dem Zwecke bilden wir zunächst

$$(2\,a) \cdot \sin \omega \cdot t - (2\,b) \cdot \cos \omega \cdot t, \tag{3 a}$$

$$(2\,a) \cdot \cos \omega \cdot t + (2\,b) \cdot \sin \omega \cdot t, \tag{3 b}$$

$$(2\,c) \cdot \sin \omega \cdot t + (2\,d) \cdot \cos \omega \cdot t, \tag{3 c}$$

$$(2\,c) \cdot \cos \omega \cdot t - (2\,d) \cdot \sin \omega \cdot t. \tag{3 d}$$

Ferner bilden wir die folgenden Differenzen:

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{d(2a)}{dt}-\frac{1}{L_2}\cdot\frac{d(3d)}{dt}, \tag{4a}$$

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{d(2b)}{dt}-\frac{1}{L_2}\cdot\frac{d(3c)}{dt}, \tag{4b}$$

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{d(2c)}{dt}-\frac{1}{L_1}\cdot\frac{d(3b)}{dt}, \tag{4c}$$

$$\frac{1}{M}\cdot\frac{(2d)}{dt}+\frac{1}{L_1}\cdot\frac{d(3a)}{dt}. \tag{4d}$$

Bilden wir endlich noch die folgenden Beziehungen:

$$(4a)+\frac{\omega}{M}\cdot(2b)+\frac{r_2}{L_2\cdot M}\cdot(2a), \tag{5a}$$

$$(4b)-\frac{\omega}{M}\cdot(2a)+\frac{r_2}{L_2\cdot M}\cdot(2b), \tag{5b}$$

$$(4c)-\frac{\omega}{M}\cdot(2d)+\frac{r_1}{L_1\cdot M}\cdot(2c), \tag{5c}$$

$$(4d)+\frac{\omega}{M}\cdot(2c)+\frac{r_1}{L_1\cdot M}\cdot(2d), \tag{5d}$$

so ergibt die tatsächliche Ausführung dieses Rechenschemas:

$$\tau\cdot\frac{d^2 i_1}{dt^2}+\left(\frac{r_1}{L_1}+\frac{r_2}{L_2}\right)\cdot\frac{d i_1}{dt}+\omega\cdot\tau\cdot\frac{d i_2}{dt}+\frac{r_1\cdot r_2}{L_1\cdot L_2}\cdot i_1+\omega\cdot\frac{r_1}{L_1}\cdot i_2=-E\cdot\frac{r_2}{L_1\cdot L_2}\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha), \tag{5a}$$

$$\tau\cdot\frac{d^2 i_2}{dt^2}+\left(\frac{r_1}{L_1}+\frac{r_2}{L_2}\right)\cdot\frac{d i_2}{dt}-\omega\cdot\tau\cdot\frac{d i_1}{dt}+\frac{r_1\cdot r_2}{L_1\cdot L_2}\cdot i_2-\omega\cdot\frac{r_1}{L_1}\cdot i_1=-E\cdot\frac{r_2}{L_1\cdot L_2}\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha), \tag{5b}$$

$$\tau\cdot\frac{d^2 i_3}{dt^2}+\left(\frac{r_1}{L_1}+\frac{r_2}{L_2}\right)\cdot\frac{d i_3}{dt}-\omega\cdot\tau\cdot\frac{d i_4}{dt}+\frac{r_1\cdot r_2}{L_1\cdot L_2}\cdot i_3-\omega\cdot\frac{r_2}{L_2}\cdot i_4=0, \tag{5c}$$

$$\tau\cdot\frac{d^2 i_4}{dt^2}+\left(\frac{r_1}{L_1}+\frac{r_2}{L_2}\right)\cdot\frac{d i_4}{dt}+\omega\cdot\tau\cdot\frac{d i_3}{dt}+\frac{r_1\cdot r_2}{L_1\cdot L_2}\cdot i_4+\omega\cdot\frac{r_2}{L_2}\cdot i_3=0. \tag{5d}$$

Damit haben wir ein System von je 2 linearen simultanen Differentialgleichungen zweiten Grades gewonnen, die leicht zu der gesuchten Differentialgleichung unseres Problems führen. Durch wiederholte Differentiation und Subtraktion der Gleichungen (5a) und (5b) bzw. (5c) und (5d) folgt nämlich eine für i_1, i_2, i_3 und i_4 vollständig gleiche lineare Differentialgleichung vierten Grades von der Form:

$$\frac{d^4 x}{dt^4}+a\cdot\frac{d^3 x}{dt^3}+b\cdot\frac{d^2 x}{dt^2}+c\cdot\frac{dx}{dt}+d\cdot x=F(t), \tag{II}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
a&=2\cdot\left(\frac{r_1}{L_1\cdot\tau}+\frac{r_2}{L_2\cdot\tau}\right),\\
b&=\left(\frac{r_1}{L_1\cdot\tau}+\frac{r_2}{L_2\cdot\tau}\right)^2+2\cdot\frac{r_1\cdot r_2}{L_1\cdot L_2\cdot\tau}+\omega^2,\\
c&=2\cdot\frac{r_1\cdot r_2}{L_1\cdot L_2\cdot\tau^2}\cdot\left(\frac{r_1}{L_1}+\frac{r_2}{L_2}\right)+2\cdot\frac{r_2}{L_2\cdot\tau}\cdot\omega^2,\\
d&=\left(\frac{r_2}{L_2\cdot\tau}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{r_1}{L_1}\right)^2+\omega^2\right).
\end{aligned}\right\} \tag{IIa}$$

Die Zeitfunktion F(t) rührt von den an den Stator angelegten äußeren Spannungen her und führt zu den erzwungenen Schwingungen unserer Maschine. Da diese uns jedoch zunächst nicht interessieren, setzen wir die rechte Seite der Gleichung (II) gleich Null, die sich dann in bekannter Weise durch eine Funktion von der Form

$$x = A_1 \cdot e^{\alpha_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\alpha_2 \cdot t} + A_3 \cdot e^{\alpha_3 \cdot t} + A_4 \cdot e^{\alpha_4 \cdot t} \tag{6}$$

integrieren läßt, wobei die Exponenten α sich als die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha^4 + a \cdot \alpha^3 + b \cdot \alpha^2 + c \cdot \alpha + d = 0 \tag{6a}$$

ergeben. Die eben angeschriebene algebraische Gleichung vierten Grades liefert nun[1]) vier Wurzeln von der Form

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= -a_1 \mp j \cdot q \\ \text{und} \quad \alpha_{3,4} &= -a_2 \mp j \cdot p \\ \text{mit} \quad j &= \sqrt{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{6b}$$

Besitzt nun die charakteristische Gleichung einer linearen Differentialgleichung je 2 konjugiert komplexe Wurzeln von der eben angeschriebenen Form, so heißt dies nichts anderes, als daß der betrachtete Ausgleichsvorgang zwei Sinusschwingungen enthält. Und zwar bestimmt der imaginäre Anteil der Wurzeln deren Winkelgeschwindigkeit, während der reelle Teil das zeitliche Absterben der Schwingungen charakterisiert.

Wir erhalten somit folgende Gleichungen für die freien Ausgleichsströme:

$$\left.\begin{aligned} i_{1f} &= A_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sin(q \cdot t - \psi_1) + A_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t - \psi_2), \\ i_{2f} &= -A_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \cos(q \cdot t - \psi_1) - A_2 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \cos(p \cdot t - \psi_2), \\ i_{3f} &= A_3 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t - \psi_3) + A_4 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \sin(q \cdot t - \psi_4), \\ i_{4f} &= A_3 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \cos(p \cdot t - \psi_3) + A_4 \cdot e^{-a_2 \cdot t} \cdot \cos(q \cdot t - \psi_4), \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

in welchen die $A_1 \div A_4$ und die $\psi_1 \div \psi_4$ die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten sind, während die Dämpfungskonstanten a_1 und a_2 und die Winkelgeschwindigkeiten p und q aus den Gleichungen (6) zu berechnen sind.

Die Gleichung (6a) liefert folgende Wurzeln, wenn wir in sie die Werte aus den Gleichungen (IIa) einführen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= -\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{\frac{r_1}{L_1} \cdot \frac{r_2}{L_2}}{\tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau}\right)^2\right] \pm j \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{\tau}}\right] \\ &\text{und} \\ \alpha_{3,4} &= -\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{\frac{r_1}{L_1} \cdot \frac{r_2}{L_2}}{\tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau}\right)^2\right] \pm j \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{\tau}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Diese Ausdrücke lassen sich mit Hilfe der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \\ u &= \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \frac{\frac{r_1}{L_1} \cdot \frac{r_2}{L_2}}{\tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} + \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau}\right)^2, \\ v &= \omega \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau} \end{aligned}\right\} \tag{IVa}$$

auch kürzer schreiben:

$$\alpha_{1,2} = -w \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} - \sqrt{u \pm j \cdot v}\right],$$

$$\alpha_{3,4} = -w \mp j \cdot \left[\frac{\omega}{2} + \sqrt{u \pm j \cdot v}\right].$$

[1]) Da infolge gewisser Symmetrieeigenschaften der Koeffizienten a, b, c und d die Gleichung (6a) sich in zwei quadratische Faktoren zerlegen läßt, deren jeder für sich verschwinden muß.

Nun ist nach dem Moivreschen Lehrsatz:

$$\sqrt{u + j \cdot v} = \sqrt{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + j \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

mit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}$$

und

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}.$$

Es ist aber

$$\cos\varphi = \frac{u}{r},$$

oder

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot r}} \cdot \sqrt{r + u}.$$

Ferner ist

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot r}} \cdot \sqrt{r - u},$$

und damit wird

$$\sqrt{u \pm j \cdot v} = \sqrt{\frac{u}{2}} \cdot \left[\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1} \pm j \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} - 1}\right].$$

Wir erhalten somit die folgenden, von den imaginären Teilen befreiten Ausdrücke für die Dämpfungskonstanten und Winkelgeschwindigkeiten:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= w + \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} - 1\right)}, \\
a_2 &= w - \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} - 1\right)}, \\
p &= \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1\right)}, \\
q &= \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} + 1\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Die eben angeschriebenen Gleichungen lassen sich für alle praktisch vorkommenden Fälle noch wesentlich vereinfachen. In den Gleichungen (7) kann nämlich die Wurzel auch geschrieben werden:

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} \cdot \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau} + \frac{r_2}{L_2} \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} - \left(\frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau}\right)^2 \pm j \cdot \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{\tau}},$$

oder

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \pm j \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau}\right)^2 - \frac{r_2}{L_2} \cdot \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau} \cdot \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)}.$$

Nun ist bei allen größeren Synchronmaschinen die reziproke Zeitkonstante $\frac{r_2}{L_2}$ der Erregerwicklung eine sehr kleine Größe, so daß wir in der eben angeschriebenen Wurzel den zweiten Summenden gegenüber dem ersten ohne großen Fehler vernachlässigen können. Damit geht die Wurzel über in

$$\sqrt{\frac{\omega}{2} \pm j \cdot \frac{\frac{r_1}{L_1} - \frac{r_2}{L_2}}{2 \cdot \tau}},$$

und es folgen durch Einsetzen in die Gleichung (7) die Näherungswerte:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{r_1}{L_1 \cdot \tau}, \\ a_2 &= \frac{r_2}{L_2 \cdot \tau}, \\ p &= \omega, \\ q &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV b)}$$

Mit diesen vereinfachten Werten wollen wir im folgenden weiterrechnen.

Die Gleichungen (III) und (IV) sind die formelle Lösung unseres Problems, ihnen gehorcht jeder in der betrachteten Maschine unter den gegebenen äußeren Bedingungen sich abspielende Ausgleichsvorgang, gleichviel, durch welchen fremden Eingriff er ausgelöst worden sein mag. Unbestimmt sind lediglich noch die Integrationskonstanten, in welchen eben die Natur dieses Eingriffes zum Ausdruck kommt und die aus den gerade vorliegenden Anfangsbedingungen zu berechnen sind.

3. Der stationäre Zustand. Bevor wir in der Untersuchung der beim Parallelschalten sich abspielenden Ausgleichsvorgänge weiterschreiten, wollen wir noch den stationär gewordenen Zustand betrachten. Und zwar interessiert uns in erster Linie der nach Abklingen des Ausgleichsvorganges in der Maschine fließende stationäre Strom, wobei wir die noch vorläufig geltende Voraussetzung beachten müssen, wonach die Maschine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben wird, der Winkel α sich im Verlaufe des Ausgleichsvorganges also nicht ändert.

Da die betrachtete Maschine als symmetrische Drehstrom-Maschine ein synchron mit dem Induktor umlaufendes Ankerrückwirkungs-Drehfeld konstanter Amplitude ausbildet, können wir von vornherein annehmen, daß die Dämpferwicklung im stationär gewordenen Zustand stromlos ist, während die Erregerwicklung den vorher eingestellten Gleichstrom i_e führt. Die beiden Phasen des Stators werden ferner einen stationären Kurzschlußstrom führen, der folgendem Gesetz gehorcht:

$$\left.\begin{aligned} i_{1\,st} &= J \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi), \\ i_{2\,st} &= -J \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi), \end{aligned}\right.$$

ferner hatten wir

$$\left.\begin{aligned} i_{3\,st} &= 0, \\ i_{4\,st} &= i_e. \end{aligned}\right\} \quad \text{(V a)}$$

Führen wir nun diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen (2 a) und (2 b) ein, so ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen zur Berechnung der Konstanten J und ψ:

$$J \cdot [L_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi) + r_1 \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi)] = i_e \cdot M \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t - E \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha),$$

$$J \cdot [L_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) - r_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi)] = i_e \cdot M \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t - E \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha).$$

Setzt man hierin $t = 0$, erhebt die so entstehenden Gleichungen beiderseitig ins Quadrat und addiert bzw. subtrahiert die neu entstandenen Gleichungen voneinander, so erhält man endlich folgende Ausdrücke für die gesuchten Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} J &= J_k \cdot \sqrt{\frac{(1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + (\varkappa \cdot \sin\alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\tau \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \varkappa \cdot \cos\alpha) + \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 - \varkappa \cdot \cos\alpha - \tau \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot \varkappa \sin\alpha}, \end{aligned}\right.$$

mit

$$J_k = i_e \cdot \frac{M \cdot \omega}{\sqrt{(L_1 \cdot \omega)^2 + r^2}} = \sim i_e \cdot \frac{M}{L_1}$$

und

$$\varkappa = \frac{E}{i_e \cdot M \cdot \omega}. \quad \text{(V b)}$$

Hierin ist J_k der stationäre Kurzschlußstrom des direkt an seinen Klemmen kurzgeschlossenen Generators, $\varkappa$ ein Koeffizient, der, da $i_e \cdot M \cdot \omega$ die Leerlaufspannung des Generators ist, den Erregungszustand der betrachteten Maschine charakterisiert.

Man erkennt, daß im ungünstigsten Falle also Schalten in Phasenopposition der in den Statorwicklungen sich ausbildende stationäre Strom gerade doppelt so groß ausfällt als der stationäre Kurzschlußstrom des betrachteten Generators. Es darf natürlich nicht ausser acht gelassen werden, daß unsere Betrachtungen ein Netz mit unendlich großer Ergiebigkeit voraussetzen.

4. Die freien Ausgleichströme beim Parallelschalten. Das Schalten unserer Maschine ans Netz erfolge zur Zeit $t = 0$. Die zu dieser Zeit in unserer Maschine fließenden Ströme wollen wir durch den Index i_0 kennzeichnen. Wir haben also

$$\left.\begin{aligned} i_{10} &= 0,\\ i_{20} &= 0,\\ i_{30} &= 0,\\ i_{40} &= i_e, \end{aligned}\right\} \text{für } t < 0. \tag{8 a}$$

Ferner ist der nach dem Absterben der Ausgleichströme in der Maschine sich einstellende stationäre Endzustand durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} i_{1st} &= J \cdot \sin(-\psi) = J_1',\\ i_{2st} &= J \cdot \cos\psi \quad = J_2',\\ i_{3st} &= 0,\\ i_{4st} &= i_e. \end{aligned}\right\} \text{für } t > 0. \tag{8 b}$$

Somit haben die freien Ausgleichsströme den folgenden Anfangsbedingungen zu genügen:

$$\left.\begin{aligned} i_{1f} &= -J_1',\\ i_{2f} &= -J_2',\\ i_{3f} &= 0,\\ i_{4f} &= 0, \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0, \tag{8 c}$$

wo, wie die Gleichung (Va) ergeben

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= J_k \cdot \frac{\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \cdot (1 - \varkappa \cdot \cos\alpha) + \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2},\\ &\text{und}\\ J_2' &= -J_k \cdot \frac{1 - \varkappa \cdot \cos\alpha - \frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \cdot \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8 d}$$

Nun setzen wir die Werte aus den Gleichungen (III) in die Differentialgleichungen (2) ein und entwickeln sämtliche Glieder in ihre Sinus- und Kosinuskonpomenten. Die rechte Seite der sich ergebenden 4 Gleichungen muß, da wir nur die freien Schwingungen betrachten, Null sein; dies ist aber nur möglich, wenn jeweils die Summe aller mit $\sin \omega \cdot t$ oder mit $\cos \omega \cdot t$ multiplizierten Glieder für sich verschwindet. Das Gleichungssystem zerfällt also in die folgenden 8 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \cdot A_1 \cdot q \cos\psi_1 + (L_1 \cdot a_1 - r_1) \cdot A_1 \cdot \sin\psi_1 - M \cdot A_3 \cdot q \cdot \cos\psi_3 - M \cdot A_3 \cdot a_1 \cdot \sin\psi_3 = 0,\\ L_1 \cdot A_1 \cdot q \sin\psi_1 - (L_1 \cdot a_1 - r_1) \cdot A_1 \cdot \cos\psi_1 - M \cdot A_3 \cdot q \cdot \sin\psi_3 + M \cdot A_3 \cdot a_1 \cdot \cos\psi_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9 a}$$

$$\left.\begin{aligned} L_2 \cdot A_3 \cdot p \cdot \cos\psi_3 + (L_2 \cdot a_1 - r_2) \cdot A_3 \cdot \sin\psi_3 - M \cdot A_1 \cdot p \cdot \cos\psi_1 - M \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot \sin\psi_1 = 0,\\ L_2 \cdot A_3 \cdot p \cdot \sin\psi_3 - (L_2 \cdot a_1 - r_2) \cdot A_3 \cdot \cos\psi_3 - M \cdot A_1 \cdot p \cdot \sin\psi_1 + M \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot \cos\psi_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9 b}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1 \cdot A_2\, p \cdot \cos\psi_2 + (L_1 \cdot a_2 - r_1) \cdot A_2 \cdot \sin\psi_2 - M \cdot A_4 \cdot p \cdot \cos\psi_4 - M \cdot A_4 \cdot a_2 \cdot \sin\psi_4 = 0,\\ L_1 \cdot A_2\, p \cdot \sin\psi_2 - (L_1 \cdot a_2 - r_1) \cdot A_2 \cdot \cos\psi_2 - M \cdot A_4\, p \cdot \sin\psi_4 - M \cdot A_4 \cdot a_2 \cdot \cos\psi'_4 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9 c}$$

$$\left.\begin{aligned} L_2 \cdot A_4 \cdot q \cdot \cos\psi_4 + (L_2 \cdot a_2 - r_2) \cdot A_4 \cdot \sin\psi_4 - M \cdot A_2 \cdot q \cdot \cos\psi^2 - M \cdot A_4 \cdot a_2 \cdot \sin\psi'_2 = 0,\\ L_2 \cdot A_4 \cdot q \cdot \sin\psi_1 - (L_2 \cdot a_2 - r_2) \cdot A_4 \cdot \cos\psi_4 - M \cdot A_2 \cdot q \cdot \sin\psi_2 + M \cdot L_2 \cdot a_2 \cdot \cos\psi'_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9 d}$$

Ferner führen wir die Anfangsbedingungen (8 c) in die Differentialgleichungen (2) ein, diese ergeben dann für $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cdot \sin\psi_1 + A_2 \cdot \sin\psi_2 &= J_1', \\ A_1 \cdot \cos\psi_1 + A_2 \cdot \cos\psi_2 &= J_2', \\ A_3 \cdot \sin\psi_3 + A_4 \cdot \sin\psi_4 &= 0, \\ A_3 \cdot \cos\psi_3 + A_4 \cdot \cos\psi_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (9e)$$

Wir haben damit 12 Gleichungen zur Bestimmung des Integrationskonstanten gewonnen, da deren Zahl jedoch nur 8 beträgt, scheinen diese überbestimmt zu sein.

Dieser Zwiespalt löst sich jedoch sofort, wenn wir bedenken, daß die Gleichungen (9a) ÷ (9d) nicht unabhäng voneinander sind, sondern vielmehr durch die Beziehungen (IV) miteinander verknüpft sind. Wir dürfen von den 8 angegebenen Gleichungen also nur 4 benutzen, und zwar wählen wir die Gleichung (9b) und (9c); wir könnten wenn uns die Gleichungen (IV) noch nicht bekannt wären, die übrig bleibenden Gleichungen (9a) und (9d) umgekehrt zur Berechnung der Konstanten a_1, a_2, p und q benutzen, wie Dreyfus[1]) dies auf vektoriellen Wege getan hat.

Für die nun folgenden Rechnungen führen wir der Kürze halber neue Unbekannte

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cdot \cos\psi_1, & x_2 &= A_1 \cdot \sin\psi_1, \\ x_3 &= A_2 \cdot \cos\psi_2, & x_4 &= A_2 \cdot \sin\psi_2, \\ x_5 &= A_3 \cdot \cos\psi_3, & x_6 &= A_3 \cdot \sin\psi_3, \\ x_7 &= A_4 \cdot \cos\psi_4, & x_8 &= A_4 \cdot \sin\psi_4. \end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

ein, mit deren Hilfe die Gleichungen (9b), (9c) und (9e) in das folgende Gleichungssystem übergehen, wenn wir seiner Geringfügigkeit halber die mit q multiplizierten Glieder vernachlässigen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{L_2} \cdot p \cdot x_1 + \frac{M}{L_2} \cdot a_1 \cdot x_2 - p \cdot x_5 - \left(a_1 - \frac{r_2}{L_2}\right) \cdot x_6 &= 0, \\ -\frac{M}{L_2} \cdot a_1 \cdot x_1 + \frac{M}{L_2} \cdot p \cdot x_2 + \left(a_1 - \frac{r_2}{L_2}\right) \cdot x_5 - p \cdot x_6 &= 0, \\ p \cdot x_3 + \left(a_2 - \frac{r_1}{L_1}\right) \cdot x_4 - \frac{M}{L_1} \cdot p \cdot x_7 - \frac{M}{L_1} \cdot a_2 \cdot x_8 &= 0, \\ -\left(a_2 - \frac{r_1}{L_1}\right) \cdot x_3 + p \cdot x_4 + \frac{M}{L_1} \cdot a_2 \cdot x_7 - \frac{M}{L_1} \cdot p \cdot x_8 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= J_2', \\ x_2 + y_4 &= J_1', \\ x_5 + x_7 &= 0, \\ x_6 + x_8 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10b)$$

Man löst dieses System von 8 linearen Gleichungen am einfachsten mittels Determinanten auf, und zwar lassen sich bekanntlich die Unbekannten aus der sich ergebenden Determinante und den Unterdeterminanten wie folgt zusammensetzen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, & x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 &= J_2' - x_1, & x_4 &= J_1' - x_2, \\ x_5 &= \frac{\Delta_5}{\Delta}, & x_6 &= \frac{\Delta_6}{\Delta}, \\ x_7 &= -x_5, & x_8 &= -x_6. \end{aligned}\right\} \quad (10c)$$

Im vorliegenden Falle genügt also dieBerechnung von 4 Unterdeterminanten, und zwar ergibt die Ausrechnung folgende Werte:

[1]) Ausgleichsvorgänge beim plötzlichen Kurzschluß von Synchronmaschinen. A. f. E. Band 6.

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \tau^2 \cdot (p^2 + a_1^2)^2, \\
\Delta_1 &= J_1' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1-\tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) + J_2' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2), \\
\Delta_2 &= J_1' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) - J_2' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1-\tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2), \\
\Delta_5 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)^2 \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) + J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1-\tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2), \\
\Delta_6 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1-\tau) \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2) - J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)^2 \cdot \tau \cdot (p^2 + a_1^2).
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die Unbekannten $x_1 \div x_8$ ergeben sich hiermit zu

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= J_1' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{p_2 + a_1^2 \cdot \tau}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\
x_2 &= J_1' \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - J_2' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\
x_3 &= -J_1' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} - J_2' \cdot \frac{p^2 \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\
x_4 &= -J_1' \cdot \frac{p^2 \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\
x_5 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)^2}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)} + J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{(p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\
x_6 &= J_1' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{(p^2 + a_1^2 \cdot \tau) \cdot (1-\tau)}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2} - J_2' \cdot \frac{L_1}{M} \cdot \frac{p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)^2}{\tau \cdot (p^2 + a_1^2)}, \\
x_7 &= -x_5, \qquad x_8 = -x_6.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Unter Beachtung der Gleichung (10a) errechnen sich nun die Integrationskonstanten A und ψ endlich zu

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2} = \frac{1}{\tau} \cdot \sqrt{(J_1'^2 + J_2'^2) \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau^2}{p^2 + a_1^2}}, \\
A_2 &= \sqrt{x_3^2 + x_4^2} = \frac{1-\tau}{\tau} \cdot \sqrt{(J_1'^2 + J_2'^2) \cdot \frac{p^2}{p^2 + a_1^2}}, \\
A_3 &= A_4 = \frac{L_1}{M} \cdot \frac{1-\tau}{\tau} \cdot \sqrt{(J_1'^2 + J_2'^2) \cdot \frac{p^2 + a_1^2 \cdot \tau^2}{p^2 + a_1^2}}, \\
\operatorname{tg} \psi_1 &= \operatorname{tg} \psi_2 = \operatorname{tg} \psi_3 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{J_1' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau) - J_2' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1-\tau)}{J_1' \cdot p \cdot a_1 \cdot (1-\tau) + J_2' \cdot (p^2 + a_1^2 \cdot \tau)}, \\
\operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{x_4}{x_3} = \frac{J_1' \cdot p - J_2' \cdot a_1}{J_1' \cdot a_1 + J_2' \cdot p},
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

doch lassen sich die erhaltenen Ausdrücke noch wesentlich vereinfachen. Beachten wir nämlich die Gleichung (IVb) und setzen wir für J_1' und J_2' die Worte aus den Gleichungen (8d) ein, so erhalten wir endgültig folgende Ausdrücke für die gesuchten Integrationskonstanten:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{J_k}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + (\varkappa \cdot \sin\alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \\
A_2 &= J_k \cdot \frac{1-\tau}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + (\varkappa \cdot \sin\alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}}, \\
A_3 &= -A_4 = -i_e \cdot \frac{1-\tau}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + (\varkappa \cdot \sin\alpha)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}},
\end{aligned}\right\} \quad (VIa)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\psi_1 = \operatorname{tg}\psi_3 = \operatorname{tg}\psi_4 &= \frac{\frac{a_1}{\omega}\cdot(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)+\varkappa\cdot\sin\alpha}{1-\varkappa\cdot\cos\alpha-\frac{a_1}{\omega}\cdot\varkappa\sin\alpha}, \\ \operatorname{tg}\psi_2 &= \frac{\frac{a_1}{\omega}\cdot(1+\tau)\cdot(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)+\left(1-\tau\cdot\frac{a_1^2}{\omega^2}\right)\cdot\varkappa\cdot\sin\alpha}{\left(1-\tau\cdot\frac{a_1^2}{\omega^2}\right)\cdot(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)-\frac{a_1}{\omega}\,\varkappa\,(1+\tau)\cdot\sin\alpha}. \end{aligned}\right| \quad \text{(VI a)}$$

Die vollständigen Gleichungen für den Verlauf der in der betrachteten Maschine sich ausbildenden Ströme ergeben sich endlich durch Addition der freien Ausgleichsströme und der im stationär gewordenen Zustand fließenden Ströme zu:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= A_1\cdot e^{-a_1\cdot t}\cdot\sin(q\cdot t-\psi_1)+A_2\cdot e^{-a_2\cdot t}\cdot\sin(p\cdot t-\psi_2)+J\cdot\sin(\omega\cdot t-\psi), \\ i_2 &= -A_1\cdot e^{-a_1\cdot t}\cdot\cos(q\cdot t-\psi_1)-A_2\cdot e^{-a_2\cdot t}\cdot\cos(p\cdot t-\psi_2)-J\cdot\cos(\omega\cdot t-\psi), \\ i_3 &= A_3\cdot e^{-a_1\cdot t}\cdot\sin(p\cdot t-\psi_3)+A_4\cdot e^{-a_2\cdot t}\cdot\sin(q\cdot t-\psi_4), \\ i_4 &= A_3\cdot e^{-a_1\cdot t}\cdot\cos(p\cdot t-\psi_3)+A_4\cdot e^{-a_2\cdot t}\cdot\cos(q\cdot t-\psi_4)+i_e. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI b)}$$

Wir gewinnen am leichtesten einen Überblick über die eben angeschriebenen Gleichungen, wenn wir sie mit den für den plötzlichen Kurzschluß der Synchronmaschine sich ergebenden Ausdrücken vergleichen. Denn die Gesetzmäßigkeiten, denen jener gehorcht, sind uns bekannt, und wir können uns ein näheres Eingehen auf dieselben an dieser Stelle ersparen.

Wir sehen nun, daß die den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen charakterisierenden Gleichungen (VI b) mit den für den plötzlichen Kurzschluß geltenden Ge. setzen völlig identisch sind, worüber wir uns im Grunde genommen nicht wundern dürfen. Denn das Typische des Ausgleichsvorganges liegt darin, daß das magnetische Feld der Maschine im Momente des Schaltens zwischen die kurzgeschlossenen Wicklungen des Stators und Induktors gerät und dort, indem sich seine Energie zum größten Teil in Joulesche Wärme umwandelt, dem Vernichtungsprozeß ausgeliefert wird. Es sind also lediglich die gegenseitige Lage der Wicklungen und deren elektrische Eigenschaften, die den zeitlichen Verlauf des Ausgleichsvorganges bestimmen; die den Klemmen des Stators aufgedrückte fremde Spannung kann nur zur Ausbildung eines weiteren magnetischen Feldes führen, das sich jedoch nicht anders als das eigene Feld der Maschine verhalten kann. Es ist also lediglich eine größere Heftigkeit des Ausgleichsvorganges, d. h. eine größere Amplitude der auftretenden Ströme zu erwarten. Natürlich nur beim Parallelschalten in einem entsprechend ungünstigen Moment. Denn wenn bei richtiger Erregung ($\varkappa = 1$) und gleicher Lage des Vektors der Netz-EMK und jenes der Maschinen-EMK ($\alpha = 0$) parallelgeschaltet wird, kann, da die Maschine sich von vornherein im richtigen Betriebszustande befindet, überhaupt kein Ausgleichsvorgang auftreten; die Wicklungen der Maschine bleiben in diesem Falle also von jeglichen Überstromerscheinungen verschont.

Die Gleichungen (VI a) bestätigen nun die Richtigkeit der eben angestellten Überlegungen. Sie gehen in die für den plötzlichen Kurzschluß gültigen Gleichungen über, wenn wir in ihnen $E = 0$ also $\varkappa = 0$ setzen. Dann ergibt sich beispielsweise für die Amplitude A_1:

$$A_1 = -\frac{J_k}{\tau}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}} = -\frac{J_k\cdot L_1\cdot\omega}{\sqrt{(L_1\cdot\tau\cdot\omega)^2+r_1^2}} = -\frac{E_i}{\sqrt{(L_1\cdot\tau\cdot\omega)^2+r_1^2}}.$$

Im letzten Ausdruck bedeutet E_i die durch den Erregerstrom i_e in der Maschine induzierte EMK, $L_1\cdot\tau\cdot\omega$ die Kurzschlußreaktanz des Stators und r_1 dessen Ohmschen Widerstand.

Für den Fall, daß die EMK der Maschine genau so groß ist als die Netz-EMK ($\varkappa = 1$), ergeben nun die Gleichungen (VIa), daß beim Parallelschalten in richtiger Phasenlage ($\alpha = 0$) überhaupt keine Ströme auftreten. Die Ströme werden genau so groß wie beim plötzlichen Kurzschluß, wenn im Augenblick des Parallelschaltens zwischen Netz-EMK und Maschinen-EMK eine Phasenverschiebung von 60^0 besteht ($\alpha = 60^0$). Die gefährlichsten Überströme treten beim Schalten in Phasenopposition ($\alpha = 180^0$) auf. In diesem ungünstigen Falle werden die Überströme genau doppelt so hoch als beim plötzlichen Kurzschluß.

Das eben Gesagte gilt natürlich nur dann, wenn, wie vorausgesetzt, die Ergiebigkeit des Netzes unendlich groß ist. Wird unsere Maschine an ein Netz mit nur endlicher Ergiebigkeit geschaltet, so fallen die auftretenden Überströme natürlich geringer aus, und zwar läßt sich ohne Schwierigkeiten voraussagen, um wieviel die Ströme in jedem Falle verringert werden. Denn der Ausgleichsvorgang verläuft ebenso, wenn wir uns den inneren Widerstand des Netzes in die Statorwicklungen unserer Maschine verlegt denken, wir brauchen also nur mit einem resultierenden Streufaktor

$$\tau' = 1 - \frac{M}{(L_1 + \lambda) \cdot L_2} \tag{13a}$$

und einem resultierenden Widerstand

$$r_1' = r_1 + \varrho \tag{13b}$$

zu rechnen, wo λ die der inneren Impedanz des Netzes entsprechende Selbstinduktion und ϱ dessen inneren Widerstand bedeutet.

5. Der Schutzwert des Vorstufenschalters. Die Betrachtungen des vorigen Abschnittes lehrten uns, daß bei schlechtem Parallelschalten in der betroffenen Maschine gewaltige Überströme auftreten können, die im ungünstigsten Falle gerade doppelt so hoch ausfallen als der plötzliche Kurzschlußstrom der betreffenden Maschine. Dies gilt natürlich sowohl für das Gleichstromglied als auch für das sogenannte Wechselstromglied des Ausgleichstromes. Doppelte Ströme bedeuten aber vierfache Kräfte, die auf die Wickelköpfe usw. ausgeübt werden, und da unsere heutigen schnelllaufenden Maschinen die mit dem plötzlichen Kurzschluß verbundenen Beanspruchungen gerade aushalten, so folgt, daß sie dem ungehinderten Einfluß des schlechten Parallelschaltens unter allen Umständen entzogen werden müssen.

Man kann hier nun an verschiedene Schutzmaßnahmen denken. Das einfachste und sicherste Mittel ist natürlich das unbedingte Vermeiden des schlechten Parallelschaltens. In der letzten Zeit sind verschiedene recht brauchbare automatische Synchronisiereinrichtungen auf den Markt gebracht worden und ihre Anwendung bedeutet nach dem Gesagten eine willkommene Verbesserung des Überstromschutzes unserer Anlagen. Ein weiteres auch für die Begrenzung der plötzlichen Kurzschlußströme gebrauchtes Mittel sind die sogenannten Schutzreaktanzen. Auch ihr Schutzwert ist unzweifelhaft, doch stehen ihrer ausreichenden Dimensionierung häufig die hohen Anschaffungskosten oder die zu starke Einengung des Regulierbereiches der Generatoren im Wege. Als drittes Schutzmittel ist in letzter Zeit der sogenannte Vorstufenschalter empfohlen worden. Hier sollen jedoch die folgenden Ausführungen zeigen, daß auf seine Schutzwirkung keine übertriebenen Hoffnungen gesetzt werden dürfen und daß die mit seiner Anwendung verbundene Verteuerung und Komplikation der Anlage nicht in Einklang mit dem erzielten Schutzwert zu bringen ist.

Der Vorstufenschalter besitzt bekanntlich eine derartige Kontaktanordnung, daß beim Ein- bzw. Ausschalten kurzzeitig ein Ohmscher Widerstand in die Strombahn eingeschaltet wird. Man hat beim Einschaltprozeß also zwei Etappen zu unterscheiden, das Schalten auf die Vorstufe (Widerstand eingeschaltet) und das Schalten auf die Hauptstufe (Widerstand überbrückt). Die Einschaltdauer des Widerstandes ist bei dem üblichen Schalten ziemlich kurz und kann höchstens zu $^1/_{30}$ Sekunde

angenommen werden; der eben genannte Wert bezieht sich auf Schalter mit Fernbetätigung, die allein für größere Maschinen in Frage kommen.

Um den beim Schalten auf die Vorstufe sich einstellenden Stromverlauf zu erhalten, brauchen wir lediglich auf die Gleichungen (VI) zurückzugreifen, in die wir nur einen um den Ohmwert des Vorstufenwiderstandes vergrößerten Statorwiderstand einzuführen haben. Die Gleichungen (VIa) lassen zunächst erkennen, daß unter dem Einfluß des Vorstufenwiderstandes alle Amplituden kleiner ausfallen, ferner wird aber, wie die Gleichungen (VIb) lehren, die Dämpfung des Gleichstromgliedes[1]) stark vergrößert, so daß wir annehmen können, daß dasselbe während der Einschaltdauer des Vorstufenwiderstandes auf Null abklingt.

Um die beim Überschalten auf die Hauptstufe auftretenden Stromstöße berechnen zu können, müssen wir zunächst die Anfangsbedingungen aufstellen. Kurz vor dem Überschalten sei

$$\left.\begin{array}{ll} i_1 = J_1'', & i_2 = J_2'', \\ i_3 = J_3'', & i_4 = J_4'' + i_e \end{array}\right\} \text{ für } t < 0. \qquad (14a)$$

Ferner sei der nach dem Überschalten sich einstellende stationäre Zustand gekennzeichnet durch

$$\left.\begin{array}{ll} i_1 = J_1, & i_2 = J_2, \\ i_3 = 0, & i_4 = i_e \end{array}\right\} \text{ für } t > 0. \qquad (14b)$$

Somit lauten die Anfangsbedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} i_1'f = J_1'' - J_1, & i_2'f = J_2'' - J_2, \\ i_3'f = J_3'', & i_4'f = J_4'' \end{array}\right\} \text{ für } t = 0. \qquad (14c)$$

Nach dem oben Gesagten können wir annehmen, daß a_1 so groß, dagegen a_2 so klein ist, daß zur Zeit der Berührung der Hauptkontrakte $e^{-a_1 \cdot t_0} = 0$ und $e^{-a_2 \cdot t_0} = 1$ gesetzt werden können. Setzen wir in den so erhaltenen Gleichungen (VIb) $t = 0$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_1'' &= -A_2 \cdot \sin \psi_2 - J \cdot \sin \psi, \\ J_2'' &= -A_2 \cdot \cos \psi_2 - J \cdot \cos \psi, \\ J_3'' &= -A_4 \cdot \sin \psi_4, \\ J_4'' &= A_4 \cdot \cos \psi_4. \end{aligned}$$

Ferner ergeben die Gleichungen (V)

$$\begin{aligned} J_1 &= -J' \cdot \sin \psi', \\ J_2 &= -J' \cdot \cos \psi', \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß bei der Berechnung von J' und ψ' aus Gleichung (Vb) wegen des verschwindenden Widerstandes der Statorwicklung $r_1 = 0$ gesetzt werden kann. Wir erhalten somit, wenn wir außerdem noch die Gleichungen (10a) beachten, folgende Anfangsbedingungen für das Überschalten auf die Hauptstufe:

$$\left.\begin{array}{l} i_1'f = -x_4 + \dfrac{i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha - E \cdot \sin \alpha \cdot \dfrac{r_1}{L_1 \cdot \omega}}{\dfrac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1}, \\[2ex] i_2'f = -x_3 + \dfrac{(i_e \cdot M \cdot \omega - E \cdot \cos \alpha) \cdot \dfrac{r_1}{L_1 \cdot \omega} + E \cdot \sin \alpha}{\dfrac{L_1^2 \cdot \omega^2}{r_1} + r_1}, \\[2ex] i_3'f = -x_8, \qquad i_4'f = x_7. \end{array}\right\} \qquad (14d)$$

Die so erhaltenen Anfangsbedingungen enthalten die stillschweigende Voraussetzung, daß die Stellung des Polrades relativ zum Vektor der Netz-EMK, also der Winkel α sich während der Einschaltdauer des Vorstufenwiderstandes nicht ändert. In einem späteren Abschnitt wird gezeigt werden, daß dies unter praktisch vorkommenden Verhältnissen in der Tat zutrifft.

[1]) Als solches bezeichnen wir die Glieder mit dem Argument $q \cdot t$ in den Gleichungen (VIb), da die Winkelgeschwindigkeit q mit großer Annäherung gleich Null gesetzt werden kann.

Die im folgenden zu betrachtenden Vorgänge spielen sich bei überbrücktem Vorstufenwiderstand ab, im Kreise der Ausgleichströme liegt also lediglich der natürliche Widerstand der Maschinenwicklungen. Da dieser nun bei größeren Maschinen sehr geringfügig ist, können wir ihn bei der Berechnung der Integrationskonstanten unbedenklich vernachlässigen. Dieselben sind natürlich genau so wie im vorigen Abschnitt zu berechnen, nur daß wir in dem Gleichungssystem (10b) die mit a_1, a_2, $\frac{r_1}{L_1}$ und $\frac{r_2}{L_2}$ multiplizierten Glieder vernachlässigen können. Führen wir ferner in dasselbe die neuen Anfangsbedingungen ein und kennzeichnen wir die neuen Unbekannten durch Stricheln, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x_5'\cdot L_2 - x_1'\cdot M &= 0, & x_2' + x_4' &= -i_{f'1}, \\ x_6'\cdot L_2 - x_2'\cdot M &= 0, & x_1' + x_3' &= -i_{f'2}, \\ x_3'\cdot L_1 - x_7'\cdot M &= 0, & x_6' + x_8' &= -i_{f'3}, \\ x_4'\cdot L_1 - x_8'\cdot M &= 0, & x_5' + x_7' &= -i_{f'4}, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystem führt nun zu folgendem Ergebnis, wenn wir für die i_f' die entsprechenden Werte aus den Gleichungen (14d) und (11) einführen, wobei die Konstanten a_1 und r_1 sich auf den Stromkreis mit eingeschaltetem Vorstufenwiderstand beziehen:

$$x_1' = -J_1'\cdot\frac{p\cdot a_1\cdot(1-\tau)}{\tau\cdot(p^2+a_1^2)} + J_2'\cdot\frac{a_1^2\cdot(1-\tau)}{\tau\cdot(p^2+a_1^2)} - \frac{(i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{r_1}{L_1\cdot\omega} + E\cdot\sin\alpha}{\tau\cdot\left(\frac{L_1^2\cdot\omega^2}{r_1}+r_1\right)},$$

$$x_2' = J_1'\cdot\frac{a_1^2\cdot(1-\tau)}{\tau\cdot(p^2+a_1^2)} + J_2'\cdot\frac{p\cdot a_1\cdot(1-\tau)}{\tau\cdot(p^2+a_1^2)} - \frac{i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha - E\cdot\sin\alpha\cdot\frac{r_1}{L_1\cdot\omega}}{\tau\cdot\left(\frac{L_1^2\cdot\omega^2}{r_1}+r_1\right)},$$

$$x_3' = -J_2'\cdot\frac{1-\tau}{\tau} + \frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{(i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{r_1}{L_1\cdot\omega} + E\cdot\sin\alpha}{\frac{L_1^2\cdot\omega^2}{r_1}+r_1},$$

$$x_4' = -J_1'\cdot\frac{1-\tau}{\tau} + \frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha - E\cdot\sin\alpha\cdot\frac{r_1}{L_1\cdot\omega}}{\frac{L_1^2\cdot\omega^2}{r_1}+r_1},$$

$$\left.\begin{aligned} x_5' &= \frac{M}{L_2}\cdot x_1', & x_6' &= \frac{M}{L_2}\cdot x_2', \\ x_7' &= \frac{M}{L_2}\cdot\frac{1}{1-\tau}\cdot x_3', & x_8' &= \frac{M}{L_2}\cdot\frac{1}{1-\tau}\cdot x_4'. \end{aligned}\right\} \qquad (16a)$$

Unter Beachtung der Gleichung (8d) folgt weiterhin für die ersten 4 der eben angeschriebenen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -\frac{E\cdot\sin\alpha\cdot\omega^2\cdot\left(1+\frac{a_1^2}{\omega^2}\cdot\tau^2\right) + (i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha)\cdot\omega\cdot a_1\cdot\left(1+\frac{a_1^2}{\omega^2}\cdot\tau^2\right)}{\tau^2\cdot(\omega^2+a_1^2)\cdot(L_1^2\cdot\omega^2+r_1^2)}\cdot r_1, \\ x_2' &= -\frac{(i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha)\cdot\omega^2\cdot\left(1+\frac{a_1^2}{\omega^2}\cdot\tau^2\right) - E\cdot\sin\alpha\cdot\omega\cdot a_1\cdot\left(1+\frac{a_1^2}{\omega^2}\cdot\tau^2\right)}{\tau^2\cdot(\omega^2+a_1^2)\cdot(L_1^2\cdot\omega^2+r_1^2)}\cdot r_1, \\ x_3' &= \frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{i_e\cdot M\cdot\omega - E\cdot\cos\alpha}{L_1\cdot\omega}, \\ x_4' &= -\frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{E\cdot\sin\alpha}{L_1\cdot\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (16b)$$

Daraus berechnet sich nun

$$\left.\begin{aligned}
A_1' &= -\frac{J_k}{\tau}\cdot\frac{a_1}{\omega}\cdot\sqrt{\frac{(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)^2+(\varkappa\cdot\sin\alpha)^2}{1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}},\\
A_2' &= J_k\cdot\frac{1-\tau}{\tau}\cdot\sqrt{(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)^2+(\varkappa\cdot\sin\alpha)^2},\\
A_3' &= i_e\cdot\frac{1-\tau}{\tau}\cdot\frac{a_1}{\omega}\cdot\sqrt{\frac{(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)^2+(\varkappa\cdot\sin\alpha)^2}{1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}},\\
A_4' &= i_e\cdot\frac{1-\tau}{\tau}\cdot\sqrt{(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)^2+(\varkappa\cdot\sin\alpha)^2},\\
\operatorname{tg}\psi_1' = \operatorname{tg}\psi_3' &= \frac{1-\varkappa\cdot\cos\alpha-\frac{a_1}{\omega}\cdot\varkappa\sin\alpha}{\frac{a_1}{\omega}\cdot(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)+\varkappa\cdot\sin\alpha},\\
\operatorname{tg}\psi_2' = \operatorname{tg}\psi_4' &= -\frac{\varkappa\cdot\sin\alpha}{1-\varkappa\cdot\cos\alpha}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

Der zeitliche Verlauf der Ströme erfolgt natürlich genau, wie es die Gleichungen (VI b) angeben, an Stelle der Konstanten A, J und ψ, p, q und a sind natürlich die gestrichelten Werte einzusetzen, ferner sind a_1' und a_2' auf den Stromkreis ohne Vorstufenwiderstand zu beziehen.

Die Gleichungen (VII) lassen nun folgendes erkennen: Das Wechselstromglied der Ausgleichströme im Stator kann durch den Vorstufenwiderstand überhaupt nicht beeinflußt werden. Dies ist auch ohne weiteres einleuchtend, denn dieses verdankt seine Entstehung dem magnetischen Felde des Induktors, dessen zeitliches Abklingen, wie die Gleichungen (IV b) lehren, lediglich von der Zeitkonstante der Erregerwicklung abhängt. Das Induktorfeld ist also noch in voller Stärke vorhanden, wenn das Überschalten auf die Hauptstufe erfolgt, und das diesem proportionale Wechselstromglied des Ausgleichsstromes muß infolgedessen ebenfalls in voller Stärke erscheinen.

Durch den Vorstufenwiderstand kann lediglich das Gleichstromglied in seiner Höhe herabgedrückt werden. Und zwar wird die günstigste Wirkung zweifellos dann erreicht, wenn die Stromstöße beim Schalten auf die Vorstufe und beim Überschalten auf die Hauptstufe gleich hoch ausfallen.

Beim Schalten auf die Vorstufe erreicht der Strom sein Maximum in der Phase 2 zur Zeit $\omega\cdot t=\pi$. Der erreichte Höchstwert ist

$$\begin{aligned}
i_{2\max} &= A_1\cdot\cos\psi_1\cdot e^{-\frac{a_1}{\omega}\cdot\pi}-A_2\cdot\cos\psi_2-J\cdot\cos\psi\\
&= A_1\cdot\cos\psi_1\cdot\left(1+e^{-\frac{a_1}{\omega}\cdot\pi}\right)\\
&= \frac{J_k}{\tau}\cdot\sqrt{\frac{(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)^2+(\varkappa\cdot\sin\alpha)^2}{\left(1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)^2}}\cdot\left(1+e^{-\frac{a_1}{\omega}\cdot\pi}\right).
\end{aligned} \qquad (17\,a)$$

Beim Überschalten auf die Hauptstufe erfolgt der größte Stromstoß in der Phase 1 angenähert zur Zeit $\omega\cdot t=\frac{3}{2}\cdot\pi$. Sein Betrag ist angenähert

$$\begin{aligned}
i_{1\,\max}' &= A_1'\cdot\sin\psi_1'\cdot e^{-1{,}5\cdot\frac{a_1'}{\omega}\cdot\pi}-A_2-J\\
&= \frac{J_k}{\tau}\cdot\sqrt{(1-\varkappa\cdot\cos\alpha)^2+(\varkappa\cdot\sin\alpha)^2}\cdot\left(1+\frac{\frac{a_1}{\omega}}{1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}\cdot e^{-1{,}5\cdot\frac{a_1'}{\omega}\cdot\pi}\right).
\end{aligned} \qquad (17\,b)$$

Die auftretenden Überströme fallen nach dem eben Gesagten am niedrigsten aus, wenn

$$i_{2\,max} = i_1{}'_{max},$$

woraus

$$\frac{\omega}{a_1} \cdot e^{-\frac{a_1}{\omega} \cdot \pi} - \frac{a_1}{\omega} = e^{-1.5 \cdot \frac{a_1'}{\omega} \cdot \pi}. \tag{VIII a}$$

In dieser Gleichung ist a_1' die aus dem Oszillogramm des plötzlichen Kurzschlusses zu ermittelnde natürliche reziprokte Kurzschluß-Zeitkonstante der Statorwicklung (ohne Vorstufenwiderstand).

Für Werte des Verhältnisses $\frac{a_1'}{\omega}$ zwischen 0,0 und 0,1, also innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen ergibt die eben angeschriebene Gleichung für $\frac{a_1}{\omega}$ also für das Verhältnis des Ohmschen Widerstandes im Statorkreis zur Kurzschlußreaktanz der Statorwicklung die Grenzen 0,3 und 0,35. Um also die geringsten Überströme zu erhalten, ist der Vorstufenwiderstand etwa gleich dem dritten Teil der Kurzschlußreaktanz der Statorwicklung zu machen und die mit diesem Widerstand erzielte recht bescheidene Schutzwirkung zeigt das Bild 1 [1]). Die Gleichung (VIII a) läßt übrigens erkennen, daß die Schutzwirkung des Vorstufenschalters unabhängig von der Stellung des Polrades ist, in welcher die Parallelschaltung erfolgt. Bezüglich des Bildes 1 ist noch zu sagen, daß für Schalten ohne Vorstufenschalter das Verhältnis $\frac{i_{max}}{J_{max}} = 2$ wird.

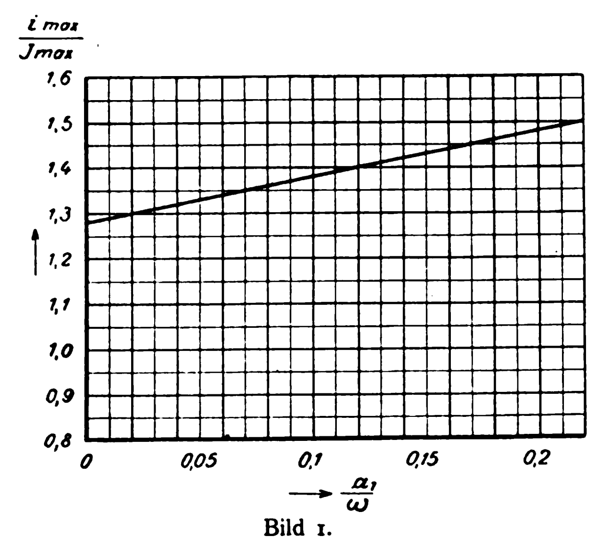


Bild 1.

Außer der Beanspruchung durch Überströme erfährt der Generator bei schlechtem Parallelschalten eine nicht zu unterschätzende Überspannungsbeanspruchung. Und zwar handelt es sich hier in erster Linie um die Schaltwellen, die beim Schalten in Phasenopposition besonders hoch ausfallen können; sie besitzen in diesem Falle gerade die doppelte Höhe wie die beim plötzlichen Kurzschluß in die Maschinenwicklung einziehende Entladewelle, während sie beim Parallelschalten unter einem Winkel von 60° ebenso hoch ausfallen. Man könnte nun auch hier daran denken, die Höhe der erwähnten Entladewellen durch Anwendung eines Vorstufenschalters auf ein zulässiges Maß herunterzudrücken. Die folgenden Betrachtungen werden jedoch zeigen, daß auch bezüglich der Überspannungsbeanspruchung nur eine recht bescheidene Schutzwirkung zu erzielen ist.

Wir werden im folgenden so rechnen, als wenn die Maschinenwicklung sich gegenüber Sprungwellen ebenso verhielte wie ein gestreckter Leiter. Die neueren Untersuchungen haben gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, wir können jedoch in grober Annäherung, insbesondere wenn uns nur der allererste Anfang der Erscheinungen interessiert, so rechnen und werden demgemäß der Wicklung der zuzuschaltenden Maschine einen wohldefinierten Wellenwiderstand W_1 und den parallelgeschalteten

[1]) Dieses entspricht der Abb. 5 von „Technische Probleme der elektrischen Großwirtschaft" ETZ. 1921, Heft 2, 3 u. 4.

Maschinen des Netzes bzw. den Zuleitungen einen Wellenwiderstand W_2 zuschreiben. Der Ohmwert des Vorstufenwiderstandes sei R.

Sei e die Spannungsdifferenz zwischen den Kontakten des Schalters kurz vor der Parallelschaltung, wo

$$e = E \cdot \sqrt{(1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + (\varkappa \cdot \sin\alpha)^2}, \tag{18}$$

so ist die Höhe der in die zuzuschaltende Maschine einziehenden Sprungwelle beim Schalten auf die Vorstufe:

$$e_1' = e \cdot \frac{W_1}{R + W_1 + W_2}. \tag{19a}$$

Sei ferner i der kurz vor der Berührung der Hauptkontakte im Vorstufenwiderstand fließende Strom, so ist die Höhe der beim Überschalten auf die Hauptstufe auftretenden Sprungwelle:

$$e_1'' = i \cdot R \cdot \frac{W_1}{W_1 + W_2}.$$

Nun ist in unserm Falle, wie die Gleichungen (VIb) erkennen lassen

$$i = A_2 + J$$

zu setzen, da wir annehmen, daß das Gleichstromglied beim Berühren der Hauptkontakte bereits abgeklungen ist und da wir ferner annehmen, daß der Winkel α sich in der Zeit der Berührung der Vorkontakte nicht geändert hat. Es ist also gemäß Gleichungen (VIa)

$$i = \frac{J_k}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + \varkappa \cdot \sin\alpha)^2}{1 + \left(\frac{a^1}{\omega}\right)^2}}$$

und wir erhalten hiermit

$$e_1'' = e \cdot \frac{W_1}{W_1 + W_2} \cdot \frac{R}{\sqrt{(L_1 \cdot \tau \cdot \omega^2) + R^2}}. \tag{19b}$$

Auch hier ergibt sich die geringste Beanspruchung für den Fall, daß die Spannungsprünge beim Schalten auf Vorstufe und Hauptstufe gleich groß ausfallen. Diese Forderung ergibt nach Gleichsetzen der Ausdrücke (19a) und (19b) unter Beachtung der Gleichung (18) folgende Bedingungsgleichung für den günstigsten Wert des Vorstufenwiderstandes:

$$R^4 + R^3 \cdot 2 \cdot (W_1 + W_2) = [L_1 \cdot \tau \cdot \omega \cdot (W_1 + W_2)]^2. \tag{VIIIb}$$

Diese Gleichung besitzt nur eine reelle positive Wurzel, für die die Beziehung

$$R > \sqrt{(L_1 \cdot \tau \cdot \omega)^2 \cdot \frac{W_1 + W^2}{2}}$$

einen oberen Grenzwert festlegt. Der tatsächliche Widerstandswert stimmt um so mehr mit diesem Grenzwert überein, je kleiner R gegenüber $2 \cdot (W_1 + W_2)$ ist, eine Forderung, die in den meisten Fällen erfüllt sein wird.

Als Beispiel betrachten wir einen Turbogenerator von 20000 kVA, 6300 Volt, 50 Perioden mit $E = 3650$ Volt, $J_k = 2000$ Amp, $\tau = 0{,}1$, $\frac{a_1'}{\omega} = 0{,}05$, $L_1 \cdot \tau \cdot \omega = \frac{E \cdot \tau}{J_k}$ $= 0{,}1825$ Ohm, der auf ein unendlich großes Netz geschaltet werde.

Für $\frac{a_1'}{\omega} = 0{,}05$ ergibt die Forderung eines möglichst geringen Stromstoßes folgenden Wert des Vorstufenwiderstandes

$$R = 0{,}325 \cdot L_1 \cdot \tau \cdot \omega = \sim 0{,}06 \text{ Ohm}.$$

Die Überströme überschreiten damit, wie Bild 1 zeigt, den beim plötzlichen Kurzschluß möglichen maximalen Wert noch um 33%.

Dagegen ergibt die Forderung eines möglichst niedrigen Spannungssprunges einmal für $W_1 + W_2 = 500$

$$R = \sim 2 \text{ Ohm},$$

dann für $W_1 + W_2 = 50$

$$R = \sim 0{,}93 \text{ Ohm}.$$



Der Schutzwert dieses Widerstandes, worunter wir den Ausdruck

$$\frac{R + W_1 + W_2}{W_1 + W_2} - 1$$

verstehen, ergibt sich im ersteren Falle zu $\frac{502}{500} - 1 = 0{,}4\,\%$, im letzteren Falle zu $\frac{50{,}93}{50} - 1 = \sim 2\,\%$.

Die Parallelschaltung erfolge nun auf der Oberspannungsseite eines mit dem vorliegenden Generator direkt verbundenen Transformators 6300/110000 Volt gleicher Leistung mit 5 % Streuspannung. Es ist also jetzt

$$E = 63\,500 \text{ Volt}, \; J_k = 110 \text{ Amp}, \; \tau = 0{,}15, \; \frac{a_1'}{\omega} = 0{,}05, \; L_1 \cdot \tau \cdot \omega = 86{,}5 \text{ Ohm}.$$

Mit diesen Werten ergibt die Forderung eines möglichst geringen Stromstoßes

$$R = 0{,}325 \cdot L_1 \cdot \tau \cdot \omega = 28 \text{ Ohm}.$$

Hingegen ist der für die Spannungsbeanspruchung günstigste Widerstandswert einmal für $W_1 + W_2 = 5000$:

$$R = 260 \text{ Ohm},$$

dann für $W_1 + W_2 = 500$:

$$R = 110 \text{ Ohm}.$$

Der Schutzwert des Widerstandes ist im ersteren Falle 5,3 %, im letzteren Falle 22 %. Hierzu ist zu bemerken, daß für Transformatoren der erwähnten Spannung $W_1 + W_2$ sicher größer als 500 anzunehmen ist und daß demgemäß der Schutzwert des Vorstufenwiderstandes näher bei 5 % als bei 20 % liegen dürfte. Man sieht ferner, daß der für die Spannungsbeanspruchung günstigste Widerstand den Stromstoß nicht im geringsten zu beeinflußen vermag.

6. Die magnetischen Kontrastwirkungen zwischen Stator und Induktor. Es ist von der Theorie des plötzlichen Kurzschlusses der Synchronmaschinen her bekannt, daß im Verlaufe des Ausgleichsvorganges zwischen Stator und Induktor gewaltige magnetische Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte auftreten, die die ganze Maschine in gefährlicher Weise beanspruchen können. Es sind dies zunächst die Kontrastwirkungen zwischen den am Stator und am Induktor haftenden Anteilen des ursprünglichen gemeinsamen magnetischen Feldes der Maschine, die sich bald als Anziehungs- bzw. als Abstoßungskräfte äußern und in jeder Periode zweimal ihre Richtung ändern. Dann tritt ein durch die Cu-Verluste in der Statorwicklung bedingtes gleichgerichtetes bremsendes Drehmoment auf, das gleichfalls erhebliche Werte annehmen kann. Mit diesen Kraftäußerungen ist natürlich im vorliegenden Falle, der dem des plötzlichen Kurzschlusses sehr ähnlich ist, ebenfalls zu rechnen. Hier tritt aber noch eine weitere Kraftäußerung auf, nämlich ein gewaltiges synchronisierendes Drehmoment, das den Induktor alsbald nach dem Parallelschalten in seine richtige Lage relativ zum Vektor der Netz-EMK zu drehen sucht.

Um die Summe aller auf den Induktor wirkenden magnetischen Kräfte zu erhalten, bilden wir die resultierende Längs- bzw. Querfeldamperenwindungsverteilung des Stators relativ zur Längs- bzw. Querachse der Erregerwicklung. Und zwar ist der aus der Wirkung sämtlicher Amperwindungen des Stators und Induktors sich ergebende resultierende Erregerstrom in der Längsachse der Erregerwicklung:

$$i_m = i_4 - \frac{M}{L_1} \cdot (i_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) - i_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)). \qquad (20\text{a})$$

Ferner ist der resultierende Erregerstrom in der Querachse der Erregerwicklung, also in der Längsachse der Dämpferwicklung:

$$i_q = i_3 + \frac{M}{L_1} \cdot (i_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)). \qquad (21\text{ b})$$

Eine Drehmomentenbildung kann nur zwischen um 90° auseinanderliegenden Komponenten der Induktor- bzw. Statoramperwindungen auftreten. Nun ist die

magnetische Kontrastwirkung zwischen den resultierenden Längsamperwindungen des Induktors und den Queramperwindungen des Stators:

$$D_m = \text{konst} \times i_m \cdot (i_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)). \tag{20b}$$

Ferner ist die magnetische Kontrastwirkung zwischen den resultierenden Queramperwindungen des Induktors und den Längsamperwindungen des Stators:

$$D_q = \text{konst} \times i_q \cdot (-i_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)). \tag{21b}$$

Die resultierende magnetische Kontrastwirkung zwischen Induktor und Stator ist somit:

$$\begin{aligned} D &= D_m + D_q \\ &= \text{konst} \times \left[i_4 \cdot \left(i_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) + i_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)\right) + i_3 \cdot (i_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \right. \\ &\qquad \left. - i_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha))\right]. \end{aligned} \tag{22a}$$

Das normale Vollastdrehmoment des Generators ist

$$D_{norm} = \frac{M \cdot m}{9{,}81} \cdot \xi \cdot i_e \cdot J_{1/1\,(\cos\varphi = 1)} = \xi \cdot \frac{E \cdot J_{1/1}}{9{,}81 \cdot \omega} \cdot m,$$

wo m die Polpaarzahl bedeutet und ξ ein Faktor ist, der bei Zweiphasenstrom = 1, bei Dreiphasenstrom = 1,5 zu setzen ist. Wir haben also

$$\text{konst} = \xi \cdot \frac{M \cdot m}{9{,}81}. \tag{22b}$$

Nun ist nach den Entwicklungen des 4. Abschnittes, wenn wir, was ja mit sehr großer Annäherung zutrifft, $q = 0$ und $p = \omega$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= x_2 \cdot e^{-a_1 \cdot t} + (x_3 \cdot \sin\omega \cdot t - x_4 \cdot \sin\omega \cdot t) \cdot e^{-a_2 \cdot t} + J_2' \cdot \sin\omega \cdot t - J_1' \cdot \cos\omega \cdot t, \\ i_2 &= x_1 \cdot e^{-a_1 \cdot t} - (x_4 \cdot \sin\omega \cdot t + x_3 \cdot \cos\omega \cdot t) \cdot e^{-a_2 \cdot t} - J_1' \cdot \sin\omega \cdot t - J_2' \cdot \cos\omega \cdot t, \\ i_3 &= x_8 \cdot e^{-a_2 \cdot t} - (x_5 \cdot \sin\omega \cdot t - x_6 \cdot \cos\omega \cdot t) \cdot e^{-a_1 \cdot t}, \\ i_4 &= -x_7 \cdot e^{-a_2 \cdot t} - (x_6 \cdot \sin\omega \cdot t + x_5 \cdot \cos\omega \cdot t) \cdot e^{-a_1 \cdot t} + i_e, \end{aligned}\right\} \tag{22c}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{J_k}{\tau} \cdot \frac{1 - \varkappa \cdot \cos\alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}, \\ x_2 &= \frac{J_k}{\tau} \cdot \frac{\frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \varkappa \cdot \cos\alpha) + \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}, \\ x_3 &= x_1 - J_2', \qquad x_4 = x_2 - J_1', \\ x_5 &= \frac{M}{L_2} \cdot x_1, \qquad x_6 = \frac{M}{L_2} \cdot x_2, \\ x_7 &= -\frac{M}{L_2} \cdot x_1, \qquad x_8 = -\frac{M}{L_2} \cdot x_2, \\ J_1' &= J_k \cdot \frac{\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} (1 - \varkappa \cdot \cos\alpha) + \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2}, \\ J_2' &= J_k \cdot \frac{1 - \varkappa \cdot \cos\alpha - \frac{a_1 \cdot \tau}{\omega} \cdot \varkappa \cdot \sin\alpha}{1 + \left(\frac{a_1 \cdot \tau}{\omega}\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{22d}$$

Durch Vereinigung der Gleichungen (22) ergibt sich nun folgender Ausdruck für die magnetische Kontrastwirkung zwischen Stator und Induktor:

$$D = \frac{\xi \cdot E \cdot J_k}{\frac{9{,}81}{m} \cdot \tau \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} \cdot \left[\left((1 - \varkappa \cdot \cos\alpha)^2 + (\varkappa \cdot \sin\alpha)^2\right) \cdot \left(\sin(\omega \cdot t - \delta) \cdot e^{-(a_1 + a_2) \cdot t}\right.\right.$$

$$+ (1 - \tau) \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot e^{-2 \cdot a_2 \cdot t} + \tau \cdot \frac{a_1}{\omega} \Big) + (1 - \tau) \cdot \varkappa \cdot \sin \alpha \cdot e^{-2 \cdot a_2 \cdot t} + \tau \cdot \varkappa \cdot \sin \alpha \Big]. \qquad \text{(IX)}$$

Gewöhnlich reguliert man $i_e \cdot M \cdot \omega = E$ ein, macht also $\varkappa = 1$, ferner kann, da uns vor allem die erste Zeit kurz nach Beginn des Ausgleichsvorganges interessiert, a_2 in den Exponenten unbedenklich gleich Null gesetzt werden. Dann folgt

$$D = \frac{\xi \cdot E \cdot J_k}{\frac{9{,}81}{m} \cdot \tau \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right) \cdot} \Big[2 \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot e^{-a_1 \cdot t} (\sin \omega \cdot t - \frac{a_1}{\omega} \cdot \cos \omega \cdot t)$$

$$+ \frac{a_1}{\omega} \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \Big]. \qquad \text{(IX a)}$$

In Gleichung (IX) ist übrigens

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \alpha + \frac{a_1}{\omega} \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{a_1}{\omega} \cdot \sin \alpha} \qquad \text{(IX b)}$$

zu setzen.

Die Gleichung (IX a) besitzt nun eine sehr übersichtliche Form. Das erste Glied in der eckigen Klammer entspricht der magnetischen Kontrastwirkung zwischen den am Stator und Induktor haftenden Anteilen des gemeinsamen magnetischen Feldes, der zweite Summand ergibt das durch die Wicklungsverluste bedingte bremsende Moment und der dritte Summand endlich das synchronisierende Moment. Für normale Fälle, also insbesondere Schalten ohne Vorstufenschalter, wo $\frac{a_1}{\omega}$ klein gegenüber 1 ist, läßt sich an Hand der Gleichung folgendes sagen.

Weitaus den höchsten Wert, und zwar den vierfachen Betrag des synchronisierenden Momentes kann der erste Summand erreichen. Die Kontrastwirkung zwischen Stator- und Induktorfeld wechselt ihre Richtung jedoch so schnell, daß sie fast vollkommen von der kinetischen Energie der einzelnen Pole bzw. der Induktorwalze aufgenommen wird und aus diesem Grunde die Maschine nur verhältnismäßig wenig beansprucht. Das bremsende Moment wird am größten beim Parallelschalten in Phasenopposition und verschwindet beim Schalten in der Nähe des Synchronismus, es verhält sich in dieser Beziehung genau so wie die eben betrachtete magnetische Kontrastwirkung. Das synchronisierende Moment dagegen wird beim Parallelschalten in Phasenopposition gleichfalls Null, es erreicht seinen größten Betrag bei Parallelschalten in der Mittelstellung zwischen Synchronismus und Phasenopposition ($\alpha = 90^0$).

Geschieht das Parallelschalten mittels Vorstufenschalters, so erkennt man, daß solange $\frac{a_1}{\omega} < 1$, das gesamte auf die Induktorwelle ausgeübte Drehmoment größer wird als beim Schalten mittels normalen Schalters. Während man also auf der einen Seite die Beanspruchung der Wickelköpfe etwas verringert, vergrößert man auf der andern Seite die Beanspruchung der Induktorwelle. Und zwar ist diese letztere Beanspruchung nicht zu unterschätzen, denn gerade bei Turbogeneratoren mögen manche Schaufeldefekte des Dampfteiles auf die durch schlechtes Parallelschalten hervorgerufene Verdrehung der Welle zurückzuführen sein.

7. Das Einschwingen des Induktors in die synchrone Lage. Die sämtlichen bisherigen Betrachtungen beschränkten sich auf die allererste Zeit nach dem Einlegen des Schalters, sie geben uns daher keinen Aufschluß über den ferneren Verlauf der Dinge, insbesondere darüber, welchem endgültigen stationären Zustande unsere Maschine zustrebt und wie das Einschwingen in diesen verläuft. Denn wir betrachteten sowohl die Winkelgeschwindigkeit ω' als auch den Netzwinkel α als kon-

stante Größen, zwangen also dem Induktor eine gegenüber der Netz-EMK absolut starre Lage auf. Wir wollen diese Beschränkung nun im folgenden fallen lassen und zunächst zusehen, wieweit die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen dadurch eine Korrektur erfahren. Und zwar können wir die Winkelgeschwindigkeit ω weiterhin als Konstante betrachten, wenn wir nur den Winkel α als eine mit der Zeit veränderliche Größe auffassen.

Jede zusätzliche Bewegung $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ des Induktors gibt den Anlaß zu in den verschiedenen Wicklungen sich ausbildenden zusätzlichen Strömen. Diese letzteren werden nun um so mehr an Bedeutung zurücktreten, mit um so geringerer Geschwindigkeit $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ diese Bewegung erfolgt, denn um so geringer wird die Höhe der durch diese induzierten zusätzlichen EMK. Genauere Untersuchungen [1]), auf die wir hier aus Platzmangel nicht eingehen können, bestätigen denn auch die Richtigkeit dieser Überlegung. Die Ergebnisse der in den vorhergehenden Abschnitten angestellten Untersuchungen gelten mit um so größerer Genauigkeit auch für die Synchronmaschinen mit freischwingendem Induktor, je mehr die Bedingung erfüllt ist

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} \text{ und } \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \ll \omega^2. \tag{23}$$

Insbesondere die Gleichungen (VI) und (IX) geben für alle praktisch vorkommenden Fälle den zeitlichen Verlauf der Ströme und der magnetischen Kontrastwirkungen für den vollständigen Vorgang des Einschwingens des Polrades in die synchrone Lage richtig wieder, wobei α nunmehr eine Funktion der Zeit ist, deren Erforschung die folgenden Betrachtungen gewidmet sind.

Bezeichnen wir mit Θ das Trägheitsmoment der sich drehenden Massen, so lautet die mechanische Bewegungsgleichung des Induktors:

$$\frac{\Theta}{m}\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \gamma\cdot\frac{d\alpha}{dt} + D = 0. \tag{X}$$

Hierbei ist $\frac{d\alpha}{dt}$ als eine zur konstanten Winkelgeschwindigkeit ω zu addierende zusätzliche Geschwindigkeit aufzufassen, der Dämpfungskoeffizient γ wird sehr angenähert durch die Beziehung

$$\gamma = \frac{\xi\cdot E\cdot J_k}{\frac{9{,}81}{m}\cdot\tau\cdot\omega\cdot a_2\cdot\left(1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)}\cdot\left[\varkappa + \frac{2\cdot\frac{a_1}{\omega}}{1+\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}\cdot\left(\sin\alpha - \frac{a_1}{\omega}\cdot\cos\alpha\right)\right] \tag{Xa}$$

wiedergegeben, während die Größe des Drehmomentes D der Gleichung (IX) zu entnehmen ist.

Es würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten, eine allgemeine Lösung [2]) der Gleichung (X) abzuleiten. Beschränken wir uns dagegen auf kleine Winkel α, nehmen wir also nicht gerade Schalten in Phasenopposition, sondern

[1]) Hier sei auf eine ähnlichen Untersuchungen gewidmete Arbeit von L. Dreyfus: „Einführung in die Theorie der selbsterregten Schwingungen von synchronen Maschinen". E u. M. 1911, Seite 352, verwiesen.

[2]) Eine näherungsweise Lösung der Gleichung (X) gelingt mit Hilfe des folgenden Kunstgriffes. Wir ersetzen zunächst in Gleichung (IXa) die trigonometrischen Funktionen mit dem Argument α durch Trapeze mit gleichem Flächeninhalt, wir ändern also lediglich den zeitlichen Verlauf der entsprechenden Drehmomente um eine Kleinigkeit, nicht aber deren Arbeitsvermögen. In Gleichung (Xa), wo $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ nur in Verbindung mit dem Faktor $\frac{a_1}{\omega}$ bzw. $\left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2$ vorkommen, können wir, da $\frac{a_1}{\omega}$ in den uns interessierenden Fällen stets klein gegenüber 1 ist, noch

das praktisch übliche schlechte Synchronisieren an, so läßt sich die Gleichung (X) wesentlich vereinfachen. Wir können dann nämlich $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \alpha$ setzen und beim Ausdruck (Xa) für die Dämpfung noch einen Schritt weitergehen, indem wir, da es uns hauptsächlich auf den Mittelwert der Dämpfung in einem bestimmten Intervall ankommt, den Sinus des Winkels α gänzlich vernachlässigen. Die Gleichungen (IX) und (X) lassen sich dann zu folgender Gleichung zusammenfassen, die unter der Voraussetzung kleiner Winkel α (α höchstens $= 60^0$) das Einschwingen des Polrades in die synchrone Lage vollständig beschreibt:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \nu^2 \cdot \alpha = 0 \tag{XI a}$$

mit

$$\nu^2 = \frac{\zeta \cdot E \cdot J_k}{\frac{9{,}81}{m^2} \cdot \Theta \cdot \tau \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)} = \frac{4\,(kVA) \cdot m^2 \cdot 10^3}{(G \times D^2) \cdot X \cdot \omega \cdot \left(1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2\right)}. \tag{XI b}$$

In dem zuletzt angeschriebenen Ausdruck bedeutet (kVA) die normale scheinbare Leistung des Generators in kVA, $(G \times D^2)$ dessen Schwungmoment in $kg \times m^2$ und X dessen auf den Vallaststrom bezogenen Streufaktor.

Gleichung (XI a) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiten Grades, deren Lösung sich ohne weiteres in folgender Form anschreiben läßt

$$\alpha = e^{-\beta \cdot t} \cdot (A \cdot \sin\nu' \cdot t + B \cdot \cos\nu' \cdot t) \tag{XII a}$$

mit

---

einen Schritt weitergehen und diese Funktionen durch deren Mittelwerte in dem betrachteten Teilintervall ersetzen. Die Höhe des Ersatztrapezes ergibt sich zu

$$h = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \sqrt{\pi^2 - 8}) = \sim 0{,}887.$$

Wir teilen dann das Intervall $0 - \pi$ in 3 Teile, in deren jedem wir die Sinuslinie durch je eine Gerade ersetzen können, und damit zerfällt die Gleichung (X) in 3 gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die für die verschiedenen Teilintervalle folgendermaßen lauten, wenn wir annehmen, daß die mit $e^{-a_1 \cdot t}$ multiplizierten Glieder nach Durchlaufen des ersten Teilintervalls abgestorben sind.

1. $$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 \mp \frac{a_1}{\omega} \cdot h + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2 \cdot (1 + 2 \cdot h)}{1 + \left(\frac{a_2}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} - \nu^2 \cdot \alpha_1 =$$
$$- \nu^2 \cdot \left[4 \cdot e^{-a_1 \cdot t} \cdot \left(\sin\omega \cdot t - \left(\frac{a_1}{\omega}\right) \cdot \cos\omega \cdot t\right) + \frac{a_1}{\omega} \cdot (1 + h) \mp \pi\right]$$

gültig im Intervall $\mp \pi < \alpha_1 < \mp (\pi - h)$;

2. $$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 \mp 2 \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot h + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} \mp \frac{a_1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot \nu^2 \cdot h}{\pi - 2 \cdot h} \cdot \alpha_2 = \nu^2 \cdot \left(\pm h - \frac{a_1}{\omega} \cdot \left(1 - \frac{h \cdot \pi}{\pi - 2 \cdot h}\right)\right)$$

gültig im Intervall $\mp (\pi - h) < \alpha_2 < \mp h$;

3. $$\frac{d^2\alpha_3}{dt^2} + \frac{\nu^2}{a_2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2 \cdot (1 - 2 \cdot h)}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{d\alpha_3}{dt} + \nu^2 \cdot \alpha_3 = \nu^2 \cdot \frac{a_1}{\omega} \cdot (h - 1)$$

gültig im Intervall $-h < \alpha_3 < +h$.

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{\nu^2}{2 \cdot a_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2} \\ \text{und} \\ \nu' &= \nu \cdot \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{4 \cdot a_2^2} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{a_1}{\omega}\right)^2}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIIb)}$$

Bei praktisch ausgeführten Maschinen ist sehr angenähert

$$\nu' = \nu, \qquad (24)$$

Gleichung (XIb) gibt also die mechanische Eigenfrequenz des Polrades an, wobei allerdings zu beachten ist, daß bei der Ableitung der Gleichung (XI) das zeitliche Abklingen des magnetischen Feldes der Maschine nicht berücksichtigt wurde. Mit abnehmendem Felde sinkt das synchronisierende Moment und damit die Eigenfrequenz ν. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß bei größeren Maschinen das Abklingen des magnetischen Feldes langsam im Vergleich zum Einschwingen des Polrades verläuft und daß aus diesem Grunde die eben erwähnte Vernachlässigung verhältnismäßig belanglos ist.

Aus den Anfangsbedingungen, wonach

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} \\ \text{und} \qquad \frac{d\alpha}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0 \qquad (25)$$

— $\bar{\alpha}$ ist die relative Stellung des Polrades zur Achse der Statorwicklung im Moment des Parallelschaltens — ergeben sich die willkürlichen Integrationskonstanten zu

$$A = 0$$

und

$$B = \bar{\alpha}$$

und die Gleichung (XIIa) geht damit über in

$$\alpha = \bar{\alpha} \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos \nu \cdot t. \qquad \text{(XIIc)}$$

Die Gleichungen (XIb) und (XIIb) lassen nun folgendes erkennen:

Mit zunehmendem Statorwiderstand, also eingeschaltetem Vorstufenwiderstand nimmt die mechanische Eigenfrequenz des Polrades erst langsam und von $\frac{a_1}{\omega} > 1$ an schneller ab. Ferner wird die Dämpfung der freien Schwingungen zunächst geringer, wird für $\frac{a_1}{\omega} = 1$ Null und wird für $\frac{a_1}{\omega} > 1$ endlich negativ. Bei nennenswerter Größe des Vorstufenwiderstandes schwingt also das Polrad überhaupt nicht in die synchrone Lage ein, sondern das Polrad schwingt bei Stehenbleiben des Schalters auf der Vorstufe nach Durchgang durch die synchrone Lage über die Anfangsausweichung $\bar{\alpha}$ hinaus, um nach einer Reihe anschwellender Schwingungen vollständig außer Tritt zu fallen. Es wäre also aussichtslos, durch längeres Verweilen auf der Vorstufe das Synchronisieren der Maschine erleichtern zu wollen. Stärkere zusätzliche Beanspruchungen der Induktorwelle durch den Vorstufenwiderstand treten im Gegensatz zum Parallelschalten bei großen Winkelabweichungen $\bar{\alpha}$ bei Werten des Winkels $\bar{\alpha}$ unter 60° nicht auf.

Bei den im vorhergehenden Abschnitt angestellten, den Schutzwert des Vorstufenschalters betreffenden Rechnungen war vorausgesetzt worden, daß der Maschinenschalter flott durchgeschaltet wird und daß während der Einschaltzeit des Vorstufenwiderstandes das Polrad seine ursprüngliche relative Lage nicht nennenswert ändert. Daß dies letztere tatsächlich der Fall ist, soll anhand einiger Beispiele noch kurz gezeigt werden, wobei als Einschaltdauer für den Vorstufenwiderstand $^1/_{30}$ Sekunde angenommen wird, eine Zeit, die für elektrisch betätigte Schalter sehr hoch gegriffen erscheint. Soll eine auch nur nennenswerte Reduktion des ersten Spannungssprunges erfolgen, so muß, wie die durchgeführten Rechnungen zeigen, des Verhältnis $\frac{a_1}{\omega}$ mindestens 3,0 betragen. Der Vorstufenwiderstand muß also den dreifachen Wert der Kurzschlußreaktanz des Generators besitzen. Der zuletzt genannte Wert soll denn auch den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden.

Für mittlere und größere Maschinen kann der auf den Vollaststrom bezogene Streufaktor $X = 0{,}1$ angenommen werden, für $\omega = 314$ und $\frac{a_1}{\omega} = 3$ geht Gleichung (XIb) über in

$$\nu = 3{,}57 \cdot m \cdot \sqrt{\frac{kVA}{G \times D^2}}.$$

Es ergeben sich nun für verschiedene Fälle folgende Eigenschwingungszahlen:

1. Turbogenerator 1750 kVA, 3000 Umdr. p. M., 50 Perioden, Schwungmoment von Induktor und Schaufelrad zusammen $= G \times D^2 = 500\, kg \times m^2$:

$$\nu = 3{,}57 \cdot \sqrt{\frac{1750}{500}} = 7{,}0.$$

2. Turbogenerator 10000 kVA, 3000 Umdr. p. M., 50 Perioden, $G \times D^2 = 2000\, kg \times m^2$:

$$\nu = 3{,}57 \cdot \sqrt{\frac{10000}{2000}} = 8{,}0.$$

3. Turbogenerator 23000 kVA, 1500 Umdr. p. M., 50 Perioden, $G \times D^2 = 35000\, kg \times m^2$:

$$\nu = 7{,}15 \cdot \sqrt{\frac{25000}{35000}} = 5{,}7.$$

4. Wasser-Turbogenerator 11500 kVA, 500 Umdr. p. M., 50 Perioden, $G \times D^2 = 160000\, kg \times m^2$:

$$\nu = 21{,}4 \cdot \sqrt{\frac{11500}{160000}} = 5{,}75.$$

Wie man sieht, macht die Bewegung des Polrades während der Überschaltzeit von $^1/_{30}$ Sekunde bei den größeren Maschinen nur etwa 10^0 aus, und es bedürfen daher die unter Vernachlässigung der Bewegung des Polrades durchgeführten Betrachtungen keiner nennenswerten Korrektur.

Der Zwischenkreisröhrensender bei beliebiger Mischung primärer und sekundärer Gitterkopplung.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

1. **Ziel.** In früheren Arbeiten[1]) habe ich den Zwischenkreisröhrensender bei reiner primärer und bei reiner sekundärer Gitterkopplung untersucht. In der vorliegenden Arbeit will ich den Fall einer beliebigen Mischung beider Gitterkopplungen behandeln (Bild 1). Den wesentlichen Zügen nach sind wir durch Versuche von Wien und Vogel[2]) über die Eigenschaften des so gekoppelten Zwischenkreisröhrensenders unterrichtet: Die Frequenzsprünge, die bei reiner primärer Gitterkopplung in der Nähe der Resonanz auftreten, werden, wenn eine sekundäre Gitterkopplung hinzukommt, aus der Resonanzlage verschoben. Je nach Anschluß der Klemmen der sekundären Gitterspule kann die Verschiebung nach höheren oder nach niedrigeren Frequenzen hin erfolgen.

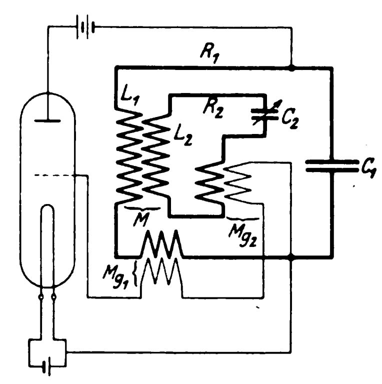


Bild 1. Untersuchte Schaltung.

Unsere Aufgabe wird es nun sein, im folgenden dieses Ergebnis vom Standpunkte der Theorie aus herzuleiten und es durch quantitative Angaben zu ergänzen. Es wird sich zeigen, daß durch Wien und Vogel zwar ein wesentlicher Teil aber doch nicht alle Eigenschaften aufgedeckt wurden. Diese Lücke wird durch die vorliegende Arbeit ausgefüllt. Dabei werden sich von selbst neue Gesichtspunkte für den Bau von Zwischenkreisröhrensendern ergeben[3]).

2. **Grundlage der Rechnung und formale Lösung.** Bei Untersuchung des Zwischenkreisröhrensenders mit reiner primärer Gitterkopplung ergab sich, daß er genau so schwingt, wie zwei sich selbst überlassene gekoppelte Schwingungskreise mit den Widerständen[4]).

$$r_1 = R_1 - \frac{S M_{g1}}{C_1} + \frac{L_1}{C_1 R_i}, \tag{1}$$

$$r_2 = R_2. \tag{2}$$

R_1 = Widerstand des primären Kreises,
R_2 = Widerstand des sekundären Kreises,
L_1 = primäre Eigeninduktivität,
C_1 = primäre Kapazität,

[1]) W. Rogowski, Archiv für Elektrotechnik X, 1921, S. 1 und 15.
[2]) Wien und Vogel, Annalen der Physik, 1920, S. 660.
[3]) Inzwischen ist mir die Arbeit von Hazeltine, Proc. Institution Radio-Eng. 1918, 6, S. 63–99 zugänglich geworden. Die Hauptunterschiede der primären und sekundären Gitterkopplung werden daselbst bereits mitgeteilt. Die Diskussion erstreckt sich im wesentlichen nur auf die Resonanzstelle. Die ausführliche Rechnung der vorliegenden Arbeit, die das Verhalten der Sender bei beliebiger Einstimmung der Schwingungskreise und Mischung der Kopplungen beschreibt, scheint mir zur Zeit eine notwendige Ergänzung zu sein.
[4]) Archiv für Elektrotechnik X, S. 11, Formel (31) und S. 4 Formel (15). Im allgemeinen kann das Glied $\frac{L_1}{C_1 R_i}$ vernachlässigt werden.

S = Steilheit der Röhre,
R_i = innerer Widerstand der Röhre,
M_{g1} = Gegeninduktivität, Gitter-Primärkreis

Setzen wir

$$\frac{r_1}{2 L_1} = h_1 = \text{primäre Dämpfung,} \tag{3}$$

$$\frac{r_2}{2 L_2} = h_2 = \text{sekundäre Dämpfung} \tag{4}$$

so hat die langsame Koppelschwingung die folgende Dämpfung:

$$h_1 u_1 + h_2 u_2, \tag{5}$$

wobei nach früheren Rechnungen gilt[1]):

$$u_1 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right] \tag{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 - \frac{1 - \frac{2\sigma}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right] \tag{7}$$

Dabei ist

$$x = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{8}$$

die ungekoppelte sekundäre Eigenfrequenz ω_2 gemessen in Einheiten der ungekoppelten primären Eigenfrequenz ω_1. Es bedeutet σ den aus der Transformatortheorie her bekannten Streukoeffizienten:

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \tag{9}$$

(M Gegeninduktivität der beiden Schwingungskreise), der mit dem „Kopplungskoeffizienten" k in der Beziehung steht:

$$\sigma = 1 - k^2. \tag{10}$$

Für die Dämpfung der raschen Koppelschwingung ist entsprechend:

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 \tag{11}$$

zu schreiben, wo die Dämpfungsgewichte U_1 und U_2 nach meinen früheren Angaben die folgenden Werte haben:

$$U_1 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right] \tag{12}$$

$$U_2 = \frac{1}{2\sigma}\left[1 + \frac{1 - \frac{2\sigma}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]. \tag{13}$$

Fügen wir nun zu der primären Gitterkopplung noch eine sekundäre hinzu, so stellt der Ausdruck (5) nicht mehr die gesamte Dämpfung der langsamen Koppelschwingung dar. Vielmehr muß nach dem Archiv S. 15 durchgeführten Rechnungen[1]) noch eine neue Zusatzdämpfung

[1]) Formel (5), (17) und (24).

$$- h_3 u_3 \tag{14}$$

hinzugefügt werden:

$$h_3 = \frac{M_{g2}}{M}\left[1 + \frac{M D}{M_{g2}}\right]\frac{S}{2 C_1} \tag{15}$$ [1])

(D = Durchgriff der Röhre, M_{g2} = Gegeninduktivität, Gitter-Sekundärkreis),

$$u_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} - 1\right]. \tag{16}$$

Die gesamte Dämpfung der langsamen Koppelschwingung ergibt sich daher zu:

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 - h_3 u_3. \tag{17}$$

Ganz entsprechend lautet bei der raschen Koppelschwingung der Ausdruck für die Dämpfung:

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 + h_3 U_3, \tag{18}$$

wo

$$U_3 = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}} + 1\right]. \tag{19}$$

Je nach dem Anschluß der Klemmen der sekundären Gitterspule kann M_{g2} und daher h_3 positiv oder negativ sein.

Setzen wir in den Ausdrücken (1), (3), (4), (17) und (18) M_{g1} gleich Null, so gelangen wir zu dem bereits früher behandelten Fall reiner Sekundärkopplung.

Soll eine der Koppelschwingungen angeregt werden, so muß ihre Dämpfung null oder negativ sein. Für die langsame Koppelschwingung lautet somit die Bedingung der Schwingungsanregung:

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 - h_3 u_3 \leqq 0. \tag{20}$$

Ganz entsprechend gilt für die rasche Koppelschwingung:

$$h_1 U_1 + h_2 U_2 + h_3 U_3 \leqq 0. \tag{21}$$

Bei vorgegebenen Werten der natürlichen Dämpfungen und der Gitterkopplungen legen die Forderungen (20) und (21) gewisse Werte von $x = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ fest. Diese sind es, bei denen die Schwingungen des Senders einsetzen bzw. abreißen können. Ihre Berechnung ist daher unsere nächste Aufgabe.

Wir setzen:

$$\frac{h_1}{h_2} = - p, \tag{22}$$

$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{q}{1-\sigma}. \tag{23}$$

Bevorzugen wir die langsame Koppelschwingung durch passenden Anschluß der Klemmen der sekundären Gitterspule, so ist q positiv; bevorzugen wir die rasche Koppelschwingung, so kommen für q negative Werte in Betracht. Wir wenden uns nun der bevorzugten Anregung der langsamen Koppelschwingung zu und schreiben (20)

$$p u_1 = u_2 - \frac{q}{1-\sigma} \cdot u_3. \tag{24}$$

Diese Gleichung geht nach Einsetzen der Werte (6), (7), (16) in die folgende über:

[1]) Im allgemeinen ist das Glied $\frac{M D}{M_{g2}}$ zu vernachlässigen.

$$\left.\begin{aligned} p\left[1-\frac{1-\frac{2\sigma x^2}{1+x^2}}{W}\right] &= 1-\frac{1-\frac{2\sigma}{1+x^2}}{W}-q\left[\frac{1}{W}-1\right] \\ W &= \sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Aus (25) ergibt sich:

$$W = \frac{2\sigma[1-p x^2]}{[p-1-q][1+x^2]}+1. \tag{26}$$

Wir quadrieren, setzen zur Abkürzung

$$p-1-q=a \tag{27}$$

und erhalten:

$$-x^2 a^2 = \sigma[1-p x^2]^2 + a[1-p x^2][1+x^2]$$

oder

$$x^4[\sigma p^2 - a p] + x^2[a^2 - 2p\sigma + a(1-p)] + \sigma + a = 0 \tag{28}$$

oder:

$$x^4 - x^2\frac{aq+2p\sigma}{p[\sigma p-a]} + \frac{\sigma+a}{p[\sigma p-a]} = 0.$$

Dieser Gleichung genügt der folgende Ausdruck [1]):

$$x^2 = \frac{2p\sigma + a\left[q \pm \sqrt{q^2+4p(1-\sigma)}\right]}{2p[\sigma p-a]}. \tag{29}$$

Das Einsetzen oder Erlöschen der langsamen Koppelschwingung erfolgt somit an der Stelle

$$x = \sqrt{\frac{2p\sigma + a\left[q \pm \sqrt{q^2+4p(1-\sigma)}\right]}{2p[\sigma p-a]}}. \tag{30}$$

Wenn wir die gleiche Rechnung für die bevorzugte Anregung der raschen Koppelschwingung durchführen, treten an Stelle der Gewichte u die Gewichte U. Letztere gehen aus den ersteren dadurch hervor, daß wir $+\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}$ durch $-\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}$ ersetzen. Wir müssen daher auch für sie zu den Gleichungen

[1]) Von der Richtigkeit dieser Lösung überzeugt man sich leicht, wenn man

$$2p\sigma + qa = b$$
$$p(\sigma p - a) = c$$

setzt und

$$x^2 = \frac{b \pm a\sqrt{q^2+4p(1+\sigma)}}{2c}$$

schreibt.

Es ist dann:

$$x^4 = \frac{b^2 \pm 2ab\sqrt{q^2+4p(1+\sigma)} + a^2[q^2+4p(1+\sigma)]}{4c^2}$$

$$-x^2\frac{(2p\sigma+aq)}{p(\sigma p-a)} = -\frac{2b^2 \pm 2ab\sqrt{q^2+4p(1-\sigma)}}{4c^2},$$

$$x^4 - x^2\cdot\frac{(2p\sigma+aq)}{p(\sigma p-a)} = \frac{-b^2+a^2[q^2+4p(1-\sigma)]}{4c^2},$$

$$= p[-p\sigma^2 + a^2 - a\sigma(p-1)].$$

Nun ist:

$$\frac{\sigma+a}{c} = \frac{(\sigma+a)(\sigma p-a)}{c^2} = p[\sigma^2 p - a^2 + a\sigma[p-1]].$$

Somit ist die Forderung (28) erfüllt.

(25)—(29) gelangen. Denn die Änderung des Wurzelvorzeichens ist ohne Einfluß, da wir in (26) beide Seiten der Gleichung quadrierten. Gleichzeitig müssen wir der Größe q die Beschränkung auferlegen, daß sie nur negative Werte annehmen soll. Am besten bringen wir dies durch den Ansatz zum Ausdruck $q = -Q$, unter Q wieder eine positive Größe verstanden.

Bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung liegen somit diejenigen Stellen, an denen die Schwingungen einsetzen oder erlöschen, bei:

$$x = \sqrt{\frac{2p\sigma + a'[-Q \pm \sqrt{Q^2 + 4p(1-\sigma)}]}{2p[\sigma p - a']}} \qquad (31)$$

($a' = p - 1 + Q$ vgl. Formel (27)).

In manchen Fällen wird es bequemer sein, nicht x (die ungekoppelte sekundäre Eigenfrequenz, gemessen in Einheiten der primären), sondern die sekundäre Kapazität C_2 in die Formeln einzuführen.

Bei Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung entstehen oder erlöschen die Schwingungen bei der sekundären Kapazität:

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{2p(\sigma p - a)}{2p\sigma + a[q \pm \sqrt{q^2 + 4p(1-\sigma)}]}. \qquad (33)$$

Bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung geschieht dies bei der Kapazität:

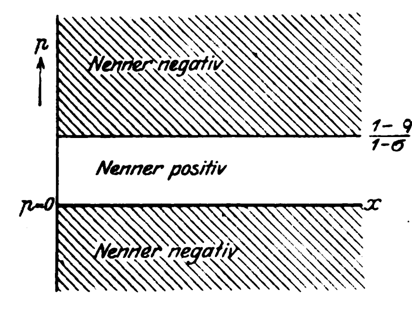


Bild 2. Vorzeichen des Nenners.

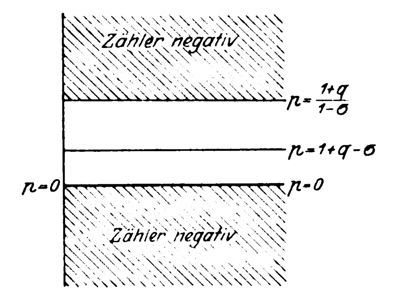


Bild 3. Vorzeichen des Zählers. Negativer Wurzelwert. Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung.

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{2p(\sigma p - a')}{2p\sigma + a'[-Q \pm \sqrt{Q^2 + 4p(1-\sigma)}]}. \qquad (34)$$

3. Diskussion der gefundenen Lösung. Mit den Ausdrücken (30)—(34) ist unsere Aufgabe formal gelöst. Den richtigen Einblick in das Verhalten eines Zwischenkreisröhrensenders mit beliebiger Mischung primärer und sekundärer Gitterkopplung gewinnen wir aber erst, wenn wir diese Ausdrücke diskutieren.

a) Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung.

Wir knüpfen dabei an Ausdruck (29) an und schreiben ihn:

$$x^2 = \frac{2p\sigma + [p - 1 - q][q \pm \sqrt{q^2 + 4p(1-\sigma)}]}{2p[1 + q - p(1-\sigma)]} \qquad (35)$$

q positiv (vgl. auch Formel (3) u. (4), (22) u. (23).

Zunächst müssen wir fragen, wann ist der Wert von x^2 positiv; denn negative Werte kommen für ihn aus physikalischen Gründen nicht in Betracht. Diese Frage zerlegen wir in zwei Unterfragen, indem wir diejenigen Gebiete festlegen, in denen der Nenner oder der Zähler positiv oder negativ ist. Offenbar liegen die Nullstellen des Nenners bei



$$p = 0 \tag{36}$$

und

$$p = \frac{1 + q}{1 - \sigma}. \tag{37}$$

An diesen Stellen muß somit für den Nenner ein Gebiet positiven und ein Gebiet negativen Wertes aneinanderstoßen.

Übersteigt p den Wert $\frac{1+q}{1-\sigma}$, so ist der Nenner negativ. Das gleiche ist der Fall, wenn p unter Null heruntersinkt.

Das Vorzeichen des Nenners gibt somit Bild 2 wieder.

Genau dieselbe Betrachtung führen wir am Zähler durch. Wählen wir in (35) den positiven Wurzelwert, so geht der Zähler durch Null hindurch für:

$$1 + q - \sigma. \tag{38}$$

Wählen wir den negativen Wurzelwert, so tut er dies für

$$p = 0 \tag{39}$$

und

$$p = \frac{1 + q}{1 - \sigma}. \tag{40}$$

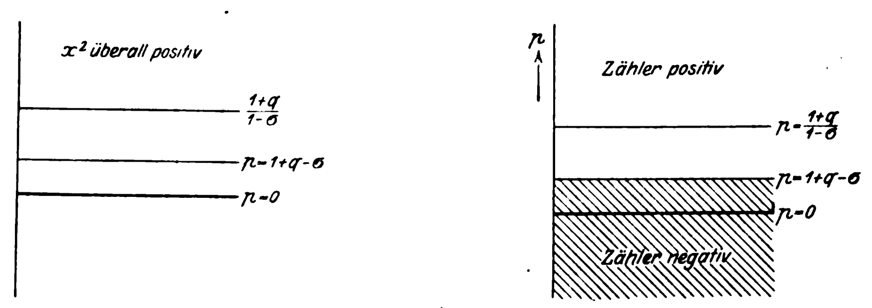


Bild 4. Vorzeichen von x^2; Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung; negativer Wurzelwert.

Bild 5. Zählervorzeichen; positiver Wurzelwert. Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung.

Von der Richtigkeit dieser Aussagen überzeugt man sich am besten durch Einsetzen der Werte.

Bei negativem Wurzelwert wird der Zähler für sehr große Werte von p angenähert gleich $-2p\sqrt{p(1-\sigma)}$. Der Zähler ist daselbst somit negativ. Dann folgt für negativen Wurzelwert die Vorzeichenverteilung nach Bild 3. Das Vorzeichen des Wertes von x^2 geht für diesen Fall aus Bild 4 hervor. Es ist überall für positive und negative Werte von p positiv.

Wie verhält sich der Wert von x^2 bei positivem Wurzelwert? Für sehr große Werte von p ist der Zähler positiv. Das Zählervorzeichen muß sich daher für positiven Wurzelwert nach Bild 5 einstellen. Der Ausdruck für x^2 kann daher nur in den Streifen zwischen $p = \frac{1+q}{1-\sigma}$ und $p = 1 + q - \sigma$ und für negative p positiv sein. Bei positivem Wurzelvorzeichen liegen also nur dort für uns gültige Werte von x^2. Offenbar haben wir es bei dem Ausdruck (35) für x^2 mit zwei Kurvenzügen zu tun. Von diesem verläuft der eine in dem zum positiven Wurzelwert gehörigen Streifen zwischen $p = \frac{1+q}{1-\sigma}$ und $p = 1 + q - \sigma$. Er gilt für die rasche Koppelschwingung. Der andere zieht sich durch das Gebiet positiver und negativer Werte p. Er gilt für die langsame Koppelschwingung und wird gebildet sowohl vom negativen wie positiven Wurzelwert. Dieser Kurvenzug kann unter den Wert $p = -\frac{q^2}{4(1-\sigma)}$ nicht

heruntersinken, da sonst der Wurzelwert imaginär werden würde. An dieser Grenzlinie, an der somit die Wurzel verschwindet, stoßen die zum positiven und negativen Wurzelwert gehörigen Kurvenäste aneinander. Bei reiner primärer Kopplung ist $q = 0$. Wir kommen für die rasche Koppelschwingung dann zu einem Streifen zwischen $p = \frac{1}{1-\sigma}$ und $p = 1 - \sigma$, in dem Werte von x^2 zu suchen sind. Wächst nun die sekundäre Gitterkopplung und mit ihr q, so schiebt sich dieser Streifen in die Höhe. Dabei nimmt seine Breite, die durch den Ausdruck

$$\frac{1+q}{1-\sigma} - (1 + q - \sigma) = \frac{\sigma}{1-\sigma}[2 + q - \sigma] \tag{41}$$

gegeben ist, zu.

Wir wollen nun noch einige besondere Einzel- und Näherungswerte für x^2 und für die ihr reziproke Kapazität [vgl. (33) und (34)] angeben, die uns den Einblick in ihre Abhängigkeit von p erleichtern sollen.

Wir setzen zunächst positives Wurzelvorzeichen voraus. Ist $p = 1 + q - \sigma$ so ist nach dem früheren $x = 0$. Für den Wert $p = \frac{1+q}{1-\sigma}$ wird x^2 unendlich groß. Ferner sind für $p = 1 + q$ der Wert von $x^2 = \frac{1}{1+q}$. Hiermit haben wir bereits genügend Anhalt, um den Verlauf von x^2 in dem Streifen zu zeichnen.

Entwickeln wir weiter den Wert für x^2 für das untere Gebiet dieses Streifens, indem wir

$$p = 1 + q - \sigma + z$$

setzen, unter z eine kleine Größe verstanden, so erhalten wir:

$$x^2 = z \cdot \frac{\left[1 + q - \frac{\sigma(1-\sigma)}{q + 2 - 2\sigma}\right]}{\sigma[1 + q - \sigma]\,[2 + q - \sigma]}. \tag{42}$$

Bild 6. Vorzeichen von x^2; positiver Wurzelwert. Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung

Verfahren wir ähnlich für das obere Gebiet des Streifens, indem wir

$$p = \frac{1+q}{1-\sigma} - z$$

einführen, (z wieder klein) so ergibt sich:

$$x^2 = \sigma \frac{(2+q)}{z(1-\sigma)} \cdot \left[1 - \sigma + \frac{\sigma}{q+2}\right]. \tag{43}$$

Setzen wir schließlich, die Umgebung des Punktes $p = 1 + q$ treffend,

$$p = 1 + q + z,$$

so erhält man den Näherungswert:

$$x^2 = \frac{1}{1+q} + z \frac{2 - 2\sigma + q + \sqrt{q^2 + 4p(1-\sigma)}}{2\sigma[1 + q^2]}. \tag{44}$$

Hiermit kann der Verlauf im Streifen mit genügender Genauigkeit an Hand der gewonnenen Näherungsausdrücke leicht angezeichnet werden.

Wir haben in ähnlicher Weise das Gebiet $p = 0$ bei positivem Wurzelvorzeichen zu untersuchen.

Setzen wir

$$p = z$$
(z klein)

so ergibt sich aus (35)

$$x^2 = -\frac{q}{z} + \frac{\sigma[1+q]-1}{q}. \tag{45}$$

Tiefere Werte als $p \leqq -\frac{q^2}{4(1-\sigma)}$ kommen nicht in Betracht, weil für sie die Wurzel imaginär werden würde. Untersuchen wir die Nähe dieses Punktes, indem wir

$$p = -\frac{q^2}{4(1-\sigma)} + z$$

setzen, so erhält man:

$$x^2 = \frac{[q+2][q+2-2\sigma]}{2q\left[1+q+\frac{q^2}{4}\right]} + \sqrt{z(1-\sigma)} \cdot \frac{\left[1-\frac{4\sigma(1+q)}{(q+2)^2}\right]}{q(1-\sigma)}. \tag{46}$$

Wir wenden uns jetzt dem negativen Wurzelvorzeichen zu.

Wir fragen zunächst, wie sich der Wert von x^2 für große Werte von Werte von p ändert. Hier gilt die Näherungsformel

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{p(1-\sigma)}}. \tag{47}$$

Ist $p = \frac{1+q}{1-\sigma}$, so sinkt x^2 auf

$$x^2 = \frac{\sigma}{2+q} + \frac{1-\sigma}{1+q}. \tag{48}$$

Wird $p = 0$, so gehört hierzu der Wert:

$$x^2 = \frac{1+q-\sigma}{q(1+q)}. \tag{49}$$

Wir sehen somit, daß mit wachsendem Werte von q sich die Werte für x^2 verkleinern (Verschiebung nach niedrigeren Frequenzen).

Bei negativen Werten von p kommen für negatives Wurzelzeichen genau wie vorhin tiefere Werte als $p = -\frac{q^2}{4(1-\sigma)}$ nicht in Frage. In der Nachbarschaft gilt entsprechend zu (46) der Näherungswert:

$$x^2 = \frac{2[q+2-2\sigma]}{q} - \sqrt{z(1-\sigma)}\,\frac{\left[1-\frac{4\sigma(1+q)}{(q+2)^2}\right]}{q(1-\sigma)}. \tag{50}$$

(z klein)

Es geht somit für $z = 0$ oder $\left(p = -\frac{q^2}{4(1-\sigma)}\right)$ der Wert (46) in den von (50) über (vgl. oben). Die für positives Wurzelzeichen und $p < 0$ gehörigen Werte schließen sich somit mit den zu negativem Wurzelzeichen gehörigen Werten zu einem Kurvenzug zusammen.

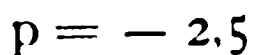
Wir unterscheiden zwei Kurvenzüge, einen für die rasche einen andern für die langsame Koppelschwingung. Beide schneiden sich im Punkte.

$$p = 1+q; \qquad x^2 = \frac{1}{1+q} \tag{51}$$

Jetzt läßt sich das Verhalten des Zwischenkreisröhrensenders, dessen sekundäre Gitterkopplung die langsame Koppelschwingung bevorzugt, leicht übersehen. Für $q = 1$; $\sigma = 0{,}9$ habe ich Bild 7 entworfen. Die primäre Gitterkopplung ist veränderlich gedacht. Wächst sie, so wächst auch p. Ziehen wir für einen bestimmten

Wert p eine Parallele zur Abszissenachse (Erregungsgerade), so kann für alle diejenigen Teile der Kurven, die unterhalb dieser Parallelen liegen, eine Erregung des Röhrensenders eintreten. Die Frequenz, mit welcher er schwingt, hängt ab von der ungekoppelten Eigenfrequenz des Sekundärkreises und der Streuung (Kopplung k^2) und ist aus Bild 6 (Archiv für Elektrotechnik IX, S. 429) abzugreifen oder nach den daselbst abgeleiteten Formeln zu berechnen. Für alle Punkte der Kurven, die oberhalb der Erregungsgeraden liegen, kommen keine Schwingungen zustande.

Die resultierende primäre Dämpfung sei sehr groß. Für die Ordinate p kommen dann große negative Werte in Betracht. In diesem Falle braucht der Röhrensender trotz der sekundären Gitterkopplung nicht anzusprechen. Er tut dies erstmalig, wenn in unserm Beispiel ($q = 1$; $\sigma = 0{,}9$)



$$p = -2{,}5$$

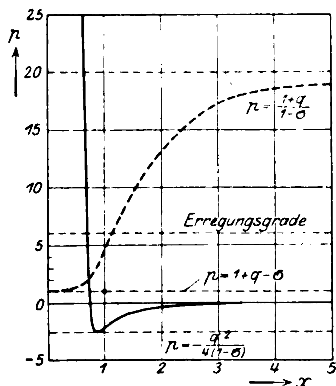


Bild 7. Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung.
——— gültig für langsame } Koppel-
– – – „ „ rasche } schwingung.
Für alle Kurvenabschnitte, die unterhalb der Erregungsgeraden liegen, tritt Anschwingen des Senders ein. $q = 1$; $\sigma = 0{,}9$.

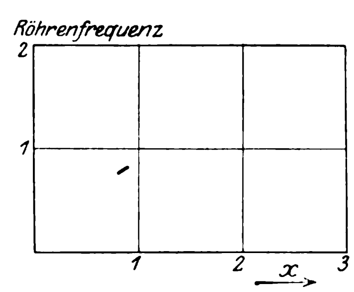


Bild 8. Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung. Sehr lose primäre Gitterkopplung. Die langsame Koppelschwingung erregt sich grade. Die rasche wird nicht erregt.

ist, also wenn der Primärkreis immer noch eine positive Dämpfung hat (Bild 8). Dabei ergibt sich die zugehörige ungekoppelte sekundäre Eigenfrequenz zu $x = 0{,}84$. Die erste Erregung findet somit etwas unterhalb der Resonanz statt.

Wird nun die primäre Gitterkopplung verstärkt, so verschiebt sich die Parallele (Bild 7) nach oben, und es verbreitert sich der Frequenzbereich, in den der Sender anspricht (Bild 9). Ist die resultierende Dämpfung primär gleich Null geworden ($p = 0$), so reicht der Frequenzbereich von $x = \infty$ bis $x = \sqrt{\frac{\sigma}{1+q} + \frac{1+\sigma}{q}} = \sqrt{\frac{0{,}9 + 0{,}1}{2}} = 0{,}7$ (Bild 10). Bisher wird immer nur die langsame Koppelschwingung angeregt. Dies trifft auch noch zu, wenn p über Null herausreicht und die resultierende Dämpfung primär negativ ausfällt. Erst wenn $p = 1 + q - \sigma = 1{,}1$ geworden ist, tritt für ganz kleine Werte von x (sehr große sekundäre Kapazitäten) die rasche Koppelschwingung hinzu. Zwischen Abreißen der langsamen Koppelschwingung und Einsetzen der raschen legt sich eine Tonlücke (Bild 11). Wächst die primäre Gitterkopplung weiter, so schrumpft diese Tonlücke immer mehr zusammen und für $p = 1 + q = 2$ findet eine lückenlose Erregung mit einem Frequenzsprung (Bild 12) an der Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ statt. Wächst die primäre Gitterkopplung noch weiter, so bildet sich jetzt

die Ziehschleife aus, die den Punkt $x = \frac{1}{\sqrt{1+q}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $p = 1 + q = 2$ unsymmetrisch umspannt (Bild 13 und 14) und für $p = \frac{1+q}{1-\sigma} = 20$ ausartet (Bild 15).

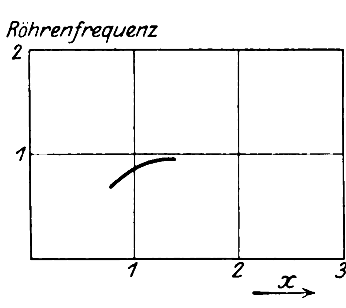


Bild 9. Wie in Bild 8. Lose primäre Gitterkopplung. Es wird nur die langsame Koppelschwingung in Resonanznähe erregt.

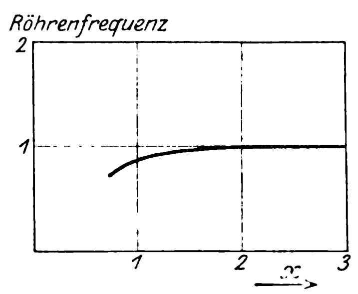


Bild 10. Wie in Bild 9, nur etwas festere primäre Gitterkopplung. Es wird nur die langsame Koppelschwingung erregt, die unterhalb der Resonanz abreißt.

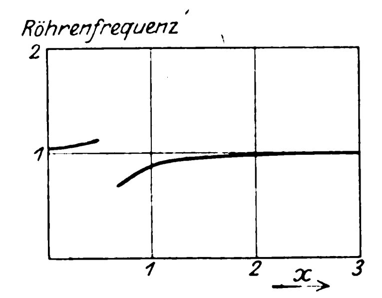


Bild 11. Wie in Bild 10. Die primäre Gitterkopplung ist noch weiter gewachsen. Erregung der langsamen Koppelschwingung wie in Bild 10. Unterhalb der Resonanz setzt jetzt auch die rasche Koppelschwingung ein. Zwischen Abreißen der langsamen, Einsetzen der raschen Koppelschwingung liegt eine Frequenzpause.

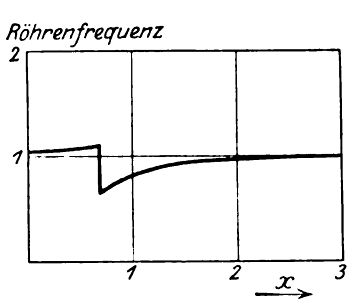


Bild 12. Noch festere Kopplung wie in Bild 11. Die Frequenzpause verschwindet. Frequenzsprung unterhalb der Resonanz.

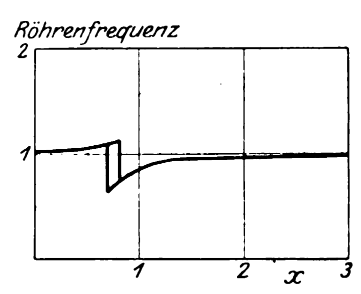


Bild 13. Festere Kopplung wie in Bild 12. Die Ziehschleife bildet sich aus und liegt unterhalb der Resonanz.

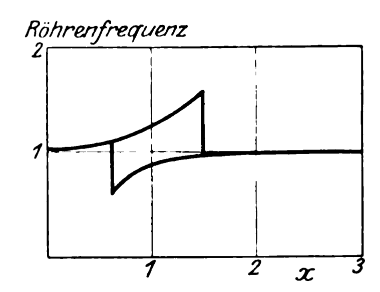


Bild 14. Festere Kopplung wie Bild 13. Die Ziehschleife verbreitert sich und umfaßt die Resonanzstelle.

Die bei $p = 1 + q$; $x = \frac{1}{\sqrt{1+q}}$ gelegene „Mitte" der Ziehschleife verschiebt sich mit wachsendem Werte q, also mit wachsender sekundärer Gitterkopplung nach kleineren Werten von x. Sie wandert also aus der Resonanzstelle heraus nach niedrigeren Frequenzen hin, genau wie dies auch Wien und Vogel gefunden haben.

In Bild 16 finden wir die Kurvenzüge für $q = 10$; $\sigma = 0$. Dieser Fall unterscheidet sich von dem vorigen im wesentlichen dadurch, daß die beiden Schwingungskreise ideal festgekoppelt werden. Die Schwingung kann bereits bei starken primären Dämpfungen einsetzen. Auch hier erfolgt sie anfangs unterhalb der Resonanz.

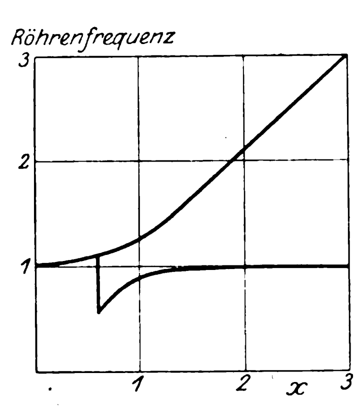


Bild 15. Sehr feste primäre Gitterkopplung. Die Ziehschleife artet aus.

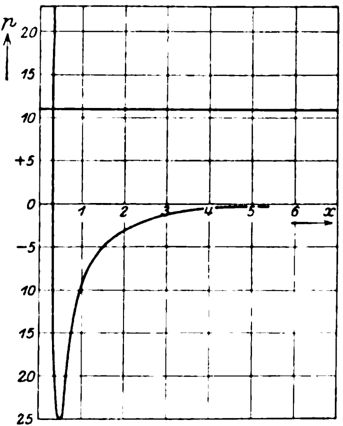


Bild 16. Kurven für $q = 10$; $\sigma = 0$.

Der Frequenzstreifen für die rasche Koppelschwingung schrumpft zu einer Linie zusammen. Wächst p über 11 heraus, so kann infolgedessen mit einem Mal die rasche Koppelschwingung bei jeder beliebigen Stellung des sekundären Kondensators angeregt werden.

Die „Mitte" der Ziehschleife wird noch mehr als bei Bild 7 niedrigen Frequenzen und höheren Werten p verschoben.

Nachdem wir Aussetzer- und Sprungstellen der Frequenz durch x, also die

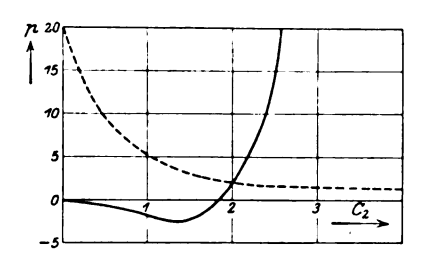


Bild 17. Festlegung der Ein- und Aussetzerstellen durch die sekundäre Kapazität. $q = 1$; $\sigma = 0.9$.

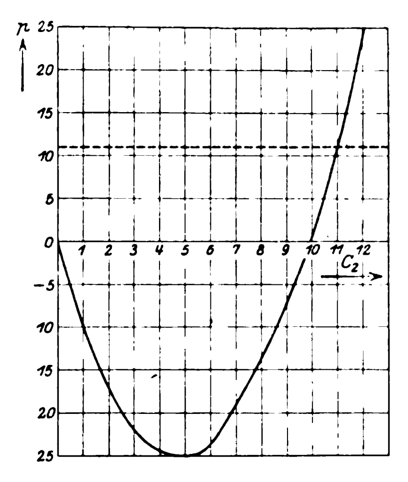


Bild 18. Wie in Bild 17, jedoch $q = 10$; $\sigma = 0$.

ungekoppelte sekundäre Eigenfrequenz festgelegt haben, wollen wir sie nun noch durch die sekundäre Kapazität C_2 bestimmen. Letztere ist im allgemeinen ohne weiteres an der Einstellung des sekundären Kondensators abzulesen und dürfte daher bei einer experimentellen Kontrolle am leichtesten verglichen werden können. Infolge der Beziehung:

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2 x^2} \tag{52}$$

sind die für uns wichtigen C_2-Werte ohne weiteres aus den Formeln für **x** abzuschreiben. Aus Bild 17 und 18 sind die näheren Einzelheiten ohne weiteres abzulesen. Wir lassen gleich die folgende Zusammenstellung folgen:

Zusammenstellung.

Einzel- und Näherungswerte.

Bevorzugung der langsamen Koppelschwingung (q positiv).

I. Kurvenzug für die langsame Koppelschwingung.

p sehr groß.

$p > \frac{q^2}{4(1-\sigma)}$;

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{p(1-\sigma)}}, \tag{53}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \sqrt{p(1-\sigma)}, \tag{54}$$

$p = \frac{1+q}{1-\sigma}$;

$$x = \sqrt{\frac{1-\sigma}{1+q} + \frac{\sigma}{2+q}}, \tag{55}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1+q)(2+q)}{(2+q-\sigma)}, \tag{56}$$

$p = 1 + q$;

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+q}}, \tag{57}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot (1+q), \tag{58}$$

$p = 1 + q - \sigma$;

$$x = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)+q}{(1+q-\sigma)(2+q-\sigma)}}, \tag{59}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1+q-\sigma)(2+q-\sigma)}{[2(1-\sigma)+q]}, \tag{60}$$

$p = 0$;

$$x_1 = \sqrt{\frac{1+q-\sigma}{q(1+q)}}; \qquad x_2 = \infty, \tag{61}$$

$$C_2' = \frac{L_1 C_1}{L_2} \frac{q(1+q)}{(1+q-\sigma)}; \qquad C_2'' = 0, \tag{62}$$

$p = -z$;

z klein.

$$x_1 = \sqrt{\frac{1+q-\sigma}{q(1+q)} + z\frac{(1-\sigma)\sigma}{q(1+q)^2}}, \tag{63}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{q}{z} + \frac{\sigma(1+q)-1}{q}}, \tag{64}$$

$$C_2' = \frac{L_1 C_1}{L_2} \frac{q(1+q)^2}{(1+q)(1+q-\sigma)+z(1-\sigma)\sigma}, \tag{65}$$

$$C_2'' = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{zq}{q^2 + z[\sigma(1+q)-1]}, \tag{66}$$

$p = -\frac{q^2}{4(1-\sigma)}$;

$$x = \sqrt{\frac{2[q+2-2\sigma]}{q(q+2)}}, \tag{67}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{q(q+2)}{2[q+2-2\sigma]}. \tag{68}$$

p groß.

$$x = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p(1-\sigma)}}\left[1 + \frac{8\sigma[1+q]+q^2}{8p(1-\sigma)} - \frac{2\sigma\left[1+\frac{1+q}{p(1-\sigma)}\right] + q\left[1+\frac{\sigma(1+q)}{p(1-\sigma)}\right]}{2p(1-\sigma)}\right]}; \tag{69}$$

$p = 1 + q - \sigma + z$;
z klein;

$$x = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)+q}{[1+q-\sigma][2+q-\sigma]} - z\,\frac{[1-\sigma]\left[\frac{1}{1+q-\sigma}+\frac{1}{2+q-\sigma}+\frac{1}{q+2-2\sigma}\right]}{[1+q-\sigma][2+q-\sigma]}}; \tag{70}$$

$p = 1 + q + z$;
z klein;

$$x = \sqrt{\frac{1}{1+q} + z\,\frac{2(1-\sigma)+q-\sqrt{q^2+4(1-\sigma)(1+q)}}{2\sigma[1+q]^2}}; \tag{71}$$

$p = -\frac{q^2}{4(1-\sigma)} + z$;
z klein;

$$x = \sqrt{\frac{2[q+2-2\sigma]}{q[q+2]} \pm 4\sqrt{z(1-\sigma)} \cdot \frac{[(q+2)^2 - 4\sigma(1+q)]}{q^2(q+2)^2}}. \tag{72}$$

II. Kurvenzug für die rasche Koppelschwingung.

$p = 1 + q - \sigma$; $\quad x = 0$; $C_2 = \infty$; (73)

$p = 1 + q$; $\quad x = \frac{1}{\sqrt{1+q}}$; (74)

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}(1+q); \tag{75}$$

$p = \frac{1+q}{1-\sigma}$; $\quad x = \infty$; $C_2 = 0$; (76)

$p = \frac{1+q}{1-\sigma} - z$; $\quad x = \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}\,\frac{(q+2)}{z} - \left[(1-\sigma) + \frac{\sigma}{q+2}\right]}$; (77)

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{z(1-\sigma)}{\sigma[q+2] - (1-\sigma)z\left[1-\sigma+\frac{\sigma}{q+2}\right]}; \tag{78}$$

$p = 1 + q - \sigma + z$; $\quad x = \sqrt{z\,\frac{\left[1+q-\frac{\sigma(1-\sigma)}{q+2-2\sigma}\right]}{\sigma[1+q-\sigma][2+q-\sigma]}}$; (79)

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{\sigma[1+q-\sigma][2+q-\sigma]}{z\left[1+q-\frac{\sigma(1-\sigma)}{q+2-2\sigma}\right]}; \tag{80}$$

$p = 1 + q + z$; $\quad x = \sqrt{\frac{1}{1+q} + z\,\frac{2(1-\sigma)+q+\sqrt{q^2+4(1-\sigma)(1+q)}}{2\sigma[1+q]^2}}$. (81)

b) Bevorzugung der raschen Koppelschwingung.

In diesem Fall ist q negativ, weshalb wir bequemer

$$-q = +Q$$

setzen, unter Q eine positive Größe verstanden:

$$x^2 = \frac{2p\sigma + [p - 1 + Q][-Q \pm \sqrt{Q^2 + 4p(1-\sigma)}]}{2p[1 - Q - p(1-\sigma)]}. \tag{83}$$

Der Nenner wechselt, den früheren Ergebnissen entsprechend, sein Vorzeichen für $p = 0$ und $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ und ist nur in dem Streifen zwischen $p = 0$ und $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ positiv (Bild 2).

Die Feststellung des Zählervorzeichens gestaltet sich etwas schwieriger. Wir wollen drei Fälle unterscheiden:

1. Q sei sehr klein und nicht größer als $2(1-\sigma)$,
2. Q sei wenigstens gleich oder größer als 2,
3. Q liege zwischen den Fällen (1) und (2) in Zeichen:

$$2(1-\sigma) \leq Q \leq 2.$$

Die Nullstellen des Zählers können, wenn wir unsere Rechnungen S. 214 heranziehen, bei $p = 0$; $p = 1 - Q - \sigma$ und $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ liegen.

Damit der Zähler für $p = 0$ verschwindet, müssen wir der Wurzel in (69) das positive Vorzeichen geben.

Für $p = 1 - Q - \sigma$ nimmt die Wurzel den Wert

$$\sqrt{(Q - 2 + 2\sigma)^2} \tag{84}$$

an. Ist nun dem Fall (1) entsprechend $Q < 2(1-\sigma)$, so muß der Wert der Wurzel selber

$$2(1-\sigma) - Q \tag{85}$$

geschrieben werden. Alsdann kann, wie man leicht nachweist, der Zähler bei $p = 1 - Q - \sigma$ nur für positives Wurzelvorzeichen verschwinden.

Wächst Q über den Wert $2(1-\sigma)$ hinaus, so ist der Wert der Wurzel (70)

$$Q - 2(1-\sigma). \tag{86}$$

Jetzt kann der Zähler für $p = 1 - Q - \sigma$ nur bei negativem Wurzelzeichen Null werden.

An der Stelle $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ hat die Wurzel in (69) den Wert:

$$\sqrt{(2-Q)^2}. \tag{87}$$

Ist Q nun kleiner als 2, so ist das Ergebnis des Wurzelzeichens

$$2 - Q.$$

In diesem Falle kann bei $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ der Zähler nur bei negativem Wurzelvorzeichen verschwinden.

Ist andererseits Q über 2 hinausgewachsen, so haben wir für die Wurzel (71) zu schreiben:

$$Q - 2.$$

Jetzt kann bei $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ der Zähler nur bei positiven Wurzelvorzeichen verschwinden

Wir stellen unser Ergebnis zusammen:

		Der Zähler verschwindet bei positivem Wurzelvorzeichen für	bei negativem Wurzelvorzeichen für
1.	$0 \leq Q \leq 2(1-\sigma)$;	$p = 0$; $p = 1 - Q - \sigma$;	$p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$;
2.	$2(1-\sigma) \leq Q \leq 2$;	$p = 0$;	$p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$; $p = 1 - Q - \sigma$;
3.	$2 \leq Q \leq \infty$;	$p = 0$; $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$;	$p = 1 - Q - \sigma$.

Hält man im Auge, daß der Zähler für große Werte von p bei positivem Wurzelzeichen positiv, bei negativem Wurzelvorzeichen negativ ist, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Vorzeichenverteilung des Zählers in Bild 19 bis 24. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens des Nenners (Bild 2) ergibt sich dann das Vorzeichen von x für die verschiedenen Fälle aus Bild 25 bis 30.

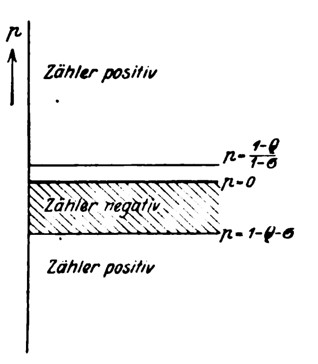


Bild 19. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Vorzeichen des Zählers. $0 \leqq Q \leqq 2(1-\sigma)$ Positiver Wurzelwert.

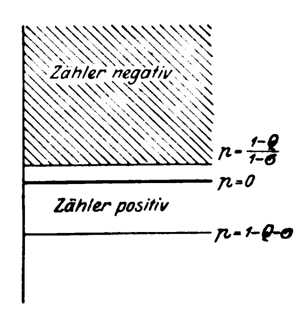


Bild 20. Wie in 19; jedoch negativer Wurzelwert.

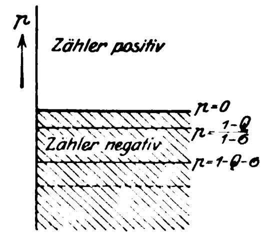
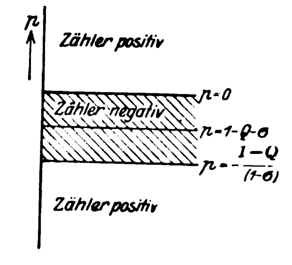


Bild 21. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Vorzeichen des Zählers. $2(1-\sigma) \leqq Q \leqq 2$. Positiver Wurzelwert

Bild 22. Wie in 21, jedoch negativer Wurzelwert.



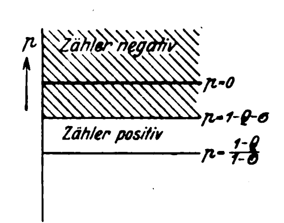


Bild 23. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Vorzeichen des Zählers. $2 \leqq Q < \infty$. Positiver Wurzelwert.

Bild 24. Wie in 23; jedoch negativer Wurzelwert.

Offenbar haben wir es auch bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung mit zwei Kurvenzügen zu tun. Der eine verläuft im Gebiete positiver Werte p. Er gilt für die langsame Koppelschwingung. Der andere ist, wenn $Q \leqq 2(1-\sigma)$ oder $Q \geqq 2$ in dem Streifen zwischen $p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ und $p = 1 - Q - \sigma$ eingeklemmt. Er gilt dem früheren (S. 215) entprechend für die rasche Koppelschwingung. Liegt Q zwischen den Werten $2(1-\sigma)$ und 2, so scheint nach den Bildern 27 und 28 dieser Streifen auszuarten. Hier verschaffen wir uns tiefere Einsicht, wenn wir noch den Wert

$$p = -\frac{Q^2}{4(1-\sigma)} \tag{88}$$

heranziehen, den p nicht unterschreiten darf, soll die Wurzel in (69) nicht imaginär werden (gestrichelte Parallele in Bild 27 und 28).

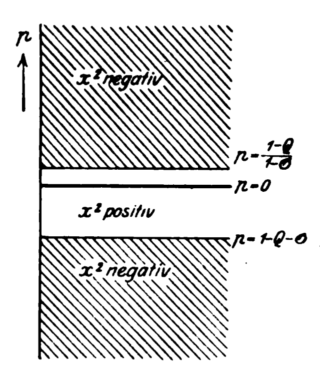


Bild 25. Vorzeichen von x^2; im übrigen wie in Bild 19.

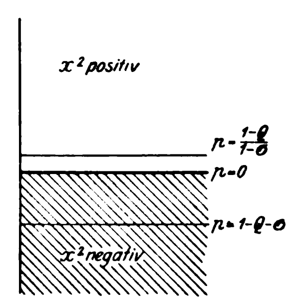


Bild 26. Vorzeichen von x^2; im übrigen wie in Bild 20.

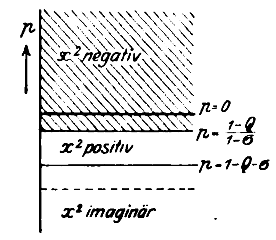


Bild 27. Vorzeichen von x^2; im übrigen wie in Bild 21.

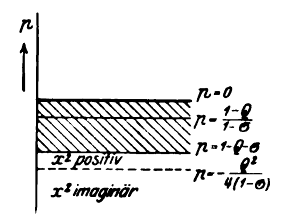


Bild 28. Vorzeichen von x^2; im übrigen wie in Bild 22.

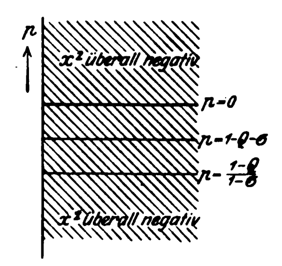


Bild 29. Vorzeichen von x^2; im übrigen wie in Bild 23.

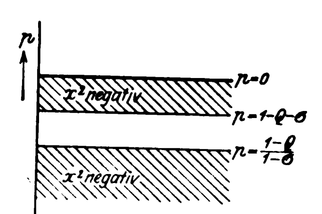


Bild 30. Vorzeichen von x^2; im übrigen wie in Bild 24.

Wird $Q = 2(1-\sigma)$ und demzufolge $1 - Q - \sigma = -(1-\sigma)$ so wird auch $-\frac{Q^2}{4(1-\sigma)} = -(1-\sigma)$; wächst Q über $2(1-\sigma)$ heraus, so liegt der Wert von $-\frac{Q}{4(1-\sigma)}$ tiefer als der von $1 - Q - \sigma$. In diesem Falle wird somit der Streifen für die rasche Koppelschwingung durch

$$p_1 = \frac{1-Q}{1-\sigma} \qquad \text{und} \qquad p_3 = -\frac{Q^2}{4(1-\sigma)} \tag{89}$$

abgegrenzt. Diese Grenzen gelten so lange $Q \leqq 2 - \sigma$. Steigt Q über diesen Wert hinaus, so liegen die Grenzen des Streifens bei

$$p = 1 - Q - \sigma \quad \text{und bei} \quad p = -\frac{Q^2}{4(1-\sigma)}. \tag{90}$$

Hat Q den Wert 2 erreicht, so ist $\frac{1-Q}{1-\sigma} = -\frac{1}{1-\sigma}$ und ebenso $-\frac{Q^2}{4(1-\sigma)} = -\frac{1}{1-\sigma}$. Jetzt hat der Streifen seine normalen Begrenzungen zwischen $p_1 = \frac{1-Q}{1-\sigma}$ und $p_2 = 1 - Q - \sigma$. Und diese behält er auch, wenn Q über 2 hinauswächst.

Im folgenden stelle ich wieder eine Reihe von Einzel- und Näherungswerten zusammen, die den Überblick und die Aufzeichnung von Kurven erleichtern sollen und in ihrer Gesamtheit in praktischen Fällen einen bequemen Ersatz für die genaue Formel (35) bilden:

Zusammenstellung.

Einzel- und Näherungswerte.

Bevorzugung der raschen Koppelschwingung (Q positiv).

I. Kurvenzug für die langsame Koppelschwingung.

p sehr groß.

$p \gg \frac{Q^2}{4(1-\sigma)}$;
$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{p(1-\sigma)}}; \tag{91}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \sqrt{p(1-\sigma)}; \tag{92}$$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$;
$$x = \sqrt{\frac{1-\sigma}{1-Q} + \frac{\sigma}{2-Q}}; \tag{93}$$

$(Q \leqq 1)$;
$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1-Q)(2-Q)}{(2-Q-\sigma)}; \tag{94}$$

$p = 1 - Q - \sigma$;
$$x = \sqrt{\frac{2(1-\sigma) - Q}{(1-Q-\sigma)(2-Q-\sigma)}}; \tag{95}$$

$(1 - Q - \sigma \geqq 0)$;
$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1-Q-\sigma)(2-Q-\sigma)}{[2(1-\sigma) - Q]}; \tag{96}$$

$p = 1 - Q$;
$$x = \frac{1}{\sqrt{1-Q}}; \tag{97}$$

$(Q < 1)$;
$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot (1-Q); \tag{98}$$

$p = z$;
(z klein)

$$x = \sqrt{\frac{Q}{z} - \frac{\sigma(1-Q) - 1}{Q}}; \tag{99}$$

$$Q_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{zQ}{Q^2 - z[\sigma[1-Q] - 1]} \tag{100}$$

p gross

$$p > \frac{Q^2}{4(1-\sigma)}; \quad x = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p(1-\sigma)}}\left[1 + \frac{8\sigma[1-Q]+Q^2}{8p(1-\sigma)}\right] - \frac{2\sigma\left[1 + \frac{1-Q}{(1-\sigma)p}\right]}{2p(1-\sigma)} - Q\left[1 + \frac{\sigma(1-Q)}{p(1-\sigma)}\right]}. \quad (101)$$

II. Kurvenzug für die rasche Koppelschwingung.

1. Fall $0 \leqq Q \leqq 2(1-\sigma)$

$p = 1 - Q - \sigma$;

$$x = 0. \quad (102)$$

$$C_2 = \infty \quad (103)$$

$p = 1 - Q$;

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-Q}} \quad (104)$$

$(Q < 1)$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}(1-Q) \quad (105)$$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma}$;

$$x = \infty \quad (106)$$

$$C_2 = 0 \quad (107)$$

$(Q < 1)$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma} - z$;

$$x = \sqrt{\frac{\sigma(2-Q)}{(1-\sigma)z}} - \left[1 - \sigma + \frac{\sigma}{2-Q}\right] \quad (108)$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1-\sigma)z}{\sigma[2-Q] - (1-\sigma)z\left[1 - \sigma + \frac{\sigma}{2-Q}\right]} \quad (109)$$

$(Q \geqq 1)$
z klein

$p = 1 - Q + z$;

$$x = \sqrt{\frac{1}{1-Q} + z\frac{\left[2(1-\sigma) - Q + \sqrt{Q^2 + 4p(1-\sigma)}\,1 - Q\right]}{2\sigma(1-Q)^2}} \quad (110)$$

z klein

$p = 1 - Q - \sigma + z$;

$$x = \sqrt{\frac{z\left[1 - Q - \frac{\sigma(1-\sigma)}{(2-2\sigma-Q)}\right]}{\sigma[1-Q-\sigma][2-Q-\sigma]}} \quad (111)$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{\sigma[1-Q-\sigma][2-Q-\sigma]}{z\left[1 - Q - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2-2\sigma-Q}\right]}. \quad (112)$$

2. Fall. $2(1-\sigma) \leqq Q \leqq 2$

$p = 1 - Q - \sigma$;

$$x_1 = 0 \quad (113)$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2(1-\sigma) - Q}{(1-Q-\sigma)(2-Q-\sigma)}}; \quad (114)$$

$$C_2' = \infty \quad (115)$$

$$C_2'' = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1-Q-\sigma)(2-Q-\sigma)}{[2(1-\sigma)-Q]}; \quad (116)$$

$p = -\frac{Q^2}{4(1-\sigma)}$;

$$x = \sqrt{\frac{2[Q - 2 + 2\sigma]}{Q[2-Q]}}; \quad (117)$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{Q[2-Q]}{2[Q-2+2\sigma]}; \tag{118}$$

$p = 1 - Q;$
$$x = \frac{1}{\sqrt{1-Q}}; \tag{119}$$

$(Q \leqq 1)$
$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}(1-Q); \tag{120}$$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma};$
$$x = \infty \tag{121}$$

$$C_2 = 0; \tag{122}$$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma} - z;$
$$x = \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{(2-Q)}{z} - \left[1 - \sigma + \frac{\sigma}{2-Q}\right]}; \tag{123}$$

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1-\sigma)z}{\sigma[2-Q] - z(1-\sigma)\left[1-\sigma+\frac{\sigma}{2-Q}\right]}; \tag{124}$$

$p = 1 - Q - \sigma + z;$
$$x = \sqrt{\frac{z\left[1 - Q + \frac{\sigma(1-\sigma)}{Q-2+2\sigma}\right]}{\sigma[1-Q-\sigma][2-Q-\sigma]}} \tag{125}$$

3. Fall. $2 \leqq Q < \infty$

$p = 1 - Q - \sigma;$
$$x = 0; \tag{126}$$

$$C_2 = \infty; \tag{127}$$

$p = 1 - Q - \sigma - z;$
$$x = \sqrt{\frac{z\left[1 - Q - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2-2\sigma-Q}\right]}{\sigma[1-Q-\sigma][2-Q-\sigma]}}; \tag{128}$$

z klein

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{\sigma(1-Q-\sigma)(2-Q-\sigma)}{z\left[1 - Q - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2-2\sigma-Q}\right]}; \tag{129}$$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma};$
$$x = \infty; \tag{130}$$

$$C_2 = 0; \tag{131}$$

$p = \frac{1-Q}{1-\sigma} + z;$
$$x = \sqrt{\frac{\sigma}{(1-\sigma)}\frac{(Q-2)}{z} - \left[1 - \sigma - \frac{\sigma}{Q-2}\right]}; \tag{132}$$

z klein

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} \cdot \frac{(1-\sigma)z}{\sigma[Q-2] - (1-\sigma)z\left[1 - \sigma - \frac{\sigma}{Q-2}\right]}. \tag{133}$$

Nach den mitgeteilten Näherungswerten habe ich Bild 31 die beiden Kurvenzüge für den Fall $Q = 0{,}5$; $\sigma = 0{,}9$ eingezeichnet.

Läßt man mit wachsender primärer Gitterkopplung p von negativen zu positiven Werten steigen, so liest man aus Bild 31 folgendes Verhalten des Senders ab:

Die resultierende primäre Dämpfung sei groß und positiv (p negativ). Es erfolgt überhaupt keine Schwingungserregung.

Nimmt die Dämpfung primär ab, bleibt sie aber noch positiv, so kann sich der Sender erregen. Er tut dies bei der ungekoppelten sekundären Eigenfrequenz x = 0,89 also unterhalb der Resonanz. Er schwingt mit der Frequenz der raschen Koppelschwingung, also mit einer höheren Frequenz als sie der ungekoppelten primären Eigenfrequenz entspricht. Der Frequenzbereich des Senders ist dabei sehr klein (Bild 32).

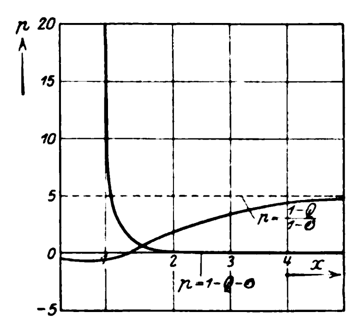


Bild 31. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Festlegung der Ein- und Aussetzerstellen. Schwingungserregung findet statt für alle Kurvenabschnitte, die unterhalb der Erregungsgraden liegen.

Bild 32. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Sehr lose primäre Kopplung. Nur die rasche Koppelschwingung wird eben erregt.

Erreicht infolge zunehmender primärer Gitterkopplung die Dämpfung primär den Wert Null, so schwingt der Sender in der raschen Koppelschwingung, von x = 0 (sekundärer Kurzschluß) bis x = 1,2 also bis über die Resonanzstelle hinaus. Oberhalb dieser Stelle findet ein Erlöschen der Senderschwingungen statt. Die langsame Koppelschwingung wird bis dahin überhaupt nicht angestossen (Bild 33).

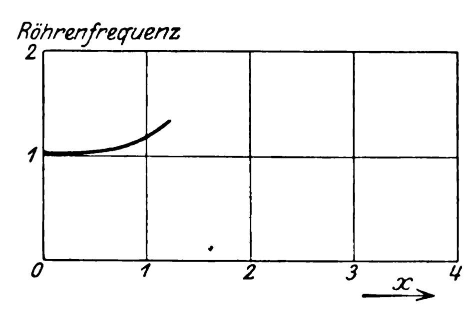


Bild 33. Wie in 32, nur festere primäre Gitterkopplung. Die rasche Koppelschwingung wird in einem gewissen Gebiet unterhalb der Resonanz erregt. Die langsame Koppelschwingung tritt noch nicht auf.

Sobald mit weiter wachsender Kopplung die resultierende Dämpfung primär negativ (p positiv) wird, erregt sich die rasche Koppelschwingung wie vorhin. Aber ihrem Erlöschen folgt nur vorübergehend eine Lücke und schließlich stellt sich mit zunehmendem Werte x die langsame Koppelschwingung ein, die bis x = ∞ bestehen bleibt (Bild 34).

Mit noch weiter gesteigerter primärer Gitterkopplung wird die Lücke kürzer, bis schließlich eine lückenlose Erregung und ein Frequenzsprung für x = 1,41 stattfindet (Bild 35).

Von nun an erfolgt mit immer weiter wachsender primärer Gitterkopplung die Ausbildung der Ziehschleife und schließlich deren Ausartung (Bild 36 und 37).

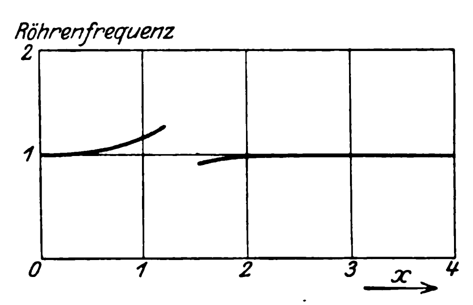


Bild 34. Wie in 33, nur festere Kopplung. Außer der raschen wird auch die langsame Koppelschwingung erregt. Zwischen beiden liegt eine Frequenzlücke.

Die „Mitte" der Ziehschleife ist diesmal, also bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung aus der Resonanzlage nach höheren Frequenzen verschoben. Dies entspricht ebenfalls ganz den Versuchen von Wien und Vogel.

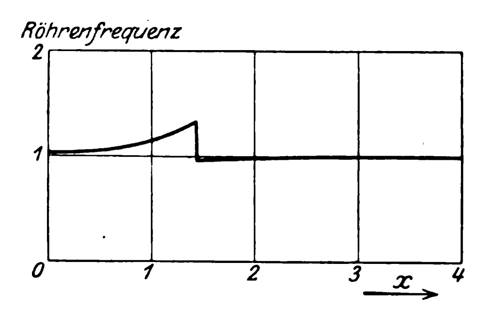


Bild 35. Wie in 34, nur festere primäre Gitterkopplung. Die Frequenzlücke ist verschwunden. Sprung oberhalb der Resonanz.

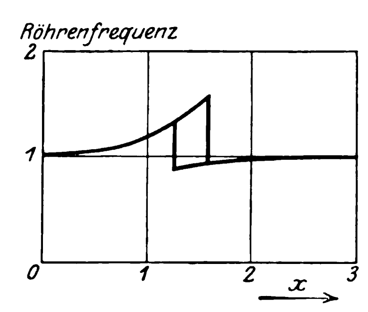


Bild 36. Wie in 35, nur festere primäre Gitterkopplung. Die Ziehschleife hat sich ausgebildet und liegt oberhalb der Resonanz.

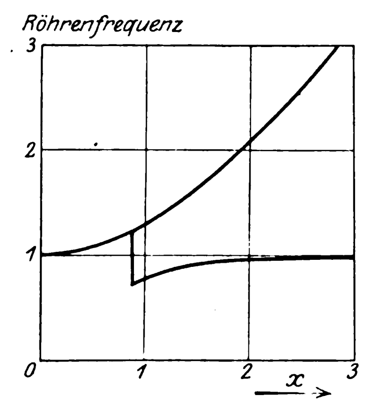


Bild 37. Sehr feste primäre Gitterkopplung. Die Ziehschleife artet aus.

Bei Bild 31 haben wir es noch mit einem reellen Schnittpunkt beider Kurvenzüge zu tun, der zahlenmäßig durch die Werte

$$p = 1 - Q; \quad x^2 = \frac{1}{1 - Q}; \quad C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}(1 - Q)$$

festgelegt ist.

Wächst Q über 1 hinaus, so gibt es keinen Schnittpunkt der Kurvenzüge mehr. Beide gehen dann aneinander vorbei. Dies zeigt Bild 38, das für $Q = 1,5$; $\sigma = 0,5$ entworfen ist.

Nun ist der Schnittpunkt beider Kurvenzüge gleichzeitig der „Mittelpunkt" der Ziehschleife. Es fließt hieraus das für den Bau von Röhrensendern wichtige Ergebnis, daß man das Ziehen auch bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung vermeiden kann.

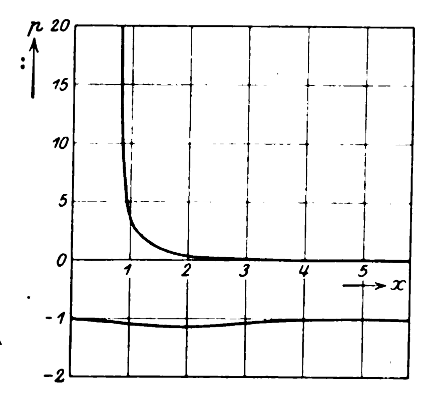


Bild 38. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Sehr feste sekundäre Gitterkopplung. Ein Ziehen kann nicht mehr eintreten. $q = 1,5$; $\sigma = 0,5$.

Es müssen hierzu nach unsern allgemeinen Betrachtungen über die beiden Kurvenzüge folgende Bedingungen erfüllt werden:

1. Die primäre Gitterkopplung darf nicht so fest gewählt werden, daß die resultierende primäre Dämpfung negativ (p positiv) wird.

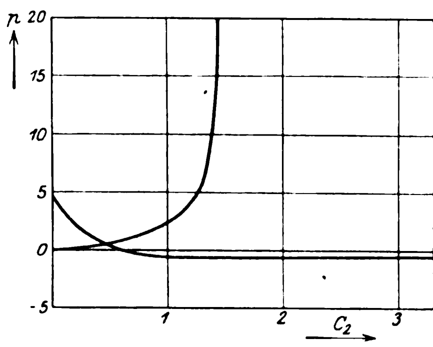


Bild 39. Bevorzugung der raschen Koppelschwingung. Ein- und Aussetzerstellen festgelegt durch die sekundäre Kapazität.

2. Die sekundäre Gitterkopplung muß einen gewissen Mindestwert überschreiten, so daß Q über 1 liegt und der für die rasche Koppelschwingung gültige Kurvenzug wie in Bild 38 ganz unter die Abszissenachse heruntersinkt.

Regeln wir die primäre Gitterkopplung an ihre obere Grenze ein, überschreiten wir bei der sekundären Gitterkopplung die untere Grenze, so erregt sich einzig und allein die rasche Koppelschwingung, und zwar tut sie das bei jeder beliebigen Einstellung des Sekundärkondensators.

Schließlich sei noch auf Bild 39 hingewiesen, bei dem wir die sekundäre Kapazität C_2, bei der Springen oder Aussetzen der Schwingungen des Senders erfolgt, aufgetragen haben. Wir hatten früher bei Bevorzugung der langsamen Koppel-

schwingung und für $p = 0$ gefunden, daß sich die Sprungstellen beim Ziehen mit wachsender primärer Gitterkopplung rascher nach kleinen als nach hohen Werten der Kapazität C_2 verschieben. Dies muß natürlich auch noch für sehr kleine Werte von Q bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung gelten und gilt aber hier nicht mehr allgemein für alle Werte Q. In Bild 39 verlegt sich beispielsweise die Sprungstelle rascher oder doch mindestens ebenso rasch nach höheren Werten der Kapazität C_2 wie nach ihren niedrigeren Werten.

Wir wenden unser Augenmerk der Breite des für die rasche Koppelschwingung gültigen Streifens zu. Im allgemeinen wird sie durch den Ausdruck gegeben:

$$1 - Q - \sigma - \frac{1 - Q}{1 - \sigma} = - \frac{\sigma}{1 - \sigma}[2 - \sigma - Q]. \qquad (134)$$

Die Gültigkeit der Formel hört auf, wenn $2(1 - \sigma) \leqq Q \leqq 2$. Gälte sie allgemein, so würde sich der Streifen für $Q = 2 - \sigma$ in eine Grade zusammenziehen. Dieser Wert fällt aber in den eben angegebenen Ausnahmebereich herein. Alsdann galt ja für die untere Grenze des Streifens der Wert

$$p = - \frac{Q}{4(1 - \sigma)}.$$

Bleiben wir zunächst bei dem Werte $Q = 2 - \sigma$; in diesem Falle ist der Streifen durch die Werte $p = -1$ und $p = -\left(1 + \frac{\sigma^2}{4(1 - \sigma)}\right)$ festgelegt. Seine Breite ist somit

$$\frac{\sigma^2}{4(1 - \sigma)}.$$

Wir berechnen die Streifenbreite noch für andere Werte von $Q = 2$ und $Q = 1$.

Setzen wir $Q = 2$, so ergibt sie sich nach (134) zu $\frac{\sigma^2}{1 - \sigma}$.

Für $Q = 1$ ist die Breite gleich σ. Beide Fälle führen somit auf einen breiteren Streifen als wir ihn für $Q = 2 - \sigma$ fanden.

Der Streifen verschwindet für $\sigma = 0$, also unerreichbar fester Kopplung der Schwingungskreise. Wenn wir ihn bei herstellbaren Kopplungen auch nicht völlig zusammenschrumpfen lassen können, so können wir ihn doch recht schmal halten. Er hat z. B. bei der Kopplung $\sigma = 0{,}46$, bei $Q = 2 - \sigma = 1{,}54$ nur eine Breite von 0,1.

Artet der Streifen in eine Linie aus, so muß die rasche Koppelschwingung bei beliebiger Einstellung des Sekundärkondensators gleichmäßig erregt werden. Unsere Formeln und Bilder, die eine gradlinige Charakteristik der Röhre und konstante Steilheit voraussetzen, sagen dann aus, daß die negative Dämpfung der raschen Doppelschwingung bei allen Stellungen des Sekundärkondensators gleich groß ist. In Wirklichkeit stellt sich natürlich nur die Dämpfung Null ein, denn die Schwingungen wachsen ja nicht mit der Zeit an, sondern bleiben konstant. Dafür stellt sich infolge der Krümmung der Charakteristik eine mittlere Steilheit her.

Ergibt sich nach unsern Formeln und Bildern die negative Dämpfung konstant, so muß in Wirklichkeit die mittlere Steilheit konstant sein. Wir können somit sagen: Artet der Frequenzstreifen in eine Linie aus, so muß bei beliebigen Einstellungen des Sekundärkondensators die mittlere Steilheit der Röhre keine Änderung erfahren. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Gitterspannung unabhängig von der Einstellung des Sekundärkondensators konstant ist. Bewahrheitet sich diese Überlegung, so muß es möglich sein, Zwischenkreisröhrensender zu bauen, die sich bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung bei jeder Einstellung des Sekundärkondensators so erregen, daß sie ganze Spektrum der raschen Koppelschwingung



ergeben und dabei eine (annähernd) konstante Spannung liefern können. Diese Spannung würde dann ähnlich wie die Gitterspannung von beiden Schwingungskreisen induziert oder abgenommen werden müssen. Daß ein solcher Generator, bei dem Frequenz und Spannung unabhängig voneinander eingestellt werden könnten, gute Dienste leisten kann, liegt auf der Hand.

Zusammenfassung.

Es werden rechnerisch diejenigen Stellen festgelegt, an denen der Zwischenkreisröhrensender mit primärer und sekundärer Gitterkopplung sich erregt, erlischt oder Frequenzsprünge aufweist. Dabei wird die für die praktische Rechnung nicht bequeme Hauptformel in einen Strauß von Einzelwerten und Näherungsformeln aufgelöst.

Zur Beseitigung der Frequenzsprünge kann man nach den Ergebnissen der Theorie folgendes vorschlagen:

1. Man bevorzuge die langsame Koppelschwingung und vermeide es, mit der primären Gitterkopplung über eine gewisse Höhe herauszugehen. Die Grenze ist dadurch gegeben, daß sich der Sender bei kurzgeschlossenem Sekundärkondensator noch nicht oder höchstens gerade erregen soll.
2. Man bevorzuge die rasche Koppelschwingung und regle die primäre Gitterkopplung höchstens so fest ein, daß sich bei offenem Sekundärkreis die ungekoppelte Eigenfrequenz noch nicht oder vielleicht eben erregt.

Wenn man die sekundäre Gitterkopplung groß genug wählt, spricht der Sender bei Bevorzugung der raschen Koppelschwingung bei jeder beliebigen Einstellung des Sekundärkondensators an. In besonderen Fällen kann sich dabei die Gitterspannung praktisch als konstant ergeben, ebenso jede andere Spannung, die ähnlich der Gitterspannung von beiden Schwingungskreisen induziert oder abgenommen wird.

Archiv für Elektrotechnik

X. Band. 7. Heft. 1921.

Induktivität und Kapazität einlagiger Drahtspulen.

Nach Versuchen von K. Schäfer.

Von

J. Wallot.

1. In der Zeit vom Januar 1912 bis zum März 1913 hat Herr K. Schäfer (Bern) auf meine Veranlassung im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Stuttgart Versuche angestellt über die Induktivität und die Kapazität von einlagigen Drahtspulen bei sehr schnellen Schwingungen.

Der Hauptzweck der Messungen war die Aufklärung des Begriffs der Spulenkapazität. Ich hielt es damals für richtig, zunächst experimentelles Material zu sammeln; denn das Spulenproblem ist theoretisch zu verwickelt, als daß es ratsam gewesen wäre, seine Lösung ohne experimentellen Wegweiser rein mathematisch zu versuchen.

Auch die experimentelle Untersuchung bot nur dann Aussicht auf Erfolg, wenn von vornherein alle irgend vermeidbaren Komplikationen ausgeschaltet wurden. Vor allem schien es mir nötig, jeden Stoffeinfluß so vollständig wie möglich zu vermeiden. Deshalb wählte ich kernlose Spulen aus blankem, ziemlich dickem Kupferdraht. Ich durfte also überall mit der Dielektrizitätskonstante des leeren Raums, mit verschwindendem Widerstande und daher — bei der benutzten hohen Frequenz — vollkommener Stromverdrängung rechnen; dielektrische Verluste, Ladeverzüge waren nicht in Betracht zu ziehen.

Eine weitere Komplikation konnte durch die bekannte Kapazitätsempfindlichkeit der Spulen entstehen. Es schien mir aussichtsvoll, zu versuchen, die elektrischen Kraftlinien durch eine der zu untersuchenden Spule symmetrisch gegenüberliegende „Gegenspule" sozusagen abzusättigen[1]). Die Spulenkapazität wurde hierdurch natürlich vergrößert; dieser Einfluß war aber ein bestimmter, und es schien mir möglich, ihn durch eine Art Extrapolation wirkungslos zu machen.

Durch den Ersatz der rein „dielektrischen Rückleitung", wie sie für die fern von andern Körpern etwa an dünnen Fäden frei aufgehängte Spule charakteristisch ist, durch eine im wesentlichen „metallische Rückleitung" konnten zugleich bis zu einem gewissen Grade die besonders einfachen Verhältnisse der Doppeldrahtleitung für das Spulenproblem nutzbar gemacht werden. Bei den Doppeldrähten kann die bei stehenden Wellen auftretende Ungleichmäßigkeit der Strom- und Spannungsverteilung genau in Rechnung gestellt werden; denn für sie ist die Induktivität und die Kapazität der Längeneinheit wohl definiert, mit großer Annäherung konstant und nur von den Querabmessungen (der Drahtdicke und dem Drahtabstand) abhängig. Für einander gegenüberliegende Doppelspulen liegen die Verhältnisse wegen der Verkürzung der Wellen verwickelter. Aber man darf bei ihnen doch wenigstens in erster Näherung ebenfalls mit den Begriffen der Induktivität und der Kapazität der Längeneinheit rechnen; nur werden diese Größen jetzt auch von den Längsabmessungen (vor allem der Spulenlänge) abhängen.

[1]) Vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. **11**, S. 966 f., 1903 und Elektrot. Zeitschr. **26**, S. 339, 1905; E. Gehrcke, Elektrot. Zeitschr. **26**, S. 697, 1905.



2. Die von mir vorgeschlagene, von Schäfer benutzte Meßmethode[1]) vergleicht die Induktivität und die Kapazität der betreffenden Doppelspule mit der Induktivität und der Kapazität eines Paralleldrahtsystems gleichen Achsenabstands. Schäfer maß die Eigenfrequenzen der beiden Schaltungen k und b (Bild 1). Bei k wirkt im wesentlichen die Induktivität der Spulen, bei b im wesentlichen ihre Kapazität; beide Messungen zusammen liefern das Verhältnis der Spuleninduktivität oder -kapazität zur Drahtinduktivität oder -kapazität. Die Methode beruht auf der Ungleichmäßigkeit der Potential- und Stromverteilung über die schwingenden Systeme hin; sie extrapoliert sozusagen einerseits die Induktivität der ungeladenen (verschiebungsstromfreien) Spule, anderseits die Kapazität der Spule konstanten Potentials. Besonders dieser letztere Umstand wird sich für die Deutung der Versuche Schäfers als von besonderer Wichtigkeit erweisen (vgl. Nr. 47 ff.).

3. Bereits im November 1913 reichte Herr Schäfer die Ergebnisse seiner Messungen der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Freiburg i. Br. als Dissertation ein. Der Druck der Abhandlung[2]) verzögerte sich jedoch leider infolge des Krieges bis zum Beginn des Jahres 1920. In der Zwischenzeit

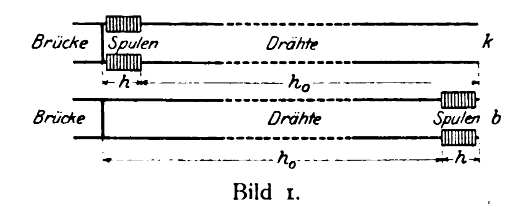


Bild 1.

hat sich die Frage der Spulenkapazität in verschiedenen Richtungen weiter entwickelt. Schon während der Untersuchungen Schäfers erschien die wichtige theoretische Arbeit von Lenz[3]) über die Kapazität der Spulen, kurz nach der Einreichung der Dissertation eine Arbeit desselben Verfassers[4]) über ihre Eigenschwingungen. Experimentell wurde das Problem in den letzten 8 Jahren hauptsächlich von Rietz[5]), Keller[6]) und Gothe[7]) gefördert. Auch die Technik[8]) zeigt neuerdings ein starkes Interesse für das Problem der Spulenkapazität, ist doch seine Lösung von grundlegender Bedeutung für die Aufklärung des Verhaltens der Spulen bei hohen Frequenzen, insbesondere für die Aufklärung der beim Einschalten häufig beobachteten Überspannungen.

4. In der vorliegenden Arbeit möchte ich zeigen, welche Schlüsse aus den Schäferschen Versuchen gezogen werden können. Die Messungen liefern zunächst einen wertvollen Beitrag zu der Frage, wie sich die Induktivität von Drahtspulen bei hohen Frequenzen durch die Verdrängung der Stromlinien nach dem Innern der Spulen hin ändert. Anderseits zeigen sie — zusammen mit dem übrigen bis jetzt vorliegenden experimentellen Material — mit einer für praktische Zwecke völlig ausreichenden Sicherheit, worauf es bei der Spulenkapazität ankommt. Sie bestätigen, daß die Drudesche Theorie von 1902[9]) trotz mancher Mängel das Wesent-

[1]) J. Wallot, Ann. d. Phys. **30**, S. 495—578, 1909.
[2]) K. Schäfer, Untersuchungen über die Selbstinduktion und die Kapazität von Drahtspulen. Dissertation Freiburg i. Br. 1913.
[3]) W. Lenz, Ann. d. Phys. **37**, S. 923—974, 1912.
[4]) Derselbe, ebenda **43**, S. 749—797, 1914.
[5]) W. Rietz, ebenda **41**, S. 543—569, 1913.
[6]) H. Keller, Über Spulenkapazitäten von ein-, zwei- und mehrlagigen Drahtrollen. Dissertation Zürich 1917.
[7]) A. Gothe, Arch. f. Elektrot. **9**, 1—19, 1920.
[8]) Literatur s. bei Gothe, a. a. O.
[9]) P. Drude, Ann. d. Phys. **9**, S. 324 ff., 1902.

liche trifft. Die Wechselwirkung zwischen unmittelbar benachbarten Windungen ist bloße Korrektionsgröße; in der Hauptsache darf man sich für die Abschätzung der Kapazität die enggewickelte Spule durch einen Zylinder von denselben äußeren Abmessungen ersetzt denken. Die Sicherheit, mit der diese Schlüsse trotz vieler Schwierigkeiten gezogen werden können, ist ein Beweis für die große Sorgfalt, mit der Herr Schäfer gemessen hat.

Der Dissertation habe ich für die folgenden Ausführungen im wesentlichen nur die unmittelbaren Versuchsergebnisse entnommen. Doch hat mich Herr Schäfer bei einem Teil der äußerst mühevollen Zahlenrechnungen freundlichst unterstützt, wofür ich ihm auch hier herzlichst danke.

I. Die Ausführung der Versuche.

5. Vorbemerkung über die benutzten Maße. Im folgenden verwende ich ausschließlich internationale Maße in der von Mie vorgeschlagenen Form. Man beachte also: μ_0 und ε_0, die Permeabilität und die Dielektrizitätskonstante des leeren Raums sind keineswegs dimensionslos und gleich 1; vielmehr ist $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-8}$ Henry/cm; $\varepsilon_0 = 0{,}886 \cdot 10^{-13}$ Farad/cm. Die Formeln für die Induktivität unterscheiden sich von den absoluten elektromagnetischen durch den Faktor $\mu_0/4\pi$, die Formeln für die Kapazität von den absoluten elektrostatischen durch den Faktor $4\pi\varepsilon_0$. Ferner habe ich streng den Grundsatz durchgeführt, daß der Zahlenwert einer Größe scharf von der Größe selbst zu trennen ist. Es kommt daher in der ganzen Arbeit keine Zahl vor, die nicht wirklich eine reine Zahl wäre. Dies gilt auch für die Zahlen der Tabellen; die wagrechten Striche, durch die ich in den Tabellenköpfen die Formelzeichen von den Einheiten trenne, sind also als Bruchstriche zu deuten.

Wegen der Begründung meiner Bezeichnung verweise ich auf einen nächstens an andrer Stelle erscheinenden Bericht.

6. Die zugrundeliegende Theorie. In der Einleitung habe ich schon darauf hingewiesen, daß Herr Schäfer bei seinen Messungen die Eigenschwingungsdauern der beiden in Bild 1 dargestellten Systeme k und b bestimmt hat. Nennen wir sie τ_k und τ_b, unterscheiden wir ferner die Drähte von den Spulen durch den Index 0 und bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ die Induktivität der Längeneinheit, mit $\mathfrak{c}$ die Kapazität der Längeneinheit, mit v die Geschwindigkeit der an den Spulen oder Drähten entlang wandernden Wellen, endlich mit h und h_0 die Längen der Spulen und Drähte, so gilt angenähert [1])

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}\,\mathfrak{c}}}, \tag{1}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{c}_0}},\ ^{2)} \tag{2}$$

$$1 = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_0} \cdot \frac{v}{v_0} \operatorname{tg} 2\pi \frac{h}{v\,\tau_k} \operatorname{tg} 2\pi \frac{h_0}{v_0\,\tau_k}, \tag{3}$$

$$1 = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}_0} \cdot \frac{v}{v_0} \operatorname{tg} 2\pi \frac{h}{v\,\tau_b} \operatorname{tg} 2\pi \frac{h_0}{v_0\,\tau_b}. \tag{4}$$

$\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{c}_0$, h und h_0 sind bekannt, τ_k und τ_b durch Resonanzversuche gemessen, v_0 durch (2) gegeben; $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{c}$ und v können daher aus (1), (3) und (4) berechnet werden.

[1]) Vgl. J. Wallot, a. a. O. Nr. 17 u. 19.

[2]) v ist natürlich kleiner als v_0. Aus der Arbeit von F. Bourcier, Comptes Rend. 158, S. 1882—1884, 1914, die dies zum Überfluß noch einmal feststellt, ist merkwürdigerweise in einem Referat der gegenteilige Schluß gezogen worden.

7. Das Verfahren zur Messung der Schwingungsdauern τ kann hier nur angedeutet werden. Wegen der Einzelheiten vergleiche man die Dissertation des Herrn Schäfer.

Die Spulen wurden durch besondere Vorrichtungen in ein Paralleldrahtsystem eingeschaltet, auf dem sich eine Brücke verschieben ließ. Erregt wurde das schwingende System induktiv durch einen Kreis von meßbar veränderlicher Schwingungsdauer.

Die Messung verlief jedesmal in der folgenden Weise: Zuerst wurde der Erreger auf das in Bild 1 dargestellte System k oder b abgestimmt (Hauptabstimmung). Dann wurden die Spulen durch zwei ebenso lange geradlinige Drahtstücke ersetzt und die Brücke so lange verschoben, bis das spulenlose System bei möglichst genau derselben Einstellung des Erregers mit diesem wieder in Resonanz war (Eichabstimmung).

Sämtliche Messungen wurden bei den Drahtabständen 5, 10 und 15 cm ausgeführt.

8. Die sehr mühselige Ausrechnung gestaltete sich folgendermaßen. Multipliziert man (3) mit (4), so folgt bei Berücksichtigung von (1) und (2):

$$1 = \operatorname{tg} 2\pi \frac{h_0}{v_0 \tau_k} \operatorname{tg} \frac{2\pi h_0}{v_0 \tau_b} \operatorname{tg} 2\pi \frac{h}{v \tau_k} \operatorname{tg} 2\pi \frac{h}{v \tau_b}, \tag{5}$$

d. h. eine Gleichung, in der nur noch die unbekannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit v vorkommt, von der Form

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} a\varphi = b, \tag{6}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= 2\pi \frac{h}{v \tau_b} \\ a &= \frac{\tau_b}{\tau_k} \\ b &= \operatorname{cotg} 2\pi \frac{h_0}{v_0 \tau_k} \operatorname{cotg} 2\pi \frac{h_0}{v_0 \tau_b} \text{ [1]}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

τ ergibt sich unmittelbar aus den Messungen nach

$$v_0 \frac{\tau}{4} = 184 \text{ cm} + h + \mathfrak{v} + \frac{d}{2}, \tag{8}$$

wo $\mathfrak{v}$ die dem Einfluß der Doppelspule gleichwertige Verschiebung der Brücke und d der Drahtabstand ist. 184 cm + h betrug die Normalentfernung der Brücke von den freien Enden der Paralleldrähte.

9. Zur Berechnung von φ aus (6) verwandte Schäfer ein graphisches Verfahren. Man kann sich aber auch durch die Aufeinanderfolge:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}; \\ &\operatorname{tg} a\varphi_2 = \frac{b}{\operatorname{tg}\varphi_1}; \qquad \varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}; \\ &\operatorname{tg} a\varphi_4 = \frac{b}{\operatorname{tg}\varphi_3}; \qquad \varphi_5 = \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dem richtigen Wert immer mehr nähern. Meist wird sich eine geeignete Kombination von Rechnung und Zeichnung empfehlen.

Ist φ bestimmt, so folgen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{c}$ aus:

[1] Schäfer hat an Stelle von φ, a und b die Abkürzungen v, β und P.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mathfrak{L}_0 \frac{v_0 \tau_b}{2\pi h} \varphi \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} 2\pi \frac{h_0}{v_0 \tau_b}, \\ \mathfrak{c} &= \mathfrak{c}_0 \frac{v_0 \tau_b}{2\pi h} \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} 2\pi \frac{h_0}{v_0 \tau_b}} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Für $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ gelten die Formeln[1] (ϱ = Radius der Paralleldrähte)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 &= \frac{\mu_0}{\pi} \lg \frac{d}{\varrho} = 3{,}998 \lg \frac{d}{\varrho} \frac{10^{-9}\,\mathrm{H}}{\mathrm{cm}}, \\ \mathfrak{c}_0 &= \frac{\pi \varepsilon_0}{\lg \frac{d}{\varrho}} = \frac{0{,}2783}{\lg \frac{d}{\varrho}} \frac{10^{-12}\,\mathrm{F}}{\mathrm{cm}}\ ^{2)} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Nach diesen Formeln und Methoden sind sämtliche Zahlenwerte der vorliegenden Arbeit auf Grund der von Herrn Schäfer geführten Beobachtungshefte nochmals sorgfältig nachgerechnet worden.

Die bequemen Näherungsformeln, die ich früher zur Bestimmung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{c}$ angegeben habe[3]), ließen sich wegen der beträchtlichen Größe der Spuleninduktivität leider nicht verwenden.

Wegen der hauptsächlichsten Fehlerquellen verweise ich auf die Dissertation, wegen der erreichten Genauigkeit auf die Nrn. 14—17.

II. Die Induktivität.

10. Die Versuchsergebnisse. Tabelle 1 enthält in Spalte 7 die Induktivität der Längeneinheit der einzelnen Spule, wie sie sich nach Gleichung (10) bei Berücksichtigung der in den Nrn. 11—13 abzuleitenden Korrektionen ergibt[4]). Es bedeuten:

- 2 R den Spulendurchmesser (Windungsdurchmesser) von der Drahtachse aus gemessen;
- h die Spulenlänge;
- N die Windungszahl;
- δ die Spulendrahtdicke;
- g die Ganghöhe der Spule.

11. Umrechnung auf die Einzelspule. Die nach Gleichung (10) berechneten Induktivitäten der Längeneinheit beziehen sich auf die Doppelspulen. Wir müssen sie also zunächst auf die einzelne Spule der Länge h umrechnen.

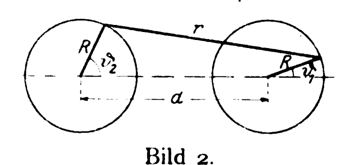


Bild 2.

Herr Schäfer konnte in seiner Dissertation keine systematische Abhängigkeit seiner Zahlen $\mathfrak{L}$ vom Drahtabstand feststellen[5]). Die von mir z. T. berichtigten Zahlen zeigen jedoch, daß die Induktivität bei den dickeren Spulen deutlich mit wachsendem Drahtabstand abnimmt.

[1]) S. z. B. G. Mie, Ann. d. Phys. 2, S. 201—249, 1900.

[2]) Die Versuche sind mit den abgerundeten Zahlen 4 und 13,6 ausgerechnet.

[3]) J. Wallot, a. a. O. Gleichungen (34) und (36).

[4]) Auf Wunsch der Schriftleitung habe ich die Tabelle 1 sehr beträchtlich gekürzt. Ausführlichere Tabellen, die erkennen lassen, wie die korrigierten Induktivitäten und Kapazitäten im einzelnen gefunden sind, stelle ich gerne leihweise zur Verfügung.

[5]) A. a. O. S. 42.

Tabelle 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Spule Nr.	2 R	h	N	δ	$\frac{\delta}{g}$	$\frac{\mathfrak{L}}{2}$ korr.	$\frac{\mathfrak{L}}{2}$ ber.	p ber.	p beob.	c korr.	$f\left(\frac{h}{h'}\right)$	$\frac{h}{h'}$
	cm	cm		mm	10^{-2}	10^{-9} H cm	10^{-9} H cm	10^{-2}	10^{-2}	10^{-15} F cm		
1	1,15	2	8	1,5		134,8	155,0	− 10,5	13,1	− 14		
2	1,16	4	16		60	163,4	95,6		+ 71	− 4		
3	1,16	6	24			167,1	neg.			9	0,42	0,18
4	1,15	2	5			63,6	67,6	− 4,6	− 5,9	− 32		
5	1,16	4	10		37,5	72,4	48,4		+ 50	13		
6	1,18	6	15			73,8	neg.			− 3		
7	1,22	2	8	2,0		136,0	163,8	− 16,4	− 17,0	− 19		
8	1,21	4	16		80	158,4	116,1		+ 37	− 3		
9	1,21	6	24			163,6	neg.			12	0,51	0,19
10	1,21	2	5			60,6	68,2	− 10,2	− 11,1	− 26		
11	1,23	4	10		50	69,5	58,5		+ 19	− 9		
12	1,21	6	15			71,8	neg.			− 1		
13	1,31	2	6	3,0		77,7	98,3	− 24,9	− 21,0	− 18		
14	1,30	4	12		90	90,9	84,6		+ 7,5	− 3		
15	1,30	6	18			93,2	neg.			10	0,50	0,14
16	1,30	2	3			25,1	26,8	− 13,5	− 6,4	− 32		
17	1,30	4	6		45	30,0	26,6		+ 12,9	− 12		
18	1,33	6	9			32,1	neg.			− 1		
19	2,19	2	8	1,5		453,4	478,4	− 6,8	− 5,2	10	0,10	0,14
20	2,20	4	16		60	563,9	601,9	− 5,3	− 6,3	45	0,44	0,30
*21	2,39	6	24			*663,9	692,3	− 4,1		57	0,50	0,46
22	2,18	2	5			184,8	196,3	− 4,0	− 5,8	− 22		
23	2,20	4	10		37,5	238,9	247,2	− 2,3	− 3,4	− 9	0,14	0,18
24	2,22	6	15			252,4	246,1	+ 2,0	+ 2,6	22	0,36	0,27
25	2,25	2	8	2,0		437,8	484,4	− 10,0	− 9,6	10	0,10	0,14
26	2,21	4	16		80	553,1	590,8	− 8,4	− 6,4	55	0,53	0,30
*27	2,46	6	24			*675,3	724,6	− 6,8		51	0,42	0,46
28	2,25	2	5			179,7	196,5	− 7,2	− 8,6	− 22		
29	2,20	4	10		50	225,7	237,3	− 5,1	− 4,9	16	0,26	0,18
30	2,21	6	15			236,4	233,3	− 0,2	+ 1,3	27	0,44	0,26
31	2,33	2	6	3,0		241,7	276,0	− 15,4	− 12,5	14	0,18	0,11
32	2,33	4	12		90	297,3	351,4	− 13,1	− 15,4	34	0,43	0,22
33	2,31	6	18			323,9	350,7	− 9,0	− 7,6	48	0,62	0,32
34	2,33	2	3			68,0	74,6	− 9,4	− 8,9	− 13		
35	2,35	4	6		45	86,1	95,5	− 6,7	− 9,6	0	0,00	0,11
36	2,33	6	9			92,3	96,4	− 0,7	− 4,3	11	0,28	0,16
37	3,20	2	8	1,5		883,2	893,9	− 4,6	− 1,2	105	0,42	0,25
*38	3,46	4	16		60	*1267,9	1326,3	− 4,4		135	0,47	0,53
*39	3,49	6	24			*1470,5	1499,0	3,6		143	0,54	0,72
40	3,15	2	5			357,1	355,5	2,9	+ 0,5	46	0,32	0,15
41	3,26	4	10		37,5	473,9	483,6	− 2,4	2,0	56	0,36	0,30
*42	3,47	6	15			*591,4	602,8	− 1,9		55	0,32	0,47
43	3,30	2	8	2,0		833,9	915,3	− 6,8	− 8,9	117	0,45	0,25
*44	3,39	4	16		80	*1173,5	1256,4	− 6,6		158	0,57	0,52
*45	3,52	6	24			*1414,0	1497,2	− 5,5		141	0,53	0,72
46	3,30	2	5			353,7	367,7	− 5,0	3,8	49	0,31	0,15
47	3,24	4	10		50	452,2	464,0	4,6	− 2,6	67	0,44	0,30
*48	3,51	6	15			*576,4	599,2	− 3,9		60	0,35	0,47
49	3,38	2	6	3,0		454,6	515,7	10,5	− 11,9	92	0,47	0,18
50	3,34	4	12		90	603,1	668,2	10,3	9,7	115	0,59	0,37
*51	3,58	6	18			*782,6	857,1	8,7		95	0,45	0,56
52	3,40	2	3			118,9	138,8	− 6,5	− 14,3	34	0,13	0,09
53	3,34	4	6		45	165,0	175,1	− 6,0	− 5,8	46	0,49	0,18
54	3,37	6	9			188,1	200,1	− 4,5	− 6,0	39	0,42	0,27

Angenähert läßt sich dieser Einfluß leicht auch theoretisch verfolgen. Wir gehen aus von der Betrachtung der Gegeninduktivität zweier in derselben Ebene liegender linearer Kreisströme vom Halbmesser R und Mittelpunktsabstand d (Bild 2). Die Lage der Stromelemente sei gegeben durch die Winkel ϑ_1 und ϑ_2. Dann ergibt eine einfache geometrische Betrachtung für die Gegeninduktivität der beiden Stromkreise den Wert[1]):

$$m = \pm \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) R\, d\vartheta_1\, R\, d\vartheta_2}{d \sqrt{1 + \frac{2R}{d}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) + \frac{2R^2}{d^2}[1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)]}}. \quad (12)$$

Das obere Zeichen gilt dabei für die gleichsinnige, das untere für die gegensinnige Durchströmung der Kreise. Da R immer kleiner ist als $\frac{d}{2}$, darf man den Nenner nach Potenzen von $\frac{R}{d}$ entwickeln. Berücksichtigt man dabei noch die zweite Potenz von $\frac{R}{d}$, so erhält man m schließlich in der Form:

$$m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2}{d} \left\{ \left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right) J_1 - \frac{R}{d} J_2 + \frac{3}{2} \frac{R^2}{d^2} J_3 + \frac{R^2}{d^2} J_4 \right\},$$

wo die J bestimmte Integrale sind, deren Integranden aus den Funktionen $\cos\vartheta_1$, $\cos\vartheta_2$ und $\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$ zusammengesetzt sind. Bei der Integration verschwinden die Integrale J_1 und J_2; dagegen wird $J_3 = -2\pi^2$ und $J_4 = 2\pi^2$. m nimmt also den Wert an:

$$m = \mp \frac{\mu_0 \pi R^4}{4\, d^3}. \quad (13)$$

Die Gegeninduktivität der Gegenspulen von der Windungszahl N wird in erster Näherung durch $N^2 m$ gegeben sein. Auf die Größe des Drahtquerschnitts kommt es offenbar nicht an. Nun waren die Spulen Schäfers alle in demselben Sinne gewickelt. Gegenüberliegende Windungen wurden daher von dem Strom im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, in Gleichung (13) gilt das untere Zeichen: die Induktivität wird durch die Gegenspule vergrößert. Die Korrektion $N^2 m$ wäre an der Gesamtinduktivität der einzelnen Spule anzubringen; die an $\mathfrak{L}$ anzubringende Korrektion Δ_1 ist also:

$$\Delta_1 = -\frac{\mu_0 \pi R^4}{4\, d^3} N^2 \cdot \frac{2}{h} = -\frac{\mu_0 \pi R^4}{2\, d^3} \frac{N}{g}. \quad (14)$$

12. Die Wirkung dieser Korrektion war ausgezeichnet: die vorher bei den dickeren Spulen zu beobachtende Abhängigkeit der Induktivität vom Drahtabstand verschwand so gut wie vollständig.

Ich nahm daher nunmehr aus je drei zusammengehörigen für die Drahtabstände 5, 10 und 15 cm gefundenen nach (14) korrigierten Werten das Mittel.

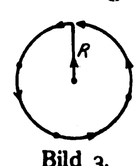
13. Von diesen Mittelwerten war als zweite Korrektion wegen der Zuleitungsdrähte zu den Spulen noch ein geringer Betrag abzuziehen. Er berechnet sich folgendermaßen: Bei den Versuchen Schäfers waren die Paralleldrähte mit den Spulen durch scharf rechtwinklig umgebogene radiale Zuleitungsdrähte verbunden (vgl. Bild 3). Die Induktivität eines solchen Zuleitungsdrahtes ist, wenn wir vollkommene Stromverdrängung annehmen[2]),

[1]) Das im Zähler zweimal vorkommende Differentialzeichen d wird wohl kaum mit dem Zeichen für den Drahtabstand verwechselt werden.

[2]) Z. B. nach P. Debije, Enzykl. d. math. Wiss. V, 17, Gleichung (188).

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} 2R \left\{ \lg \frac{2R}{\varrho} - 1 \right\};$$

es war also an unseren Mittelwerten wegen der vier Zuleitungsdrähte die Korrektion anzubringen:



$$\Delta_2 = -\frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{2R}{h} \left\{ \lg \frac{2R}{\varrho} - 1 \right\}. \quad (15)$$

Bild 3.

Die Gegeninduktivität zwischen den Zuleitungsdrähten und den Windungen selbst kann vernachlässigt werden.

In Spalte 7 der Tabelle 1 steht die Hälfte der hiernach korrigierten Induktivität der Längeneinheit der Doppelspulen.

14. Bemerkungen über die Genauigkeit der Versuche. Da die Abweichungen $\delta\mathfrak{S}$ der unmittelbar beobachteten Werte $\mathfrak{S}$ von ihren Mittelwerten durch Anbringung der Korrektion Δ_1 den Charakter zufälliger Abweichungen bekommen hatten, konnte ich mir über die Genauigkeit der Schäferschen Messungen ein Urteil bilden. Ich berechnete zunächst nach

$$\delta \mathfrak{v}_k = \frac{\partial \mathfrak{v}_k}{\partial \mathfrak{S}} \delta \mathfrak{S} \quad (16)$$

die zugehörigen Abweichungen der gleichwertigen Brückenverschiebungen $\mathfrak{v}_k$ (vgl. Nr. 8); diese waren ja die unmittelbar gemessenen Größen. Der Faktor $\frac{\partial \mathfrak{v}_k}{\partial \mathfrak{S}}$ ist für kleine $\mathfrak{v}_k$ sehr nahe gleich $\frac{h}{\mathfrak{S}_0}$ [1]; bei größeren $\mathfrak{v}_k$ bestimmte ich ihn empirisch aus den gemessenen $\mathfrak{v}_k$ und $\mathfrak{S}$. Zu den einzelnen $\delta\mathfrak{v}_k$ kann man dann in bekannter Weise das mittlere $\delta\mathfrak{v}_k = \varepsilon$ der einzelnen $\mathfrak{S}$-Messung und das mittlere $\delta\mathfrak{v}_k = E$ unserer Mittelwerte berechnen. Es ergaben sich die folgenden mittleren Abweichungen:

für die Spulen 1—18: $\varepsilon = \pm 0{,}5$ cm; $E = \pm 0{,}3$ cm
für die Spulen 19—36: $\varepsilon = \pm 1{,}1$ cm; $E = \pm 0{,}6$ cm,
für die Spulen 37—54: $\varepsilon = \pm 1{,}4$ cm; $E = \pm 0{,}8$ cm [2]).

Der mittlere relative Fehler unserer Mittelwerte ist also zu berechnen nach

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\mathfrak{S}} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{v}_k} \cdot \frac{E}{\mathfrak{S}}. \quad (17)$$

15. Ein Vergleich der Fehler ε mit den Einzelabweichungen $\delta\mathfrak{v}_k$ zeigt, daß einige Versuche, besonders der Versuch 47, in geringerem Maße die Versuche 1, 26, 32, 18 sich durch auffallend große Unsicherheit auszeichnen. Wahrscheinlich sind bei ihnen gröbere Versehen vorgekommen, wie sie bei so langwierigen Messungen unvermeidlich sind. Daß Herr Schäfer die schlecht stimmenden Werte nicht mehr nachgeprüft hat, kommt davon her, daß er seine Arbeitsstätte in Stuttgart bereits vor Ausrechnung seiner Versuche verlassen mußte. Er maß nur nach festem Plan, ohne jeden Anhalt, ob seine Messungen richtige Werte ergeben würden; um so erfreulicher ist die teilweise recht gute Übereinstimmung seiner Resultate.

16. Über den Einfluß einer Reihe von Fehlerquellen hat Herr Schäfer in seiner Dissertation ausführliche Angaben gemacht. Ich weise noch auf eine dort nicht erwähnte Fehlerquelle hin: Die zum Einschalten der Spulen dienenden Vorrichtungen konnten einen gewissen Einfluß ausüben, da sie teilweise bei den Haupt-

[1]) Nach J.-Wallot, a. a. O. Gleichung (34).

[2]) Die reinen Einstellfehler waren geringer. Sie kamen offenbar kaum in Betracht gegenüber den Fehlern, die dadurch verursacht waren, daß zur Änderung des Drahtabstands das schwingende System jedesmal auseinander genommen und wieder neu zusammengestellt werden mußte.



abstimmungen in der Nähe der Brücke, bei den Eichabstimmungen aber in ziemlicher Entfernung von der letzteren lagen. Schätzt man den Einfluß jedoch ab[1]), so erkennt man, daß er zu vernachlässigen ist (im schlimmsten Falle etwa 1 %).

17. Beim Vergleich der experimentellen Resultate mit der Theorie ist noch zu beachten, daß die wirklichen Spulenabmessungen nur mit mäßiger Genauigkeit bekannt sind. Von den Spulenparametern wurde die Drahtdicke δ (auf deren Kenntnis es aber nicht genau ankommt) mit der Mikrometerschraube, der Spulendurchmesser 2R mit einem kleinen Kathetometer gemessen, die Windungszahl N abgezählt, die Spulenlänge h jedesmal mit einer Feinstellvorrichtung so genau wie möglich auf 2, 4 oder 6 cm festgelegt. Die Ganghöhe folgte aus $g = \frac{h}{N}$. Die aus ungenauer Messung der Spulendimensionen folgenden Fehler dürften nicht überschätzt sein mit 1,5 % für die dünnen, 1,0 % für die mitteldicken und 0,6 % für die dicken Spulen.

18. Vergleich mit der Theorie. Zum Vergleich der gefundenen Induktivitäten der Längeneinheit der Einzelspulen mit der Theorie habe ich nur die Summationsformel von Strasser[2]) ($\mathfrak{S}$ = Gesamtinduktivität der Einzelspule)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S} = \mu_0 R \Big\{ & N\left(\lg\frac{2R}{\delta} + 0{,}333\right) + N(N-1)\left(\lg\frac{8R}{g} - 2\right) - A \\ & + \frac{g^2}{8R^2}\left[\left(3\lg\frac{8R}{g} - 1\right)\frac{N^2(N^2-1)}{12} - B\right]\Big\} \\ = \mu_0 R P_1 & \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

herangezogen, vor allem, weil ihre Entstehung und infolgedessen die Bedeutung der einzelnen in ihr vorkommenden Ausdrücke verhältnismäßig durchsichtig ist. Ein Nachteil der Formel ist, daß sie nur für kurze Spulen gilt: schon bei den Schäferschen Spulen 3, 6, 9, 12, 15, 18 wird die nach (18) berechnete Induktivität negativ.

Bereits die in der Dissertation angegebenen unkorrigierten Werte $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ sind fast alle kleiner als die berechneten, und zwar auch bei den kurzen Spulen, für die die Strassersche Formel bei Niederfrequenz sicher noch mit großer Genauigkeit richtig ist[3]). Unsere Korrektion Δ_2 (wegen der Zuleitungsdrähte) hat die Abweichungen noch um einen geringen Betrag vergrößert.

19. Ich möchte diesen Widerspruch zwischen Theorie und Messung durch die bei Hochfrequenz auftretende Verdrängung der Stromlinien erklären. Man darf wohl aus den bis jetzt vorliegenden theoretischen Abhandlungen mit ziemlicher Sicherheit den Schluß ziehen, daß die Stromverdrängung allgemein um so ausgeprägter ist, je kleiner die Länge

$$\frac{1}{\sqrt{n\mu\sigma}}$$

(n = Kreisfrequenz, μ = Permeabilität, σ = Leitfähigkeit)

ist verglichen mit der maßgebenden Dimension des betreffenden Leiters, in unserm Falle mit der Drahtdicke. Nun liegt bei den Schäferschen Versuchen $\frac{\lambda}{4}$ sicher unter 4,7 m, die Schwingungszahl daher über

$$\frac{n}{2\pi} = \frac{3 \cdot 10^{10}\,\text{cm/sec}}{4 \cdot 4{,}7\,\text{m}} = \frac{10^8}{2\pi\,\text{sec}}.$$

Da für Kupfer $\sigma = 59 \cdot 10^4\,\Omega^{-1}\,\text{cm}^{-1}$, so wird die genannte Länge gleich

$$\frac{1}{\sqrt{n\mu\sigma}} = \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1{,}256 \cdot 10^{-4}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{59 \cdot 10^2}} \sqrt{\frac{\text{sec}\,\Omega\,\text{cm}^2}{\text{H}}} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}. \quad (19)$$

1) Nach J. Wallot, a. a. O.
2) B. Strasser, Ann. d. Phys. 17, S. 763–771. 1905.
3) Vgl. E. B. Rosa und L. Cohen, Bull. of the Bur. of Stand. 5, S. 90 ff.

Laufen z. B. bei einem geradlinigen Kupferdraht Ströme von der Kreisfrequenz $\frac{10^8}{sec}$, so ist die Stromamplitude bereits in einem Abstand von rund $^1/_{60}$ mm[1]) von der Drahtoberfläche auf $\frac{1}{e}$ des Oberflächenwerts gesunken. Wir dürfen also bei den Schäferschen Versuchen sicher mit vollkommener Stromverdrängung rechnen.

20. Dementsprechend habe ich zunächst die Strassersche Formel abgeändert für den Fall, daß der Strom vollkommen auf die Oberfläche der Drähte abgedrängt ist (eigentliche Hautwirkung). Was zunächst die Induktivität der Windungen gegeneinander betrifft, so dürfen wir wohl nach Analogie schließen, daß sie unabhängig ist von der Art, wie der Strom im Drahtquerschnitt verteilt ist. Dagegen ist für die Selbstinduktivität jedes einzelnen Kreisringes bei vollkommener Hautwirkung als „mittlerer geometrischer Abstand" der Drahtradius einzusetzen[2]), was zur Folge hat, daß in die Strassersche Formel an die Stelle der Zahl 0,333 die Zahl 0,07944 tritt.

Die hiernach berechneten $\frac{\mathfrak{s}}{2}$ sind in Spalte 8 der Tab. 1 den korrigierten beobachteten $\frac{\mathfrak{s}}{2}$ der Spalte 7 gegenübergestellt[3]). Wie man sieht, reicht die Abänderung der Strasserschen Formel noch lange nicht aus, um den Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung zu erklären. Ich habe daher untersucht, ob die Abweichungen auf die eigentliche Spulenverdrängung, also auf die Verdrängung der Stromlinien nach der Spulenachse zu zurückgeführt werden können.

21. Zu diesem Zwecke habe ich angenommen, daß die Wirkung der Spulenverdrängung darin besteht, daß der wirksame Spulenradius kleiner ist als der gemessene, und zwar um einen Betrag, der in erster Näherung dem Drahtradius proportional ist. Ich setze also für den wirksamen in die Strassersche Formel einzusetzenden Spulenradius

$$R = R_0 - k\varrho, \tag{20}$$

wo R_0 der gemessene Spulenradius, ϱ der Drahtradius und k ein Faktor ist, der zwischen 0 und 1 liegen muß. Setzt man dies in die Strassersche Formel ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{beob.} = \mathfrak{s}_{beob.} \cdot h &= \mathfrak{S}_{ber.}\left(1 - k\frac{\varrho}{R_0}\right) + \mu_0 k \varrho P_2 \\ &= \mathfrak{S}_{ber.}\left(1 - k\frac{\varrho}{R_0}\right) + \mu_0 k \varrho \left\{2 P_3 - N^2\left[1 + \frac{g^2}{8 R_0^2}\frac{N^2-1}{4}\right]\right\},\end{aligned} \tag{21}$$

wo P_3 das in der zweiten Zeile von (18) stehende vierte Glied von P_1 ist; also

$$k_{beob.} = p_{beob.} \cdot \frac{2 R_0}{\delta}\frac{P_1}{P_1 - P_2}, \quad \text{wenn} \quad p_{beob.} = \frac{\mathfrak{s}_{ber.} - \mathfrak{s}_{beob.}}{\mathfrak{s}_{ber.}}. \tag{22}$$

Bei Anwendung dieser Gleichung auf die Schäferschen Messungen erhält man in der Tat Zahlenwerte k, die mit nur einer Ausnahme zwischen 0 und 1 liegen.

22. Da eine Abhängigkeit der Größe k von der Enge der Wicklung wahrscheinlich war, habe ich die k-Werte für die verschiedenen Wicklungsengen $\frac{\delta}{g}$ als Funktion des Verhältnisses $\frac{h}{2R}$ in Schaubildern aufgetragen und durch die erhaltenen

[1]) Es ist noch mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren.
[2]) P. Debije, a. a. O. Gleichung (187").
[3]) Wegen der mit * versehenen Werte vgl. Nr. 25.

Punkte unter Berücksichtigung der verschiedenen Genauigkeit der einzelnen experimentell gefundenen Werte möglichst regelmäßige Kurven gelegt, die in Bild 4 wiedergegeben sind. Diesen Kurven kann man nun wieder umgekehrt die Zahlen $k_{ber.}$ entnehmen und damit entsprechend (22) den zugehörigen relativen Einfluß der Stromverdrängung $p_{ber.}$ berechnen (Spalte 9).

23. Vergleicht man hiermit den beobachteten relativen Einfluß der Stromverdrängung $p_{beob.}$ (Spalte 10), so erkennt man, daß die Mehrzahl der Schäferschen Induktivitätsmessungen in dem Bereich $0 < h < 6R$ sehr nahe innerhalb der Versuchsfehler (Nrn. 14 u. 17) im Einklang steht mit der Strasserschen Formel, wenn man diese durch die außerordentlich regelmäßige graphische Darstellung Bild 4 ergänzt. Die Versuche, bei denen sich stärkere Abweichungen zeigen (Spulen Nr. 26, 32, 47 [vgl. zu diesen Nr. 15] und 36, 37, 40, 43, 52), fallen, wie die vorhin erwähnten Schaubilder zeigen, ganz offensichtlich aus der Reihe der übrigen heraus; bei ihnen müssen irgend welche gröbere Versehen vorgekommen sein.

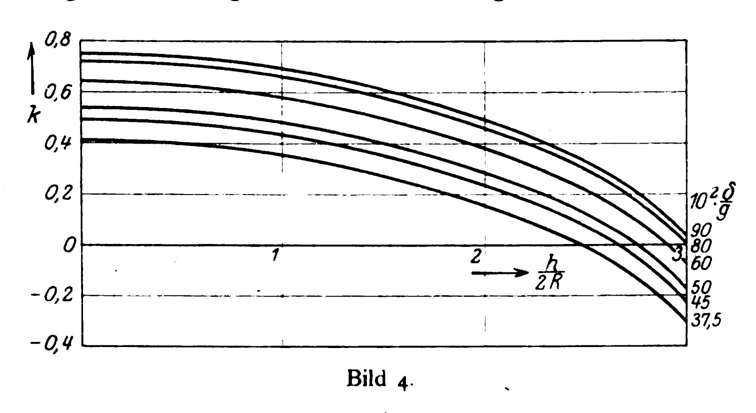


Bild 4.

24. Wir dürfen die Darstellung, Bild 4, dahin deuten, daß die Strassersche Formel aus zwei Gründen nicht genau zutrifft: erstens gilt sie nur für kurze Spulen (vgl. Nr. 18); mit wachsendem $\frac{h}{2R}$ liefert sie in immer steilerem Abfall zu kleine Werte, in der Nähe von $\frac{h}{2R} = 4$ wird die berechnete Induktivität sogar bereits negativ. Zweitens aber zeigen die Schäferschen Versuche, daß der Einfluß der Stromverdrängung auf die Induktivität von Spulen ziemlich beträchtlich sein kann und mit der Wicklungsenge $\frac{\delta}{g}$ wächst. Bemerkenswert ist dabei, daß der Faktor k auch bei einer Wicklungsenge von annähernd 100% offenbar nicht gleich 1 wird. Dies Ergebnis ist nicht unwahrscheinlich. Der Strom kann sich bei ganz hohen Wechselzahlen schließlich nicht etwa völlig zu einer Schraubenlinie vom Halbmesser $R_0 - \varrho$ zusammenziehen; denn dann würde die Induktivität unendlich werden. Nur in dem Sonderfall rechteckigen Drahtquerschnittes und 100%iger Wicklungsenge[1]) kann der Strom völlig in der Innenfläche des von der Spule gebildeten Hohlzylinders verlaufen. Bei kreisförmigem Querschnitt und wachsender Ganghöhe dagegen muß das elektromagnetische Feld mehr nach außen und in die Zwischenräume zwischen den Windungen hineinrücken; und dies hat zur Folge, daß der wirksame Spulenradius sich vergrößert.

Qualitativ stimmen diese Ergebnisse mit Versuchen von Esau überein[2]).

[1]) Es ist dies der von Sommerfeld zuerst (Ann. d. Phys. **15**, S. 673—708, 1904) behandelte Fall. Die Stromverteilung bei kreisförmigem Drahtquerschnitt und verschwindendem Windungsabstand ist durch Bild 3, Ann. d. Phys. **24**, S. 627, 1907 veranschaulicht.

[2]) A. Esau, Ann. d. Phys. **34**, S. 57—80, 1911.

III. Die Kapazität.

A. Berechnung der Eigenkapazität.

25. Die Messung der Induktivität war bei einer größeren Zahl von Spulen nicht gelungen, weil die entsprechenden Brückenverschiebungen $\mathfrak{v}_k$ (vgl. Nr. 8) zu groß waren, um mit der Versuchsanordnung Schäfers gemessen werden zu können. Für die Brückenverschiebungen $\mathfrak{v}_b$ dagegen liegen lückenlose Versuchsergebnisse vor. Um diese auszunutzen, habe ich die Kapazität der Längeneinheit überall dort, wo $\mathfrak{v}_k$ nicht meßbar war, nach Gleichung (4) aus der gemessenen Verschiebung $\mathfrak{v}_b$ und der berechneten Induktivität der Längeneinheit $\mathfrak{s}$ hergeleitet. Letztere wurde dabei mit dem zugehörigen Faktor $k_{ber.}$ (vgl. Nr. 22) nach den Gleichungen (22) und (18) ermittelt; die entsprechenden $\frac{\mathfrak{s}}{2}$ sind in Tab. 1 eingetragen, aber mit einem * versehen, um darauf aufmerksam zu machen, daß es keine gemessenen Werte sind.

26. Die aus den Schäferschen Messungen nach den Nrn. 8, 9 und 25 berechneten Kapazitäten zeigen eine starke Abhängigkeit vom Drahtabstand. Da die Kapazität zweier paralleler Zylinder vom Halbmesser R und Achsenabstand d dem $\lg\frac{d}{R}$ umgekehrt proportional ist, so lag es nahe, die gemessenen $\mathfrak{c}$ versuchsweise mit $\lg\frac{d}{R}$ zu multiplizieren. Der Erfolg war überraschend: das Produkt wurde bei den nicht mit * versehenen Spulen (bei den andern waren die $\mathfrak{c}$ damals noch nicht berechnet) so konstant, daß ich zunächst vermutete, die ganze gemessene Kapazität rühre von der Gegenspule her.

Zwei Umstände stimmen jedoch hiermit nicht: erstens lautet die genaue Formel für die Kapazität der Längeneinheit zweier paralleler leitender Zylinder:

$$\mathfrak{c} = \frac{\pi\varepsilon}{\lg\zeta}, \tag{23}$$

wo

$$\zeta = \frac{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - R^2}}{R} \tag{24}$$

ist; mit dieser Formel verschlechtert sich aber die Übereinstimmung. Und zweitens lieferten die nachträglich nach Nr. 25 berechneten Kapazitäten bei der Multiplikation mit $\lg\zeta$ Werte, die mit wachsendem Drahtabstand stark zunehmen.

Der Einfluß der Gegenspule überwiegt daher wahrscheinlich nur bei den dünneren Spulen; bei den dickeren dagegen macht sich offenbar neben der durch die Gegenspule influenzierten Ladung auch noch die Eigenladung der Spule — der eigentliche Gegenstand unserer Untersuchung — bemerkbar entsprechend dem Ansatz

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{l} + \mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \varkappa\frac{\pi\varepsilon}{\lg\zeta}, \tag{25}$$

wo $\mathfrak{l}$ die „Eigen-" oder „Längs"-Kapazität, d. h. den Grenzwert der Kapazität für unendlich großen Spulenabstand, $\mathfrak{q}$ die bei dünneren Spulen allein genauer meßbare „Gegen-" oder „Quer"-Kapazität bedeutet. Den empirischen Faktor $\varkappa$ füge ich hinzu, weil (23) für den Vollzylinder, aber nicht für die Spule abgeleitet ist.

27. Selbstverständlich war es beim Beginn meiner Berechnungen sehr zweifelhaft, ob es überhaupt gelingen würde, die Eigenkapazität nach (25) einigermaßen sicher zu bestimmen. Dies kann nur dann gelingen, wenn sie nicht zu klein ist im Vergleich zur Querkapazität und wenn neben der in (25) bereits angedeuteten Abhängigkeit der Querkapazität von ζ (also von R und d) auch der absolute Wert der letzteren hinreichend genau festgelegt werden kann.

Das nächste Ziel mußte daher die Bestimmung von $\varkappa$ sein. Ich berechnete es einfach durch Kombination der für d = 5 und 15 cm geltenden Werte auf Grund der Gleichung (25). Das auf diese Weise bestimmte $\varkappa$ ist sehr inkonstant. Bei den dickeren Spulen nimmt es in der Regel mit der Spulenlänge ab; im Mittel aber liegt es sowohl bei den dünnen, als auch bei den mitteldicken und bei den dicken Spulen zwischen 1,2 und 1,4.

28. Dieses Ergebnis ist insofern ein gewisser Erfolg, als die gefundene Zahl $\varkappa$ von R nahezu unabhängig ist und ihre Größenordnung unseren Erwartungen entspricht. Wie ist es aber zu erklären, daß $\varkappa$ deutlich größer ist als 1? Es ist doch sehr unwahrscheinlich, daß die Querkapazität der Spulen größer sein könnte als die der Zylinder. Die Erklärung liegt darin, daß unsere Spulen ja begrenzt sind und daß bei begrenzten Spulen gerade wie bei begrenzten Zylindern ein besonderer Endeinfluß berücksichtigt werden muß. Diesem kann man nach einer Ableitung, die ich gelegentlich[1]) gegeben habe, durch den Ansatz

$$\varkappa = \varkappa' \left(1 + K \frac{2R}{h}\right) \tag{26}$$

Rechnung tragen. $\varkappa'$ und K sind dabei zwei neue empirisch zu bestimmende Konstante, die sich leicht durch Kombination der für die Spulenlängen 2 und 6 cm geltenden Werte berechnen lassen.

Die auf diese Weise gefundenen $\varkappa'$ liegen um die Zahl 1 herum: die Mittelwerte sind

für die Spulen 1—18:	1,118
19—36:	1,012
40—54:	0,972
für alle Spulen zusammen[2])	1,034.

Im einzelnen schwanken allerdings auch die $\varkappa'$ noch ziemlich stark. Trotzdem habe ich mich für berechtigt gehalten, $\varkappa'$ versuchsweise gleich 1 zu setzen, also anzunehmen, daß die Querkapazität der Doppelspulen, von Nebeneinflüssen abgesehen, auch dem Absolutwerte nach gleich der Querkapazität der Parallelzylinder sei. Wir werden sehen, daß wir uns mit dieser Annahme jedenfalls nicht in Widerspruch setzen mit den Messungsergebnissen.

29. Die zweite Konstante K folgt nun einfach nach (26) aus

$$K = \frac{h}{2R}(\varkappa - 1). \tag{27}$$

Da sie sich naturgemäß nur sehr unsicher bestimmen läßt, habe ich aus jedesmal 18 Werten Mittelwerte gebildet und nur diese weiter verwendet:

für die Spulen 1—18: K = 0,73 (Schwankung zwischen — 0,03 und + 1,77)
„ „ „ 19—36: „ 0,53 („ „ + 0,15 „ + 1,05)
„ „ „ 37—54: „ 0,38 („ „ — 0,38 „ + 0,65)

30. Die Mittelwerte[3]) aus den hiernach und mit $\varkappa' = 1$ endgültig nach

$$c_{\text{korr.}} = I = c - q = c - \left(1 + K\frac{2R}{h}\right)\frac{\pi\varepsilon}{\lg\frac{\cdot}{\cdot}} \tag{28}$$

berechneten Eigenkapazitäten stehen in Spalte 11 der Tabelle 1.

[1]) Vgl. J. Wallot, a. a. O. Nr. 93 und 94. Um bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung zu bekommen, habe ich allerdings damals empirisch bei K noch $\log^{10}\zeta$ zugefügt; ich lasse diesen Faktor hier als theoretisch nicht begründet weg.

[2]) Der zu den Spulen 37—39 gehörige Wert wurde dabei weggelassen.

[3]) Bei den Spulen Nr. 39, 49 und 52 wurden die für d = 5 cm gefundenen Zahlen bei der Mittelbildung nicht verwertet.

Zur Probe habe ich untersucht, ob durch die so gefundenen $c_{korr.}$ die beobachteten c innerhalb der Versuchsfehler dargestellt werden. Die Übereinstimmung ließ tatsächlich nur selten zu wünschen übrig; durch unsere verschiedenen Mittelbildungen haben wir also keine Gesetzmäßigkeiten verwischt.

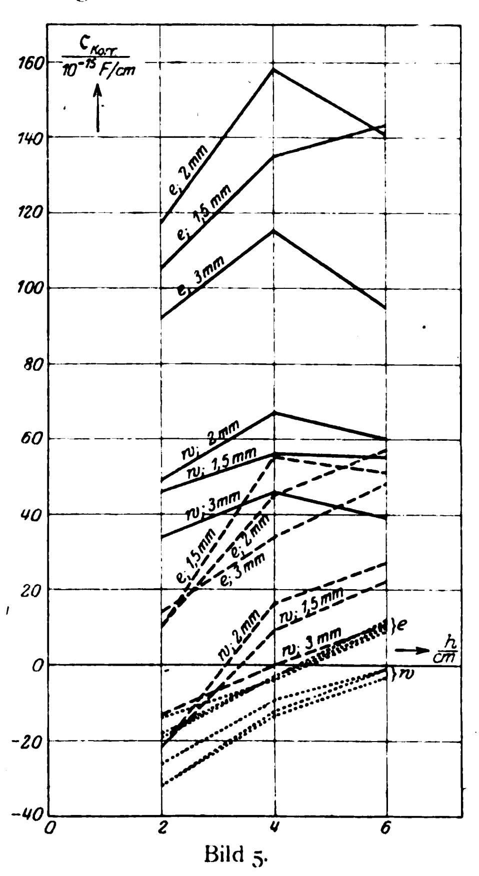


Bild 5.

Daß ein Teil der gefundenen Eigenkapazitäten negativ geworden ist, braucht keinen Anstoß zu erregen. Bei den dünneren Spulen ist die Eigenkapazität so klein, daß ihr absoluter Wert neben der Querkapazität nicht mit Sicherheit bestimmt werden kann. Hätten wir unsere Rechnung bei diesen Spulen mit einem nur wenig kleineren Wert der Konstanten K durchgeführt, so wären die Eigenkapazitäten zum größten Teil positiv ausgefallen.

31. Überblicken wir den Weg, der zur Trennung der Quer- und Längskapazität geführt hat und die in Tabelle 1 niedergelegten Resultate, so erkennen wir eine auffallende Verschiedenheit in dem Verhalten dieser beiden Kapazitäten. Die Querkapazität hat offenbar mit den feineren Einzelheiten der Spulengestalt nur sehr wenig zu tun; denn sonst wäre es uns nicht gelungen, den Einfluß der Gegenspule durch eine Formel auszuschalten, die nur für den Zylinder mit in sich geschlossener Mantelfläche abgeleitet ist. Der Anteil der Kapazität dagegen, den wir als „Eigenkapazität" gedeutet haben, zeigt eine ganz deutliche, sicher nicht von Versuchsfehlern oder von den Mängeln der Rechnung herrührende Abhängigkeit nicht nur von dem Spulendurchmesser, sondern auch von der Spulenlänge und vor allem auch von der Wicklungsenge. Anschaulich dargestellt ist dies in Bild 5, wo $c_{korr.}$ als Funktion der Spulenlänge aufgetragen ist. Die ausgezogenen Linien beziehen sich auf die dicken, die gestrichelten[1]) auf die mitteldicken, die punktierten auf die dünnen Spulen; „e" bedeutet „enge Wicklung", „w" „weite Wicklung"; hinter diesen Buchstaben ist bei den dickeren Spulen die Drahtdicke angeschrieben.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß der hier hervorgehobene Unterschied zwischen den beiden Kapazitäten nur ein scheinbarer ist.

B. Deutung der Ergebnisse.

32. **Formeln für die Spulenkapazität.** Der Begriff der Kapazität ist bekanntlich exakt nur für das statische Feld definiert. Die übliche Definition, die eine gewisse, sozusagen „typische" Potentialverteilung im Felde voraussetzt, hat — wenn wir von dem Grenzfall des vollkommenen Kondensators absehen — für elektrodynamisch beanspruchte Leiter nur eine geringe Bedeutung; denn auf diesen variiert ja das Potential im allgemeinen von Stelle zu Stelle, und die Kenntnis der Ladung für eine begrenzte Zahl typischer Potentialverteilungen reicht nicht

[1]) Bei ihnen sind die Anschriften e; 1,5 mm und e; 2 mm aus Versehen miteinander vertauscht.



mehr aus, die Ladung für eine beliebige der unzählig vielen möglichen Potentialverteilungen zu berechnen.

Die wirksame Kapazität unserer mit Hochfrequenz beanspruchten Spulen werden wir im folgenden definieren[1]) als die Gesamtladung eines Vorzeichens, die bei der betreffenden Potentialverteilung auf ihnen sitzt, wenn zwischen ihren Enden eine Potentialdifferenz gleich der Spannungseinheit besteht.

33. Diese Definition liegt auch den beiden theoretischen Formeln zugrunde, mit denen wir uns im folgenden vorzugsweise beschäftigen werden[2]). Es sind dies die Formeln von

Drude (1902)[3])

$$\mathfrak{C} = \varepsilon \cdot 2\pi R \cdot 4\alpha \frac{2 + \frac{h^2}{R^2} + \frac{R^2}{h^2}}{10 + 4\frac{h^2}{R^2} + 3\frac{R^2}{h^2}} = \varepsilon \cdot 2\pi R \cdot 4\alpha f. \qquad (29)$$

und Gothe (1920)[4])

$$\mathfrak{C} = \varepsilon \cdot 2\pi R \cdot 1{,}445 = 402 \cdot \frac{2R}{cm} \cdot 10^{-15}\,F. \qquad (30)$$

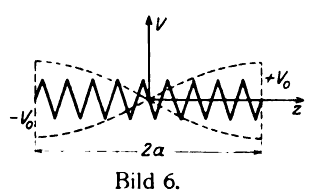


Bild 6.

Der in (29) vorkommende Faktor α ist ein empirischer Faktor, der einer Tabelle Drudes entnommen werden kann.

34. Beide Formeln beziehen sich auf die frei endigende mit der Grundfrequenz schwingende Spule, wie sie in Bild 6 dargestellt ist. Drude und Gothe vernachlässigen die Wechselwirkung zwischen unmittelbar benachbarten Windungen; in ihren Formeln kommt daher weder die Ganghöhe, noch die Drahtdicke vor. Den in dem Bild durch Sinuslinien angedeuteten Potentialverlauf berücksichtigen sie in etwas verschiedener Weise: Drude denkt sich die Spule einfach durch ihre beiden entgegengesetzt geladenen äußersten Windungen ersetzt und trägt dann den auf den inneren Windungen sitzenden Ladungen nur durch den empirischen Faktor α Rechnung. Gothe dagegen schneidet in Gedanken das mittlere Drittel der Spule heraus; die beiden äußeren Drittel läßt er sich zu zwei ebenso langen Hohlzylindern verschmelzen, auf denen er sich entgegengesetzte statische Ladungen sitzend denkt. Da die beiden Verfasser die wirksame Spulenkapazität in derselben Weise definieren, so müssen ihre Formeln Werte von derselben Größenordnung geben. In der Tat ist das der Fall. Setzt man nämlich (vgl. (29) und (30)) $4\alpha f = 1{,}445$ und nimmt man für α den von Drude angegebenen Mittelwert 1,26[5]), so wird der Bruch $f = 0{,}287$, während eine einfache Diskussion zeigt, daß f nach seiner Definition (29) von dem Anfangswert $\frac{1}{3}$ (bei $h = 0$) langsam bis zu dem Minimum 0,231 (bei $h = R\sqrt{2}$) sinkt und dann allmählich bis zu dem Grenzwert $\frac{1}{4}$ (bei $h = \infty$) ansteigt. Die Übereinstimmung zwischen den Gleichungen (29) und (30) ist daher so gut, wie man sie erwarten kann angesichts der Unsicherheit der Voraussetzungen, auf denen sie aufgebaut sind; wir werden deshalb unseren Betrachtungen hauptsächlich die einfachere der beiden Formeln, die Gothesche, zugrunde legen.

[1]) Absichtlich schneide ich die Definition ganz auf den speziellen Fall zu, der uns hier beschäftigt. Eine allgemeine völlig exakte Definition der Kapazität läßt sich wohl überhaupt nicht geben.

[2]) In den Nrn. 54—56 werde ich kurz noch auf einige andere Formeln eingehen.

[3]) P. Drude, Ann. d. Phys. 9, S. 327, Gleichung (7), 1902.

[4]) A. Gothe, Arch. f. Elektrot. 9, S. 19, 1920.

[5]) P. Drude, a. a. O. S. 328.

35. Vergleich mit den Messungen anderer Beobachter. Bevor wir uns den Schäferschen Messungen zuwenden, wollen wir untersuchen, wie weit die Formeln von Drude und Gothe bis jetzt von der Erfahrung bestätigt sind.

Drude hat seine Formel durch Messungen an frei endigenden Spulen — für diese war sie ja abgeleitet — nur indirekt mit der Erfahrung verglichen. Er setzt den Ausdruck (29) einfach in die Thomsonsche Gleichung ein ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, $l =$ Länge des Spulendrahts)

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\mathfrak{S}\mathfrak{C}} = 2\pi c \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 l^2}{4\pi h} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi R \cdot 4\alpha f} \tag{31}$$

und bestimmt dann aus dem gemessenen λ und den bekannten Abmessungen seiner Spulen den empirischen Faktor α. Er findet für ihn Werte, die in dem von ihm untersuchten Bereich zwischen 1,80 und 0,80 schwanken[1]). Da α nach seiner Theorie etwas größer als 1 sein soll, so stimmt seine Formel wenigstens der Größenordnung nach mit der Erfahrung. Die starke Inkonstanz von α rührt aber offenbar davon her, daß die für die Induktivität benutzte Formel nur eine rohe Näherungsformel ist: sie gibt eine viel zu geringe Abhängigkeit der Induktivität von der Spulenlänge[2]), und dies kommt dann in der Inkonstanz von α zum Ausdruck.

Tabelle 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Spule Nr.	2R	2a	N	g	δ	λ	$\mathfrak{S}_0$	$\frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 \mathfrak{S}_0}$	$\mathfrak{C}$ theor.	$\frac{\lambda^2}{8\pi c^2 \mathfrak{S}_0}$
	cm			mm		m	10^{-8} H	10^{-12} F		
1	19,75	46,8	580	0,8	0,3	645	22,5	5,2	7,9	8,2
2	37,25	7,45	172	0,433	0,25	766,5	16,6	10,0	15,0	15,7

36. Gothe hat seine Formel auf zwei frei endigende, fern von andern Körpern aufgehängte Spulen angewandt, deren Abmessungen aus den Spalten 2—6 der Tab. 2 hervorgehen. Er setzt die gemessene Eigenwellenlänge λ (Spalte 7) und die mit Niederfrequenz bestimmte Induktivität $\mathfrak{S}_0$ (Spalte 8) in die Thomsonsche Formel ein und stellt fest, daß die auf diese Weise erhaltenen Kapazitäten (Spalte 9) kleiner sind als die nach (30) berechneten (Spalte 10). Zur Erklärung dieses Widerspruches zwischen Theorie und Erfahrung weist er auf die ungleichmäßige Stromverteilung auf der Spule hin: an ihren Enden liegen Stromknoten; wie bei den Schäferschen Versuchen wird daher die Induktivität der einzelnen Windung um so weniger wirksam sein, je näher sie den Spulenenden liegt.

37. Der Bruchteil der „totalen" Induktivität, der infolge der Ungleichmäßigkeit der Stromverteilung allein „wirksam" wird, ist bekanntlich bei harmonischer Stromverteilung gleich $\frac{2}{\pi}$. Setzen wir dementsprechend statt der ganzen Induktivität $\mathfrak{S}_0$ nur $\frac{2}{\pi}\mathfrak{S}_0$ in die Thomsonsche Gleichung ein, so erhalten wir die Werte der Spalte 11. Vergleicht man diese mit den theoretischen Werten der Spalte 10 und beachtet man noch, daß die Induktivität mit der Frequenz abnimmt, so kommt man zu dem Ergebnis, daß die Formel von Gothe bei unseren einfachen Annahmen für die wirksame Kapazität seiner Spulen Werte liefert, die nur um sehr wenig zu klein sind.

[1]) A. a. O. S. 328.

[2]) Die Formel ist abgesehen von dem Faktor $2/\pi$ identisch mit der Formel (26) bei Schäfer, a. a. O. Mit dieser vergleiche man die Darstellung ebenda S. 46.

38. Wir haben dabei von dem Satze Gebrauch gemacht, daß die wirksame Induktivität $\mathfrak{S}$ einer Spule von der Länge $2a$ berechnet werden kann nach

$$\mathfrak{S} = \frac{2}{\pi} \cdot \mathfrak{s} \cdot 2a. \tag{32}$$

Ganz ähnlich gilt für ihre wirksame Kapazität bei harmonischer Potentialverteilung die Gleichung

$$\mathfrak{C} = \frac{2}{\pi} \cdot c \cdot \frac{a}{2} = \frac{ca}{\pi}. \tag{33}$$

$\mathfrak{s}$ und c sind die Koeffizienten, aus denen man nach Gleichung (1) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen berechnen kann[1]); sie sind zugleich die Koeffizienten, die man bei allen Meßmethoden erhält, die, wie die Schäfersche, auf den Kirchhoffschen Ansätzen beruhen. Setzt man (32) und (33) in die Thomsonsche Gleichung ein, so erhält man

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\mathfrak{S}\mathfrak{C}} = c \cdot 4a \sqrt{c\mathfrak{s}} = c \cdot \frac{4a}{v},$$

also

$$v\tau = 4a,$$

wie es sein muß[2]).

39. Wenn man die Formeln von Drude und Gothe auf solche Spulen von der Länge $2a$ anwenden will, die (vgl. Bild 7, I) an ihren Enden (also in den Punkten $z = \pm a$) durch konzentrierte Kapazitäten belastet oder kurzgeschlossen sind, so muß man genau genommen darauf achten, daß sich durch die angeschalteten Kapazitäten im allgemeinen die Potentialverteilung auf den Spulen ändert. Man kann diesem Einfluß leicht etwa in der folgenden Weise Rechnung tragen. $\mathfrak{s}$ und c seien die mittlere Induktivität und die mittlere Kapazität der Längeneinheit der betreffenden Spule; dann wird die mittlere Wellengeschwindigkeit längs der Spule gemäß (1) zu berechnen sein nach

$$v = \frac{1}{\sqrt{c\mathfrak{s}}},$$

Setzen wir nun

$$v \cdot \frac{\tau}{2} = 2a_0,$$

so werden wir in erster Näherung annehmen dürfen, daß das Potential auf der Spule nach der Gleichung

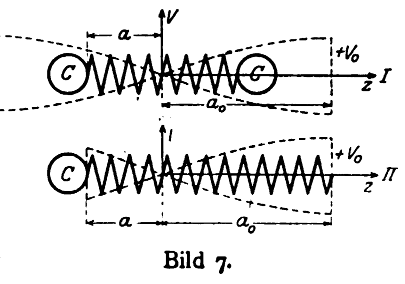


Bild 7.

$$V = V_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{a_0}$$

variiert. Die Ladung eines Vorzeichens, die in irgend einem Augenblick auf der Spule sitzt, wird daher gleich

$$Q = \int_0^a c\,dz\, V_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{a_0} = \frac{ca_0}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \frac{a}{a_0}\right) 2V_0$$

und die wirksame Kapazität der Spule (vgl. Nr. 32) gleich

$$\mathfrak{C} = \frac{Q}{2V_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{a}{a_0}} = \frac{ca}{\pi} \cdot \frac{a_0}{a} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \frac{a}{a_0}. \tag{34}$$

---

[1]) Genau genommen müssen $\mathfrak{s}$, c und v als Mittelwerte, die Gleichung (1) als Näherungsgleichung angesehen werden. Eine Spule verhält sich elektromagnetischen Wellen gegenüber — besonders in der Nähe ihrer Enden — bis zu einem gewissen Grade wie eine Leitung stetig veränderlicher Charakteristik. Bei einer solchen Leitung kann man nicht mehr von einer einzigen bestimmten wie eine Konstante zu behandelnden Fortpflanzungsgeschwindigkeit sprechen. Vgl. J. Wallot, Ann. d. Phys. **60**, S. 734—762, 1919.

[2]) Vgl. z. B. A. Slaby, Elektrot. Zeitschr. **25**, S. 712, 1904.

40. Kennt man also das von der Größe der angeschalteten konzentrierten Kapazität abhängige Verhältnis $\frac{a}{a_0}$, so kann man nach (34) aus der mittleren Kapazität der Längeneinheit der betreffenden Spule ihre wirksame Kapazität $\mathfrak{C}$ berechnen. Wie man sieht, liegt $\mathfrak{C}$ zwischen den beiden Grenzwerten $\frac{ca}{\pi}$ und $\frac{ca}{4}$; dabei gilt in Übereinstimmung mit (33) $\frac{ca}{\pi}$ für $a = a_0$, d. h. für die frei endigende Spule, $\frac{ca}{4}$ dagegen für sehr kleine $\frac{a}{a_0}$, d. h. für den Fall, daß eine große konzentrierte Kapazität angeschaltet ist[1]). Der Umstand, daß das Potential auf der belasteten Spule anders verteilt ist als auf der frei endigenden, ist also — wie zu erwarten und von Gothe stillschweigend angenommen — nur von geringem Einfluß auf die Wirksamkeit der Kapazität.

41. Was nun die Kapazität der Längeneinheit c betrifft, so wollen wir versuchsweise annehmen, daß sie entsprechend den Ansätzen von Drude und Gothe (29) und (30) der Spulenlänge annähernd umgekehrt proportional sei. Ergibt die Erfahrung etwas anderes[2]), so werden wir dies durch Nebeneinflüsse erklären dürfen. So ist eine unmittelbare Einwirkung der angeschalteten Kondensatoren auf die Spulenkapazität nicht von der Hand zu weisen; auch dürfte der Einfluß etwa benutzter Zuleitungsdrähte zu den Kondensatoren oder der durch das Anschalten hervorgerufenen Formänderungen der Spulen nicht ganz zu vernachlässigen sein.

42. Wir gehen zunächst kurz auf eine Messung Drudes ein, der die Schaltung II (Bild 7) zugrunde lag. C war eine Kugel vom Halbmesser 3,9 cm; der Durchmesser der Spule betrug 3 cm. Die Längen a und a_0 waren experimentell zu 4,5 und 10,5 cm bestimmt. Für c fand Drude selbst durch Rechnung nach der Kirchhoffschen Methode

$$c = 0{,}518 \cdot \frac{10^{-12}\,\mathrm{F}}{\mathrm{cm}}. \tag{35}$$

Nun liefert die Gothesche Formel für die wirksame Kapazität einer frei endigenden Spule vom Durchmesser 3 cm den Wert

$$\mathfrak{C}_0 = 402 \cdot 3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{F} = 1{,}206 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}.$$

Der von Drude untersuchten Spule käme also nach (33), wenn sie frei endigte, die folgende mittlere Kapazität der Längeneinheit zu:

$$c = \frac{\mathfrak{C}_0 \pi}{\frac{a + a_0}{2}} = \frac{1{,}206\,\pi \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}}{7{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}505 \cdot \frac{10^{-12}\,\mathrm{F}}{\mathrm{cm}},$$

was mit (35) besser stimmt, als wir erwarten dürfen[3]).

43. Wir betrachten ferner Messungen, die Gothe an Spulen angestellt hat, welche durch Kondensatoren von der Kapazität C kurz geschlossen waren. Die vier ersten Spalten der Tabelle 3 enthalten die unmittelbaren Ergebnisse seiner Versuche; es handelt sich übrigens um dieselben Spulen wie bei Tabelle 2.

---

[1]) Dieses Resultat folgt auch unmittelbar aus der Anschauung, da in diesem Sonderfall das Potential auf der Spule linear ansteigt.

[2]) Bei der Deutung von Versuchen ist zu beachten, daß im allgemeinen auch die Induktivität der betr. Kreise durch die Anschaltung der Kondensatoren geändert werden kann.

[3]) Die Diskussion Drudes a. a. O. S. 337, die zu einer noch besseren Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung führt, halte ich nicht für richtig, da Drude vor allem übersieht, daß er die Kapazität der Längeneinheit durch seine Gleichung (14) anders definiert als die wirksame Kapazität der ganzen Spule durch seine Gleichung in der Mitte der S. 326.

Tabelle 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Spule Nr.	C	$\mathfrak{S}$	λ	ca	$\frac{a}{a_0}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{C}_0$	$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}$	$\mathfrak{C}'$
	10^{-12} F	10^{-3} H	m	$10\,7^{12}$ F		10^{-12} F			10^{-12} F
1	77,1	22,5	2610	48,5	0,339	12,4	7,9	1,56	8,2
2	77,1	16,6	2370	105,7	0,474	27,7	15,0	1,85	18,3
1	39,36	22,5	1950	48,1	0,452	12,6	7,9	1,58	8,3
2	39,36	16,6	1780	82,3	0,557	22,0	15,0	1,47	14,5

Um für diesen Fall die wirksame Kapazität nach (34) berechnen zu können, habe ich zunächst (Spalten 5 und 6) c a und $\frac{a}{a_0}$ ermittelt nach

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 \mathfrak{S} C} = \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi c}{\lambda} \sqrt{\mathfrak{S} \frac{c a}{2}}}{\frac{2\pi c}{\lambda} \sqrt{\mathfrak{S} \frac{c a}{2}}} \tag{36}$$

und

$$\frac{a}{a_0} = \frac{4c}{\lambda} \sqrt{\mathfrak{S} \frac{c a}{2}}. \tag{37}$$

(Beide Gleichungen ergeben sich leicht nach der Kirchhoffschen Methode.) Die Spalten 7, 8 und 9 enthalten die wirksame Kapazität $\mathfrak{C}$ der belasteten Spulen nach (34), die Kapazität $\mathfrak{C}_0$, welche diese Spulen nach Gothe hätten, wenn sie frei endigten, und das Verhältnis der beiden letztgenannten Größen.

44. Die Tabelle zeigt, daß die Kapazität der durch die konzentrierten Kapazitäten C kurz geschlossenen Spulen, wenn man sie so definiert, wie wir es getan haben, empirisch größer ist als die nach Gothe berechnete Kapazität der entsprechenden frei endigenden Spulen. Welcher der in Nr. 41 genannten Gründe für diese Unstimmigkeit in erster Linie verantwortlich zu machen ist, muß dahingestellt bleiben, da Gothe keine näheren Angaben macht über die Art und Weise, wie er seine konzentrierten Kapazitäten zugeschaltet hat[1]).

45. Man kann nun freilich die Kapazität der kurzgeschlossenen Spule mit Gothe selbst auch anders definieren, nämlich als die Kapazität $\mathfrak{C}'$, die man zu der konzentrierten Kapazität C hinzufügen muß, um nach der Thomsonschen Formel mit der Gesamtinduktivität $\mathfrak{S}$ die richtige Wellenlänge zu erhalten. Diese Definition hat natürlich nur bei annähernd gleichmäßiger Stromverteilung auf der Spule Sinn. Entwickelt man in (36) die Tangente in eine Reihe, so erkennt man, daß für kleine $\frac{a}{a_0}$

$$\mathfrak{C}' = \frac{c a}{6} \tag{38}$$

ist. Nun ist aber nach (34) in diesem Grenzfall

$$\mathfrak{C} = \frac{c a}{4}, \tag{39}$$

[1]) Außer Drude und Gothe haben noch viele andere Beobachter gelegentlich die Kapazität von Spulen gemessen. Selten wird es sich dabei um die reine Eigenkapazität gehandelt haben. Die Größenordnung der gefundenen Werte stimmt aber in allen Fällen, die ich in der Literatur gefunden habe, mit der Formel (30) überein.

also ist ex definitione (nicht empirisch)

$$\mathfrak{C}' = \frac{2}{3}\mathfrak{C} \tag{40}$$

und empirisch, wie Spalte 10 zeigt, $\mathfrak{C}'$ annähernd gleich $\mathfrak{C}_0$.

Die ziemlich gute Übereinstimmung zwischen $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}_0$, auf die Gothe hinweist[1]), rührt also im wesentlichen davon her, daß bei der Definition von $\mathfrak{C}'$ die volle Induktivität $\mathfrak{S}$ als wirksam angesehen wird. Sie ist aber kein Beweis dafür, daß die Kapazität einer irgendwie durch einen Kondensator kurz geschlossenen Spule ohne weiteres nach der Gotheschen Formel berechnet werden darf. Der Einwand, daß bei kleinem $\frac{a}{a_0}$ die Stromverteilung ja eine gleichmäßige sei, ist nicht stichhaltig, denn je kleiner $\frac{a}{a_0}$, um so kleiner ist die Zusatzkapazität neben der konzentrierten C, um so empfindlicher ist die erstere daher gegen auch nur kleine Änderungen von $\mathfrak{S}$.

46. Die Schäferschen Versuche. Schon aus den Schäferschen Messungen der Induktivität können wir mittelbar einen Schluß ziehen auf das Verhalten der Spulenkapazität, wenn wir noch ein empirisches Resultat Drudes[2]) über die Abhängigkeit der Eigenwellenlänge einer Spule von ihrer Windungszahl hinzunehmen. Nach Drude ist die Eigenfrequenz einer Spule von der Anzahl N ihrer Windungen unabhängig, wenn man sie bei gleicher Gesamtdrahtlänge l und bei gleichen Verhältnissen $\frac{h}{2R}$ und $\frac{g}{\delta}$ vergleicht. Etwas anschaulicher läßt sich dieser Satz so ausdrücken: Wickelt man auf einen gegebenen Kern von festem Durchmesser und fester Länge zuerst eine kleine Zahl Windungen aus dickem Draht, dann eine große Zahl Windungen aus dünnem Draht — jedoch so, daß in beiden Fällen die Wicklungsenge $\frac{\delta}{g}$ dieselbe ist —, so ist die Wellenlänge im zweiten Falle im Verhältnis der Windungszahl N größer als im ersten. Nach der Thomsonschen Formel muß also das Produkt $\mathfrak{S}c$ im zweiten Falle N^2mal größer sein als im ersten. Sucht man sich nun aber aus der Tabelle 1 solche Versuche zusammen, für die bei annähernd gleicher Spulenlänge, Spulendicke und Wicklungsenge die Windungszahl möglichst verschieden ist, so bemerkt man, daß die zugehörigen $\mathfrak{S}$ sehr nahe proportional N^2 sind. Daraus folgt, daß die Kapazitäten in beiden Fällen dieselben sein müssen, daß sie also in der Hauptsache nur von dem äußeren Umriß der Spulen abhängen können.

47. Zu diesem Ergebnis wie auch zu den in den Nrn. 32—45 gezogenen Schlüssen scheinen die Schäferschen Kapazitätsmessungen in einem starken Gegensatz zu stehen. Denn erstens sind die Kapazitäten $c_{korr.}$ sehr klein, zweitens wachsen sie mit der Spulenlänge h, drittens hängen sie stark von der Enge der Wicklung ab.

Man muß jedoch, wie ich glaube, das Folgende bedenken. Bei den Schäferschen Versuchen haben wir in Gestalt der Gegenspulen eine künstlich geschaffene sehr erhebliche „Erdkapazität". Solange die Spulen kurz sind, wird daher die eigentliche Spulenkapazität neben der Querkapazität überhaupt nicht meßbar sein, denn die von der einzelnen Spule ausgehenden Kraftlinien werden so gut wie ausnahmslos von der Gegenspule sozusagen weggefangen. An den kurzen Spulenstücken liegen nur ganz schwache Potentialdifferenzen, die gegen die Potentialdifferenzen zwischen Spule und Gegenspule fast gar nicht in Betracht kommen. Bei längeren Spulenstücken dagegen werden sich neben den Querpotentialdifferenzen wegen der gegenüber den Drähten stark verringerten Wellengeschwindigkeit auch

[1]) A. Gothe, a. a. O. S. 18 und 19.
[2]) P. Drude, a. a. O. S. 313.



die Längspotentialdifferenzen (die „dielektrische Rückleitung") bemerkbar machen müssen, bei ihnen wird daher die Eigenkapazität mit etwas größerer Genauigkeit meßbar werden.

48. Was heißt nun „lang" oder „kurz"? Offenbar kann der Vergleichsmaßstab nur die Wellenlänge sein, d. h. es muß ankommen auf das Verhältnis der tatsächlichen Spulenlänge h zu der Länge h' einer frei endigenden Spule, die gerade eine Viertelwellenlänge in sich aufnähme. Dieses Verhältnis $\frac{h}{h'}$ ist aber leicht auszurechnen. Es ist nämlich

$$4h' = v\tau$$

und nach (7)

$$\frac{h}{h'} = \frac{4h}{v\tau} = \frac{2}{\pi}\varphi = \frac{\varphi^0}{90^0}, \tag{41}$$

d. h. das Verhältnis $\frac{h}{h'}$ kann unmittelbar aus der früheren Ausrechnung der Größen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{c}$ entnommen werden.

49. Wir wollen nun untersuchen, ob entsprechend der soeben angedeuteten Erklärung das Verhältnis der Ladung Q, die auf einer der von Schäfer untersuchten Spulen sitzt, zu der Ladung Q_0, die auf dem genau entsprechenden ebenso langen Stück einer frei endigenden Spule von der Gesamtlänge h' sitzt (vgl. Bild 8), wirklich nur von $\frac{h}{h'}$ abhängt, ob also die Gleichung

$$Q = Q_0 f\left(\frac{h}{h'}\right) \tag{42}$$

gilt. Für Q und Q_0 wollen wir den von Schäfer gemessenen Koeffizienten $\mathfrak{c}$ und die wirksame Kapazität $\mathfrak{C}_0$ der frei endigenden Spule einführen. Dabei müssen wir beachten[1]), daß $\mathfrak{c}$ gleich der Ladung der Längeneinheit einer Spule ist für den Fall, daß diese Längeneinheit sich auf einem Potential gleich der Hälfte der Spannungseinheit befindet[2]). Wir können daher schreiben:

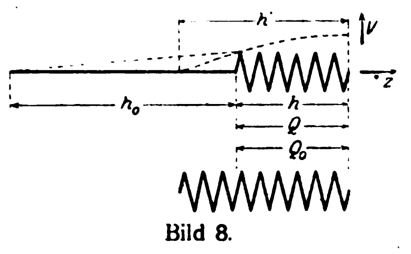


Bild 8.

$$Q = \int_{h'-h}^{h'} 2\mathfrak{c}\,dz \,.\, V_0 \sin\frac{\pi}{2}\frac{z}{h'} = \frac{2}{\pi}\mathfrak{c}\,h' \,.\, 2V_0 \sin\frac{\pi}{2}\frac{h}{h'} \tag{43}$$

und entsprechend

$$Q_0 = \frac{2}{\pi}\mathfrak{c}_0 h' \,.\, 2V_0 \sin\frac{\pi}{2}\frac{h}{h'} = \mathfrak{C}_0 \,.\, 2V_0 \sin\frac{\pi}{2}\frac{h}{h''}$$

also:

$$f\left(\frac{h}{h'}\right) = \frac{2\mathfrak{c}h'}{\pi\mathfrak{C}_0} \tag{44}$$

oder, wenn wir die Gothesche Formel für $\mathfrak{C}_0$ zugrunde legen, nach (30)

$$f\left(\frac{h}{h'}\right) = 1{,}586 \cdot \frac{h}{2R} \cdot \frac{h'}{h} \cdot \frac{\mathfrak{c}}{10^{-12}\,F\,cm^{-1}} \,. \tag{45}$$

50. In den Spalten 12 und 13 der Tabelle 1 ist die hiernach bestimmte Funktion f samt ihrem Argument $\frac{h}{h'}$ angegeben. In Bild 9 ist sie graphisch dargestellt[3]).

Infolge der geringen Genauigkeit der gemessenen $\mathfrak{c}$ ist die Streuung der f-Werte natürlich ziemlich groß. Aber das eine sieht man auf den ersten Blick: die bei der

[1]) Vgl. J. Wallot, a. a. O. S. 500.
[2]) In den Nrn. 38—45 war $\mathfrak{c}$ doppelt so groß.
[3]) Für die φ habe ich Mittelwerte genommen. Negative sind nicht eingetragen.

Eigenkapazität $c_{korr.}$ selbst beobachtete ausgesprochene Abhängigkeit von der Ganghöhe und der Drahtdicke (Bild 5) ist bei der Funktion f so ziemlich verschwunden[1]). Diese Abhängigkeit ist daher offenbar nicht der Spulenkapazität eigentümlich, sondern wird nur dadurch vorgetäuscht, daß die Induktivität mit zunehmender Windungszahl stark zunimmt, so daß die enggewickelte Spule einen größeren Teil der Wellenlänge in sich aufnimmt als die weitgewickelte und die gemessene Eigenkapazität sich daher mehr dem Grenzwert für die frei endigende Spule nähert.

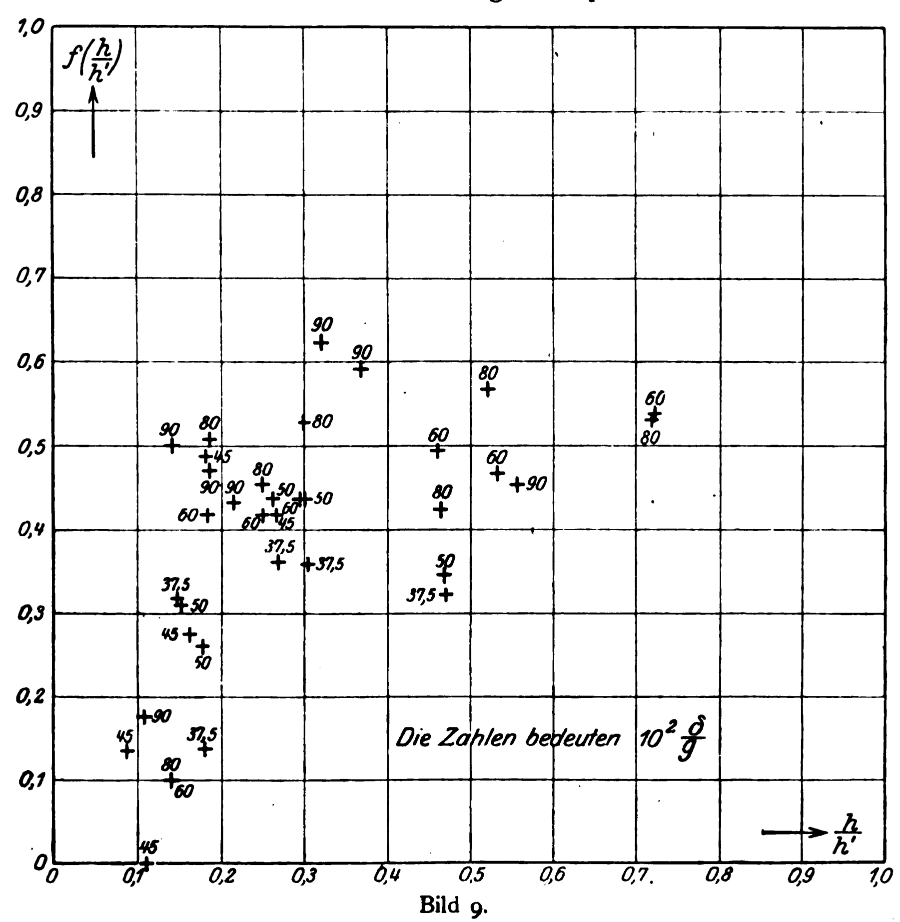


Bild 9.

51. Das Bild zeigt aber weiter mit ausreichender Sicherheit, daß eine geringe Abhängigkeit der Kapazität von der Wicklungsenge tatsächlich besteht. Bei der Mehrzahl der Versuche gehört, wie zu erwarten, zu der größeren Wicklungsenge die größere Funktion f, also auch die größere Kapazität[2]). Für $\frac{h}{h'} = 1$ muß die Funktion f nach ihrer Definition (42) gleich 1 werden. Dies kann natürlich durch die Schäferschen Versuche nicht bestätigt werden; aber es steht auch nicht im Widerspruch mit ihnen. Die Größenordnung ist jedenfalls die richtige.

52. Wie aus den Versuchen anderer Verfasser können wir demnach auch aus den Schäferschen Versuchen den Schluß ziehen, daß die Formeln von Drude und Gothe für die Kapazität der frei endigenden Spule nahezu die richtigen Werte liefern. Zugleich zeigen die Messungen — gerade weil sie auf die Eigenkapazität nicht unmittelbar, sondern auf einem Umwege schließen lassen —, wie

[1]) Man vergleiche daraufhin z. B. die Versuche 37 mit 54 oder 49 mit 53.

[2]) Die Werte, für welche dies nicht zutrifft, weichen schon im Bild 5 auffallend stark ab.



außerordentlich stark die Wirksamkeit der Eigenkapazität abhängt von der Art, wie die Spule im einzelnen Falle beansprucht wird.

53. Für die Abschätzung der Spulenkapazität in der Praxis dürfen wir aus unserer Diskussion, ohne allzusehr zu verallgemeinern, die folgenden Schlüsse ziehen:

Die Kapazitätswirkung einer in einen Hochfrequenzkreis eingeschalteten Spule ist in den meisten Fällen überhaupt keine Eigentümlichkeit der Spule selbst, sondern hängt im wesentlichen von ihrer zufälligen Lage relativ zu andern Leitern und Dielektriken ab. Die Spulenkapazität ist also meist nur zum kleinsten Teile „Eigenkapazität", in der Hauptsache nichts weiter als „Erdkapazität". Insbesondere gilt dies natürlich von der abgeschirmten, also künstlich mit besonderer Erdkapazität versehenen Spule, wie sie vielfach bei Präzisionsmessungen Verwendung findet. Die Ganghöhe und die Drahtdicke ist für die Erdkapazität so gut wie überhaupt nicht maßgebend; nur die Spulendicke und -länge, also ihr gröbster äußerer Umriß spielen eine Rolle.

Erst wenn man die Erdkapazität eigens — durch besondere Hilfsmittel — ausschaltet, wird die Eigenkapazität im allgemeinen merkbar. Auch sie aber hängt in erster Näherung nur von dem äußeren Umriß der Spule und, was nicht vergessen werden darf, von der Potentialverteilung, also von der Art ihrer Beanspruchung ab. Auf den Abstand der einzelnen Windungen voneinander, also gerade auf den Punkt, an den wohl jeder denkt, wenn er zum ersten Male von Spulenkapazität hört, kommt es praktisch überhaupt nicht an.

54. Die Formeln von Lenz und Keller. Außer Drude und Gothe haben auch Slaby[1]), Lenz[2]) und Keller[3]) Formeln für die Spulenkapazität angegeben. Zu den Gleichungen der beiden letztgenannten Verfasser möchte ich einige Bemerkungen machen.

Lenz hat im Jahre 1912 auf Grund sehr sorgfältiger theoretischer Untersuchungen die Formel

$$\mathfrak{C} = \varepsilon \cdot 2\pi R \cdot N \cdot \psi\left(\frac{\delta}{g}\right) \tag{46}$$

abgeleitet. ψ ist dabei eine Funktion der Wicklungsenge $\frac{\delta}{g}$, für die ich hier

$\frac{\delta}{g}$ =	12,5	25	50	100 Prozent
ψ =	0,52	1,01	1,04	∞

einige Werte angebe[4]). Auf einfachen elektrostatischen Betrachtungen dagegen beruht die Formel von Keller (1917)

$$\mathfrak{C} = \varepsilon \cdot 2\pi R \cdot \frac{\pi}{2(N-1)} \cdot \frac{1}{\lg \frac{g + \sqrt{g^2 - \delta^2}}{\delta}}. \tag{47}$$

Schon auf den ersten Blick fällt hier ein — bei großer Windungszahl — ungeheuerer Widerspruch zwischen den beiden Formeln (46) und (47) auf: (46) enthält N im Zähler, (47) N—1 im Nenner, während die Formeln von Drude und Gothe die Windungszahl N überhaupt nicht enthalten!

55. Daß bei Lenz der Faktor N im Zähler auftreten muß, ist nicht schwer einzusehen. Seine Ableitung[5]) ähnelt sehr den Betrachtungen in Nr. 45, wo wir für die Kapazität $\mathfrak{C}'$ einer Spule, auf der der Strom wie bei Lenz räumlich fast völlig konstant ist, den Wert

$$\mathfrak{C}' = \frac{c\,a}{6}$$

[1]) A. Slaby, Elektrot. Zeitschr. 24. S. 1007—1012, 1903 und a. a. O.
[2]) W. Lenz, Ann. d. Phys. 37, S. 923—974, 1912.
[3]) H. Keller, a. a. O.
[4]) Berechnet nach Lenz, a. a. O. S. 972.
[5]) A. a. O. S. 958—962.

abgeleitet hatten. Setzen wir $2a = Ng$, so wird $\mathfrak{C}' = \frac{N}{2} \cdot \frac{cg}{6}$, eine Formel, die mit der Lenzschen Gleichung (83) vollständig übereinstimmt, da cg nichts anderes ist als die von Lenz mit e_1 bezeichnete Größe. Der große Unterschied zwischen der Lenzschen Formel und den Formeln von Drude und Gothe liegt also nicht darin, daß bei Lenz die Windungszahl N als Faktor auftritt, sondern darin, daß das Lenzsche e_1 nach seiner Gleichung (85) von der Spulenlänge unabhängig ist, während die Kapazität der Längeneinheit c nach unserer Auffassung annähernd der Spulenlänge umgekehrt proportional sein muß.

Die Lenzsche Kapazität hat daher mehr den Charakter einer eigentlichen „Windungskapazität"; dafür spricht auch ihre starke Abhängigkeit von der Wicklungsenge: bei den am engsten gewickelten Spulen Schäfers ist e_1 fast sechsmal so groß wie bei den am weitesten gewickelten.

Bemerkenswert ist, daß Lenz selbst in seiner zweiten ausgezeichneten Spulenarbeit[1]) die eigentliche Windungskapazität völlig vernachlässigt und trotz dieser Idealisierung sehr nahe in Übereinstimmung mit der Erfahrung bleibt[2]).

56. Der Faktor $N - 1$ im Nenner der Kellerschen Formel rührt davon her, daß ihr Urheber die einzelnen Windungen einer Spule als lauter kleine hintereinandergeschaltete Kondensatoren auffaßt[3]). So einleuchtend dieser Vergleich auf den ersten Blick erscheinen mag, so erhebliche Bedenken erweckt er bei näherer Prüfung[4]). Auch die Versuchsresultate von Keller stimmen, soweit sie sich auf einlagige Spulen beziehen, der Größenordnung nach eher noch besser mit den Formeln von Drude und Gothe als mit seiner eigenen[5]). Trotzdem ist die Arbeit von Keller — gleich der seines Vorgängers Rietz[6]) — ein wertvoller Beitrag zur Aufklärung des Begriffs der Spulenkapazität. Denn aus beiden Abhandlungen geht hervor, daß die Kapazität mehrlagiger Spulen nicht sehr verschieden ist von der Kapazität ebenso langer und dicker ineinander gesteckter Zylinder; auch sie zeigen also, daß es auf die feineren Einzelheiten des Spulenbaus im wesentlichen nicht ankommt.

57. Die kritische Frequenz. Wir wollen nunmehr auch noch Stellung nehmen zu der Diskussion, die in den letzten Jahren in den elektrotechnischen Zeitschriften über das Verhalten der Spulen geführt worden ist. Da die Kapazität der Spulen erst in zweiter Näherung von ihrer Ganghöhe und von der Drahtdicke, in der Hauptsache dagegen nur von ihrem äußeren Umriß und von der Verteilung des Potentials auf ihnen abhängt, so kann eine Theorie, die sich auf der Kapazität der einzelnen Windung aufbaut nnd dieser Größe eine beherrschende Stellung zuweist, nicht das Richtige treffen. Die vorliegende Arbeit stellt sich daher entschieden auf die Seite von Rogowski[7]) und Gothe. Eine „kritische Frequenz", die von der Induktivität und Kapazität der einzelnen Windung abhinge, kann keine wesentliche Rolle spielen.

Clausthal i. Harz, Physikalisches Institut der Bergakademie, 31. Mai 1921.

[1]) W Lenz, Ann. d. Phys. **43**, S. 749—797, 1914.

[2]) Vgl. A. Gothe, a. a. O.; W. Geiß, Ann. d. Phys. **64**, S. 377—400, 1921.

[3]) Diese Auffassung führt allerdings, wie mir scheint, eher zu einer Formel, in der der Faktor N—1 durch N 2 ersetzt ist.

[4]) Vgl. W. Lenz, Ann. d. Phys. **43**, S. 756, 1914.

[5]) Man vergleiche die Werte der Kellerschen Tabelle 3, S. 35 mit dem nach der Gotheschen Formel berechneten Wert $K = 1{,}36 \cdot 10^{-5}$ MF. Der eine bei der Spule mit 940 Windungen gefundene Wert ist kein ausreichender Gegenbeweis. Man beachte auch, daß die Kapazität der Leitungen des Schwingungskreises bei Keller gleich $16{,}8 \cdot 10^{-5}$ MF war und daß eine quantitative Übereinstimmung schon wegen der künstlichen Erdkapazität der Spulen gar nicht erwartet werden darf.

[6]) W. Rietz, Ann. d. Phys. **41**, S. 543—569, 1913.

[7]) W. Rogowski, Arch. f. Elektrot., besonders **7**, S. 240—262, 1918.



Die Dämpfungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise bei vorherrschender Kopplung.

Von

Walter Grösser.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

In einer kürzlich erschienenen Mitteilung [1]) hat Herr Prof. Rogowski für die Dämpfungen zweier induktiv gekoppelter Schwingungskreise einfache, leicht diskutierbare Näherungsformeln aufgestellt. Seine Ergebnisse gelten für beliebige Verstimmung der beiden Kreise und für beliebig feste oder lose Kopplung. Nur liegt ihnen die Voraussetzung zugrunde, daß die Ohmschen Widerstände der Kreise einen gewissen kleinen, vom Grade der Kopplung abhängigen Wert nicht überschreiten.

Es ist sowohl von rein physikalischem Interesse, als auch für die Technik — insbesondere für die Theorie des Ziehens von Zwischenkreisröhrensendern — von Belang, auf ganz analoge Weise die Schwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Kreise zu behandeln. Dies soll — auf Veranlassung von Herrn Prof. Rogowski — im folgenden geschehen.

Über die Dämpfung bei kapazitiver Kopplung sind wir zwar schon bis zu einem gewissen Grade unterrichtet durch die für die Theorie gekoppelter Schwingungen grundlegende Arbeit von M. Wien [2]). Doch gelten die dort mitgeteilten Formeln nur für lose Kopplung und nur in unmittelbarer Nachbarschaft der Resonanzstelle. Unter diesen beiden Voraussetzungen sind daselbst die Dämpfungen der Koppelschwingungen berechnet — und zwar sowohl für den Fall, daß die Wirkung der Kopplung die vorherrschende ist, als auch für den gegensätzlichen Fall, daß die Wirkung der Dämpfung die der Kopplung überwiegt.

In vorliegender Arbeit beschäftigen wir uns nur mit dem Falle vorherrschender Kopplung, indem wir die Ohmschen Widerstände als hinreichend klein annehmen gegen die induktiven. Die Formeln für die Koppeldämpfungen, die wir erhalten werden, gleichen in ihrem Aufbau denen bei induktiver Kopplung [3]); doch ergeben sich bei näherer Diskussion bedeutende Unterschiede zwischen beiden Kopplungsarten, besonders was die Dämpfung der raschen Koppelschwingung anbetrifft. Die Resultate der Rechnung sind in Bildern aufgetragen und zum Teil im Bilde denen für induktive Kopplung gegenübergestellt. Ein Vergleich mit den von M. Wien a. a. O. aufgestellten Formeln für vorherrschende Kopplung zeigt Übereinstimmung in den Gliedern erster Ordnung.

Bevor im folgenden die Dämpfungen der Koppelschwingungen berechnet werden, wird — der Vollständigkeit halber und nur soweit später benötigt — die Theorie der ungedämpften Schwingungen bei kapazitiver Kopplung behandelt.

Außerdem wird zunächst versucht, eine in der Literatur vorhandene Lücke auszufüllen: es sind zwar verstreut hier und dort verschiedene experimentelle Möglichkeiten der kapazitiven Kopplung zweier elektrischer Schwingungskreise angegeben, doch fehlt es bisher an einer physikalischen Definition dieser Kopplungsart, die alle Spezialfälle von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zusammenfaßt und auf die gleiche Weise rechnerisch zu behandeln gestattet. Die Möglichkeit einer solchen zusammenfassenden Definition ist gegeben, sobald man auf den Maxwellschen Begriff der Potentialkoeffizienten eines Systems von isolierten Leitern zurückgeht.

[1]) W. Rogowski, Arch. f. Elektrotechnik IX., 427—438.
[2]) M. Wien, Wied. Ann. Physik. 61 151—189.
[3]) W. Rogowski, a. a. O.



I. Definition der kapazitiven Kopplung zweier Schwingungskreise.

Es sei ein System von n beliebig gestalteten voneinander isolierten Leitern K_1 bis K_n gegeben. Sie seien durch die Ladungen e_1 bis e_n auf die Potentiale V_1 bis V_n gebracht. Nach Maxwell läßt sich, nachdem sich der elektrostatische Gleichgewichtszustand eingestellt hat, das Potential eines jeden der n Leiter darstellen als lineare homogene Funktion der einzelnen Ladungen:

$$V_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} e_2 + \cdots + p_{in} e_n; \quad (i = 1, 2 \ldots n). \tag{1}$$

Die Konstanten p_{ik}, die sogenannten Potentialkoeffizienten, besitzen die Dimension einer reziproken Kapazität. Sie sind sämtlich positiv oder höchstens gleich Null, und es gelten für sie allgemein die Beziehungen

$$p_{ik} = p_{ki} \text{ und } p_{ik} \leqq p_{ii}. \tag{2}$$

Jeder einzelne der Potentialkoeffizienten ist bestimmt durch die geometrische Konfiguration des gesamten Leitersystems; d. h. ändern wir Lage oder Gestalt auch nur eines der n Leiter, dann nehmen im allgemeinen sämtliche Potentialkoeffizienten andere Werte an.

Halten wir die Ladungen der n Leiter nicht konstant, sondern unterwerfen wir sie stetigen Änderungen, so werden die Gleichungen (1) im allgemeinen keine Gültigkeit mehr besitzen. Erfolgen jedoch die Änderungen der Ladungen langsam im Vergleich zu der Geschwindigkeit, mit welcher der elektrostatische Gleichgewichtszustand eingenommen wird, und sind weiter die von den Ladeströmen im Leitersystem durch Induktion erzeugten Potentialdifferenzen zu vernachlässigen, so werden auch während der Ladungsänderungen in jeden Augenblick die Potentiale der Leiter in sehr großer Annäherung durch die Beziehungen (1) dargestellt werden.

Wir verbinden nun zwei der n Leiter, etwa K_1 und K_2, miteinander über eine (nicht zu kleine) Selbstinduktion L_1 und einen Ohmschen Widerstand R_1. Wir erhalten dadurch einen elektrischen Schwingungskreis; wir wollen annehmen, daß seine Schwingungen nicht zu schnell erfolgen, so daß wir für jeden Zeitpunkt unbedenklich die Beziehungen (1) benutzen können.

Bezeichnen wir den im Sinne von K_2 über L_1 und R_1 nach K_1 fließenden Strom mit i_1, so lautet die Bedingung dafür, daß die Summe aller Potentialdifferenzen im Kreise verschwindet,

$$\begin{gathered} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + V_1 - V_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + e_1 [p_{11} - p_{21}] + \\ e_2 [p_{12} - p_{22}] + e_3 [p_{13} - p_{23}] + \cdots + e_n [p_{1n} - p_{2n}] = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach t und berücksichtigen, daß

$$\frac{de_1}{dt} = i_1, \frac{de_2}{dt} = -i_1, \frac{de_3}{dt} = \frac{de_4}{dt} = \cdots = \frac{de_n}{dt} = 0 \tag{4}$$

ist, so erhalten wir als Differentialgleichung für i_1 die folgende:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + [p_{11} - p_{21} - p_{12} + p_{22}] i_1 = 0, \tag{5}$$

d. h. die bekannte Differentialgleichung eines Schwingungskreises mit der Selbstinduktion L_1 und der Kapazität

$$\frac{1}{p_{11} - p_{21} - p_{12} + p_{22}}$$

Wir gehen nun einen Schritt weiter, indem wir einen zweiten Schwingungskreis hinzunehmen. Wir verbinden dazu nochmals zwei Leiter miteinander, diesmal über eine Selbstinduktion L_2 und einen Widerstand R_2. Den Bildern 1a, 1b und 1c entsprechend sind drei Fälle möglich: entweder nehmen wir zwei neue Leiter (K_3 und K_4

in Bild 1 a) oder einen alten und einen neuen (K_1 und K_8 in Bild 1 b) oder endlich die beiden alten Leiter (K_1 und K_2 in Bild 1 c). Die Schwingungen beider Kreise werden einander im allgemeinen beeinflussen. Sind in beiden Kreisen niemals andere Potentialdifferenzen vorhanden als

erstens die Ohmschen Spannungsdifferenzen $i_1 R_1$ und $i_2 R_2$,

zweitens die induktiven $L_1 \frac{di_1}{dt}$ und $L_2 \frac{di_2}{dt}$ und endlich

drittens die zwischen den Leitern durch ihre Ladungen gemäß (1) induzierten Spannungsdifferenzen,

so bezeichnen wir die beiden Schwingungskreise als „rein kapazitiv gekoppelt".

Die Bedingungen, denen wir das n-Leiter-System mit den beiden Schwingungskreisen unterwerfen müssen, damit wir rein kapazitive Kopplung erhalten, sind, wie leicht festzustellen, die folgenden:

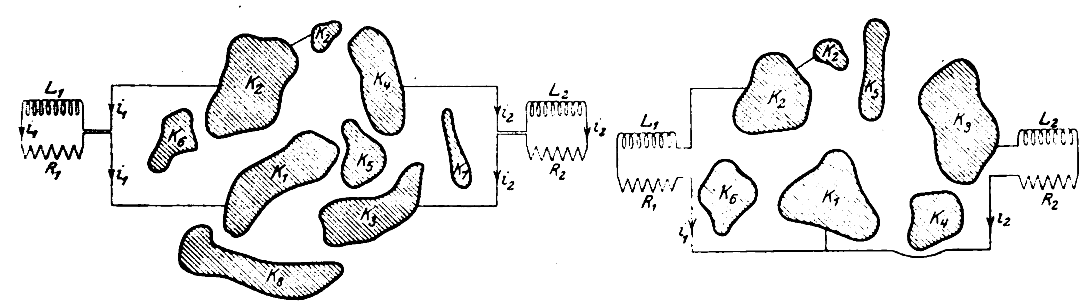


Bild 1 a. Schema rein kapazitiver Kopplung. Bild 1 b. Schema rein kapazitiver Kopplung.

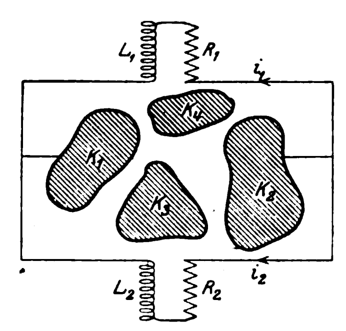


Bild 1 c. Schema rein kapazitiver Kopplung (vollkommen feste Kopplung).

I. Jeder der n Leiter muß praktisch widerstandslos sein, so daß keine Potentialdifferenzen zwischen einzelnen Teilen ein und desselben Leiters auftreten können.

II. Das Leitersystem muß praktisch frei sein von Selbstinduktion, so daß die Zeit, die das System zum Aufladen gebraucht, klein ist gegen die Dauer der entstehenden Schwingungen.

III. Keiner der beiden Schwingungskreise darf magnetische Induktionslinien durch das Leitersystem senden, damit Änderungen von i_1 und i_2 keine Potentialdifferenzen im Leitersystem bewirken.

IV. Es darf keine gegenseitige Induktion zwischen den beiden Schwingungskreisen vorhanden sein.

V. Widerstände und Selbstinduktionen müssen praktisch frei sein von Kapazität; es dürfen also nur verschwindend kleine Elektrizitätsmengen nötig sein, um die R und L auf die auftretenden Potentiale aufzuladen.

VI. Außer den n Leitern dürfen keine anderen in wirksamer Nähe sein [1]).

[1]) Z. B. würde im Laboratorium eine nahe Wand, aut See das Wasser von Einfluß sein.

VII. Die auftretenden Schwingungen müssen quasistationär, also alle linearen Dimensionen der Anordnung klein gegen die Wellenlänge der Schwingungen sein.

Unter diesen experimentell nicht immer streng zu erfüllenden Voraussetzungen lauten im Falle von Bild 1a die Bedingungen dafür, daß in jedem der beiden Schwingungskreise die Summe aller Potentialdifferenzen gleich Null ist:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + V_1 - V_2 \equiv$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + e_1 [p_{11} - p_{21}] + e_2 [p_{12} - p_{22}] + e_3 [p_{13} - p_{23}] + e_4 [p_{14} - p_{24}] + \cdots + e_n [p_{1n} - p_{2n}] = 0 \qquad (6)$$

und ebenso

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + e_1 [p_{31} - p_{41}] + e_2 [p_{32} - p_{42}] + e_3 [p_{33} - p_{43}] + e_4 [p_{34} - p_{44}] + \cdots + e_n [p_{3n} - p_{4n}] = 0 \qquad (7)$$

Differenzieren wir beide Gleichungen nach t und berücksichtigen, daß

$$\left.\begin{aligned} &\frac{de_1}{dt} = i_1;\ \frac{de_2}{dt} = -i_1;\ \frac{de_3}{dt} = i_2;\ \frac{de_4}{dt} = -i_2 \\ \text{und} \quad &\frac{de_5}{dt} = \frac{de_6}{dt} = \cdots\cdots = \frac{de_n}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ist, so erhalten wir als Differentialgleichungen für i_1 und i_2 die folgenden:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 [p_{11} - p_{21} - p_{12} + p_{22}] + i_2 [p_{13} - p_{23} - p_{14} + p_{24}] = 0 \qquad (9)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 [p_{33} - p_{43} - p_{34} + p_{44}] + i_1 [p_{31} - p_{32} - p_{41} + p_{42}] = 0. \qquad (10)$$

Mit Rücksicht auf (2) können wir hierfür kürzer schreiben:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + P_1 i_1 + P i_2 = 0 \qquad (11)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{d i_2}{dt} + P_2 i_2 + P i_1 = 0, \qquad (12)$$

wobei gesetzt ist:

$$p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22} = P_1 \qquad p_{33} - p_{43} - p_{34} + p_{44} = P_2 \qquad (13)$$

$$p_{13} - p_{23} - p_{14} + p_{24} = p_{31} - p_{32} - p_{41} + p_{42} = P. \qquad (14)$$

Dabei sind die Konstanten P_1, P_2 und P wie die Potentialkoeffizienten von der Dimension einer reziproken Kapazität, und zwar sind P_1 und P_2 je positiv oder Null, während P positiv, Null oder negativ sein kann. Man erkennt leicht, daß P einfach das Vorzeichen wechselt, wenn man in einem der beiden Schwingungskreise den positiven Richtungssinn von i umkehrt. Das Vorzeichen von P ist also nichts Wesentliches, für unser Schwingungssystem Charakteristisches.

Über die 3 Konstanten P_1, P_2, P läßt sich eine wichtige Bemerkung machen. Wie man sofort erkennt, ist zahlenmäßig P_1 gleich der Potentialdifferenz, die — bei geöffneten Schwingungskreisen — zwischen K_1 und K_2 entsteht, wenn K_1 und K_2 mit den Elektritätsmengen + 1 und — 1 geladen werden, K_3 und K_4 jedoch ungeladen bleiben. Dagegen ist zahlenmäßig P gleich der Potentialdifferenz, die zwischen $\begin{Bmatrix} K_3 \\ K_1 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} K_4 \\ K_2 \end{Bmatrix}$ entsteht, wenn $\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_3 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} K_2 \\ K_4 \end{Bmatrix}$ mit den Elektrizitätsmengen + 1 und — 1 geladen werden, $\begin{Bmatrix} K_3 \\ K_1 \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} K_4 \\ K_2 \end{Bmatrix}$ jedoch ungeladen bleiben. Es kann also offenbar dem absoluten Betrage nach P nicht größer sein als P_1, d. h. es muß sein

$$-P_1 \leq P \leq +P_1. \qquad (15)$$

Ganz ebenso muß sein

$$-P_2 \leqq P \leqq +P_2, \tag{16}$$

und aus beiden Ungleichungen läßt sich unmittelbar folgern

$$0 \leqq \frac{P_2}{P_1 \cdot P_2} \leqq 1. \tag{17}$$

Zu Differentialgleichungen von genau derselbe Form wie (11) und (12) gelangen wir, wenn wir unserem Ansatz Bild 1 b zugrunde legen, und es gelten auch wieder die Ungleichungen (15), (16) und (17).

Eine speziellere Form der Differentialgleichungen erhalten wir dagegen im Falle von Bild 1 c. Aus der physikalischen Bedeutung der Konstanten P, P_1 und P_2 folgt nämlich sofort, daß jetzt $P = P_1 = P_2$ sein muß, daß also unsere Differentialgleichungen die Gestalt

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + P(i_1 + i_2) = 0 \tag{18}$$

und

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + P(i_1 + i_2) = 0, \tag{19}$$

erhalten.

In den Differentialgleichungen kommt die Kopplung der beiden Schwingungskreise zum Ausdruck durch die Glieder mit P. Die Kopplung ist bei gleichen Werten P_1 und P_2 um so stärker, je größer P ist. Die für sie charakteristische Größe

$$k = \frac{P}{+\sqrt{P_1 \cdot P_2}}$$

bezeichnet man als den „Kopplungskoeffizienten". Er liegt, wie oben gezeigt, allgemein zwischen Null und $+1$. Die zu ihm gegensätzliche Größe $\sigma = 1 - k^2$ bezeichnen wir — dem Falle induktiver Kopplung genau entsprechend — als den elektrischen „Streuungskoeffizienten" der beiden Kreise.

Zusammenfassend wollen wir noch einmal definieren:

„Zwei Schwingungskreise heißen rein kapazitiv gekoppelt, wenn sie aus einem beliebigen System von n isolierten Leitern bestehen, von denen zweimal irgend zwei — sie brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein — miteinander durch eine Selbstinduktion und einen Widerstand verbunden sind, und wenn sie außerdem den oben aufgestellten Bedingungen I bis VII genügen." Für die rein kapazitive Kopplung sind die Differentialgleichungen (11) und (12) und die Ungleichungen (15), (16) und (17) charakteristisch. (Die dort auftretenden Koeffizienten P_1, P_2 und P brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein.)

Um die Differentialgleichung des ersten Schwingungskreises allein zu erhalten, haben wir aus (11) und (12) i_2 zu eliminieren. Das ist ohne Schwierigkeit möglich, es ergibt sich die Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{d^2 i_1}{dt^2}\left[\frac{P_1}{L_1} + \frac{P_2}{L_2}\right] + i_1 \frac{P_1}{L_1} \cdot \frac{P_2}{L_2}\left[1 - \frac{P^2}{P_1 \cdot P_2}\right] = \\ = -\frac{d^3 i_1}{dt^3}\left[\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right] - \frac{d^2 i_1}{dt^2}\frac{R_1}{L_1}\frac{R_2}{L_2} - \frac{d i_1}{dt}\left[\frac{P_1}{L_1}\frac{R_2}{L_2} + \frac{P_2}{L_2}\frac{R_1}{L_1}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Öffnen wir den zweiten Schwingungskreis, so wird i_2 gleich Null; für den ersten Schwingungskreis ergibt sich dann aus (11) als Differentialgleichung seiner „ungekoppelten Eigenschwingungen"

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{d i_1}{dt} + P_1 i_1 = 0;$$

der bekannte Ansatz $i = e^{\Omega t}$ liefert für Ω die beiden Werte

$$\Omega = -\frac{R_1}{2\,L_1} \pm i\sqrt{\frac{P_1}{L_1} - \left(\frac{R_1}{2\,L_1}\right)^2},$$

worin
$$j = \sqrt{-1}.$$

Es ergibt sich also eine gedämpfte Sinusschwingung, deren Kreisfrequenz für kleine Widerstände sehr nahe gleich $\omega_1 = \sqrt{\frac{P_1}{L_1}}$ ist und die den Dämpfungsexponenten $h_1 = \frac{R_1}{2\,L_1}$ besitzt.

Führen wir in unsere Differentialgleichung (21) die Eigenkreisfrequenzen und -dämpfungen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise ein, setzen wir also

$$\frac{P_1}{L_1} = \omega_1^2, \quad \frac{P_2}{L_2} = \omega_2^2, \quad \frac{R_1}{2\,L_1} = h_1 \quad \text{und} \quad \frac{R_2}{2\,L_2} = h_2,$$

so können wir unsere Differentialgleichung kürzer schreiben:

$$\frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{d^2 i_1}{dt^2}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2\right] + i_1\,\omega_1^2\,\omega_2^2\,\sigma = \\ = -\frac{d^3 i_1}{dt^3}\,2\left[h_1 + h_2\right] - \frac{d^2 i_1}{dt^2}\,4\,h_1\,h_2 - \frac{d\,i_1}{dt}\,2\left[\omega_2^2\,h_1 + \omega_1^2\,h_2\right]. \tag{22}$$

Aus Symmetriegründen erhält man die Differentialgleichung des zweiten Schwingungskreises durch Vertauschung der Indizes 1 und 2. Wir erkennen: für den Kreis (2) ergibt sich genau dieselbe Differentialgleichung wie für den Kreis (1).

Wie bekannt, gibt eine Differentialgleichung der Form (22) eine Lösung, welche sich bei nicht zu großen Widerständen auf die Form

$$A \cdot e^{-\alpha_1 t} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) + B \cdot e^{-\alpha_2 t} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2),$$

worin A, B, φ_1, φ_2 Integrationskonstanten, bringen läßt. Es entstehen also in jedem der beiden Schwingungskreise je zwei gedämpfte Sinusschwingungen (die sogen. „Koppelschwingungen") von den Kreisfrequenzen Ω_1 und Ω_2 und den Dämpfungsexponenten α_1 und α_2.

Ehe wir die Frequenzen und Dämpfungen der Koppelschwingungen berechnen, wollen wir noch zwei einfache experimentell wichtige Spezialfälle der kapazitiven Kopplung rechnerisch betrachten.

II. Zwei besondere Fälle der kapazitiven Kopplung.

I. Für den Fall von Bild 1a ist ein sehr einfaches Beispiel die aus vier hintereinander geschalteten Kondensatoren bestehende in Bild 2 dargestellte Kopplung. Da wir die Differentialgleichung für kapazitiv gekoppelte Schwingungskreise ganz allgemein aufgestellt haben, so brauchen wir nur die speziellen Werte der in ihr auftretenden Konstanten P_1, P_2 und P und damit von k^2 zu berechnen.

Erinnern wir uns der physikalischen Bedeutung dieser Konstanten, so können wir P_1 bzw. P einfach erhalten als die Potentialdifferenz, die der Kondensator C_1 bzw. C_2 erhält, wenn wir — bei geöffneten Schwingungskreisen — auf die Belegungen von C_1 die Elektrizitätsmengen $+1$ und -1 aufbringen. Bezeichnen wir die Elektrizitätsmengen, die dabei auf den Belegungen von C_1 selbst bleiben, mit $+e$ und $-e$, so kommen auf die Belegungen von C_3, C_4 und C_2 die Elektrizitätsmengen $1-e$ und $e-1$, wie in Bild 2 eingetragen. Um e zu berechnen, stellen wir die Bedingung auf, daß die Summe aller Potentialdifferenzen im Kondensatorkreis gleich Null sein muß:

$$\frac{e}{C_1} + \frac{e-1}{C_3} + \frac{e-1}{C_2} + \frac{e-1}{C_4} = 0. \tag{23}$$

Das gibt, wenn wir der Einfachheit halber

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C} \qquad (24)$$

setzen:

$$e \frac{1}{C} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} \qquad (25)$$

oder

$$e = 1 - \frac{C}{C_1}. \qquad (26)$$

Die Potentialdifferenz am Kondensator ist C_1 nun gleich $\frac{e}{C_1}$, also gleich $\frac{1}{C_1}\left[1 - \frac{C}{C_1}\right]$; wir haben somit

$$P_1 = \frac{1}{C_1}\left[1 - \frac{C}{C_1}\right] \qquad (27)$$

und aus Symmetriegründen

$$P_2 = \frac{1}{C_2}\left[1 - \frac{C}{C_2}\right]. \qquad (28)$$

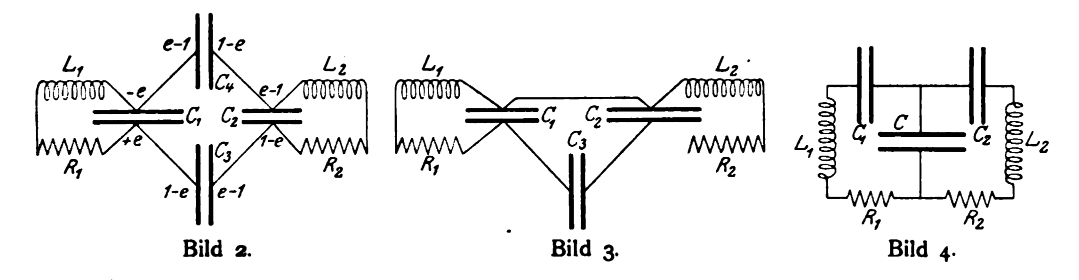


Bild 2. Bild 3. Bild 4.

Die Potentialdifferenz am Kondensator C_2 wird $\frac{1-e}{C_2}$, also gleich $\frac{C}{C_1 \cdot C_2}$, so daß gilt:

$$P = \frac{C}{C_1 \cdot C_2}. \qquad (29)$$

Das Quadrat des Kopplungskoeffizienten $k^2 = \frac{P^2}{P_1 \cdot P_2}$ wird somit:

$$k^2 = \frac{1}{\left\{1 + C_1\left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right]\right\}\left\{1 + C_2\left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right]\right\}}. \qquad (30)$$

Sowohl in dem Ausdruck für k^2 als auch in denen für P_1, P_2 und P kommen die Kapazitäten C_3 und C_4 nur vor in der Form $\left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right]$. Das gegenseitige Verhältnis von C_3 zu C_4 spielt also für den Verlauf der Schwingungen nicht die geringste Rolle, sondern es kommt lediglich an auf den Wert $\left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right]$. k wird gleich 1, die Kopplung vollkommen fest, wenn $\left[\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right]$ gleich Null ist; wenn also sowohl C_3 als auch C_4 kurz geschlossen werden. Auf diese Weise gelangen wir zu dem oben schon erwähnten Sonderfall, daß zwei Leiter miteinander zweimal über eine Selbstinduktion und einen Widerstand verbunden werden.

k wird dagegen gleich Null, die Kopplung vollkommen lose, wenn entweder C_3 oder C_4 oder alle beide gleich Null werden. Dies ist selbstverständlich. Denn

ist etwa C_4 gleich Null, so kann auf die Belegungen von C_3 keine Elektrizität fließen, weil sie auf den Belegungen von C_1 und C_2 durch die entgegengesetzt gleiche Menge gebunden bleibt.

Für alle übrigen Werte von C_3 und C_4 liegt, wie es ja sein muß, k zwischen Null und + 1.

Spezialisieren wir das eben behandelte Kopplungsschema, indem wir C_4 unendlich groß machen, also durch einen Kurzschluß ersetzen (Bild 3), so bekommen wir ein erstes Beispiel für den in Bild 1 b dargestellten Fall. Es wird jetzt, wie aus den abgeleiteten Formeln sofort folgt:

$$\left.\begin{aligned} C = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}, \quad P_1 = \frac{1}{C_1}\left[1 - \frac{C}{C_1}\right], \quad P_2 = \frac{1}{C_2}\left[1 - \frac{C}{C_2}\right], \quad P = \frac{C}{C_1 C_2}, \\ k^2 = \frac{1}{\left\{1 + \frac{C_1}{C_3}\right\}\left\{1 + \frac{C_2}{C_3}\right\}}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

II. Ein zweites Beispiel für diesen Fall ist das in Bild 4 dargestellte. Wie man aus der zur Berechnung von P_1, P_2 und P gegebenen Vorschrift sofort erkennt, ist hier

$$P_1 = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}; \quad P_2 = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}; \quad P = \frac{1}{C}, \qquad (32)$$

und damit

$$k^2 = \frac{P^2}{P_1 \cdot P_2} = \frac{1}{\left[1 + \frac{C}{C_1}\right]\left[1 + \frac{C}{C_2}\right]}. \qquad (33)$$

Die drei Kapazitäten C_1, C_2 und C sind durch P_1, P_2 und k vollständig bestimmt; und zwar ist wegen $\frac{1}{C} = P = k\sqrt{P_1 P_2}$:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{k\sqrt{P_1 P_2}} \\ \text{und} \qquad C_1 &= \frac{1}{P_1 - k\sqrt{P_1 P_2}} \qquad C_2 = \frac{1}{P_2 - k\sqrt{P_1 P_2}}. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Sind die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 der beiden Schwingungskreise und die Kopplung k gegeben, so ist in diesen Formeln nur $P_1 = \omega_1^2 L_1$ und $P_2 = \omega_2^2 L_2$ zu setzen. Dadurch wird

$$C = \frac{1}{k\,\omega_1\,\omega_2\sqrt{L_1 L_2}}; \quad C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_1 - k\,\omega_1\,\omega_2\sqrt{L_1 L_2}}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_2^2 L_2 - k\,\omega_1\,\omega_2\sqrt{L_1 L_2}}. \qquad (35)$$

L_1 und L_2 sind dabei willkürlich vorgebbar. Nur müssen sie, damit C_1 und C_2 positiv werden, den beiden Ungleichungen

$$\sqrt{L_2} \leqq \sqrt{L_1}\,\frac{\omega_1}{\omega_2}\,\frac{1}{k} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{L_2} > \sqrt{L_1}\,\frac{\omega_1}{\omega_2}\,k$$

genügen, d. h. es muß sein

$$L_1\,\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\,k^2 \leqq L_2 \leqq L_1\,\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\,\frac{1}{k^2}. \qquad (36)$$

Sind umgekehrt die C und L gegeben, so berechnen sich aus ihnen die Eigenfrequenzen und der Kopplungskoeffizient nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \sqrt{\frac{P_1}{L_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_1}}\sqrt{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{P_2}{L_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_2}}\sqrt{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}} \\ k^2 = \frac{1}{\left[1 + \frac{C}{C_1}\right]\left[1 + \frac{C}{C_2}\right]}; \quad \sigma = \frac{C\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right] + \frac{C^2}{C_1 C_2}}{\left[1 + \frac{C}{C_1}\right]\left[1 + \frac{C}{C_2}\right]} = \frac{C[C_1 + C_2] + C^2}{[C_1 + C][C_2 + C]} \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Wie es sein muß, liegen die Werte von k im allgemeinen zwischen Null und + 1. Von Interesse sind die Grenzfälle.

1. k wird gleich Null, die Kopplung also vollkommen lose, wenn entweder a) C unendlich groß oder b) C_1 oder C_2 unendlich klein wird.

a) C gleich unendlich bedeutet Kurzschluß an Stelle des Kondensators C; die beiden Schwingungskreise können einander augenscheinlich nicht beeinflussen; sie schwingen in ihren Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

b) etwa C_1 gleich Null; ω_1 wird unendlich groß; es können nur im zweiten Kreise Schwingungen auftreten, sie haben die Kreisfrequenz

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2}} \sqrt{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}}.$$

2. k wird gleich 1, die Kopplung also vollkommen fest, wenn $\frac{C}{C_1} = \frac{C}{C_2} = 0$ ist, wenn also entweder a) C gleich Null oder b) $C_1 = C_2 = \infty$ ist.

a) Im Falle $C = 0$ bekommen wir einen einzigen Schwingungskreis von der Selbstinduktion $L_1 + L_2$ und der reziproken Kapazität $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, also von der Frequenz

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\sqrt{L_1 + L_2}} \sqrt{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \\ \text{und der Dämpfung} \quad h &= \frac{R_1 + R_2}{2[L_1 + L_2]}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

ω_1 und ω_2 sind unendlich groß, also jedenfalls größer als die Koppelfrequenz Ω.

b) $C_1 = C_2 = \infty$ bedeutet Kurzschluß an den Stellen C_1 und C_2. Die beiden parallel geschalteten Selbstinduktionen L_1 und L_2 lassen sich ersetzt denken durch eine einzige L, die bestimmt ist durch $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$. Es ergibt sich also eine Schwingung von der Kreisfrequenz

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \sqrt{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}. \tag{39}$$

Die Eigenkreisfrequenzen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise $R_1 L_1 C$ und $R_2 L_2 C$ sind $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$ und $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$, sie sind also jetzt kleiner als die Koppelkreisfrequenz Ω.

III. Die Koppelfrequenzen, Vernachlässigung der Dämpfung.

Für den Fall unendlich kleiner Widerstände reduziert sich unsere Differentialgleichung (22) für die Koppelschwingungen auf die folgende:

$$\frac{d^4 i}{dt^4} + \frac{d^2 i}{dt^2}[\omega_1^2 + \omega_2^2] + i\,\omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0. \tag{40}$$

Der Ansatz $i = e^{j\Omega t}$, $j = \sqrt{-1}$ liefert für Ω die Bestimmungsgleichung

$$\Omega^4 - \Omega^2[\omega_1^2 + \omega_2^2] + \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0 \tag{41}$$

und damit die Werte

$$\Omega_1 = \sqrt[+]{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2}}\right]}. \tag{42}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2}}\right]}. \tag{43}$$

Man erkennt leicht, daß wegen $0 \leq \sigma \leq 1$ der Wert von

$$\sqrt{1 - \frac{4\sigma\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]^2}}$$

immer zwischen 0 und 1 liegt, daß also Ω_1 und Ω_2 immer reell sind. Wir erhalten also zwei ungedämpfte sinusförmige Koppelschwingungen, eine schnelle von der Kreisfrequenz Ω_1 und eine langsamere von der Kreisfrequenz Ω_2.

Messen wir mit Prof. Rogowski sämtliche Kreisfrequenzen in Kreisfrequenzen des Primärkreises, indem wir setzen

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = x; \quad \frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1; \quad \frac{\Omega_2}{\omega_1} = O_2, \tag{44}$$

so erhalten die Formeln (42) und (43) die einfachere Gestalt:

$$O_1 = \sqrt{\frac{1 + x^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]}, \quad O_2 = \sqrt{\frac{1 + x^2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right]}. \tag{45}$$

O_1 und O_2 sind durch (45) bestimmt als Funktionen der Streuung σ und des Verhältnisses $x = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ der Eigenkreisfrequenzen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise.

Ein Vergleich mit den entsprechenden Formeln der induktiven Kopplung (Rogowski a. a. O.) lehrt, daß man die Koppelfrequenzen bei induktiver Kopplung aus denen bei kapazitiver Kopplung erhält, indem man letztere durch $\sqrt{\sigma}$ dividiert.

Da sich $O_1{}^2$ schreiben läßt in der Form

$$O_1{}^2 = \frac{1 + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2x^2(1 - 2\sigma) + x^4}, \tag{46}$$

so ist wegen σ kleiner als 1 jedenfalls

$$O_1{}^2 > \frac{1 + x^2}{2} + \frac{|1 - x^2|}{2};$$

für $x < 1$ gibt das: $O_1{}^2 \geq 1 > x^2$ und für $x > 1$: $O_1{}^2 > x^2 > 1$. Es ist also immer $O_1{}^2 > x^2$ und $O_1{}^2 > 1$ oder $\Omega_1 \geq \omega_2$ und $\Omega_1 \geq \omega_1$; d. h. im allgemeinen ist die schnellere Koppelschwingung schneller als jede einzelne der beiden Eigenschwingungen der ungekoppelten Kreise. Ebenso läßt sich zeigen, daß im allgemeinen die langsame Koppelschwingung langsamer ist als jede der beiden Eigenschwingungen ω_1 und ω_2.

Es sei bemerkt, daß unabhängig von der Stärke der Kopplung die Beziehung gilt:

$$\left.\begin{aligned} O_1{}^2 + O_2{}^2 &= 1 + x^2 \\ \text{oder} \quad \Omega_1{}^2 + \Omega_2{}^2 &= \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Von Interesse sind die Grenzfälle vollkommen loser $(\sigma = 1)$ und vollkommen fester $(\sigma = 0)$ Kopplung.

Für $\sigma = 1$ wird

$$O_1{}^2 = \frac{1 + x^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2x^2 + x^4}.$$

Es wird also $O_1 = 1$ für $x < 1$ und $O_1 = x$ für $x > 1$. O_1 wird also im Falle vollkommen loser Kopplung durch den in Bild 5 stark ausgezogenen gebrochenen Linienzug dargestellt. Dies Resultat ist einleuchtend, da bei vollkommen loser

Kopplung die beiden Koppelfrequenzen mit den ungekoppelten Eigenfrequenzen übereinstimmen müssen. Ganz entsprechend wird bei vollkommen loser Kopplung $O_2 = x$ für $x < 1$ und $O_2 = 1$ für $x > 1$, also O_2 durch den in Bild 5 stark gestrichelten gebrochenen Linienzug dargestellt.

Für $\sigma = 0$ wird $O_1 = \sqrt{1 + x^2}$ und $O_2 = 0$. Wir wollen dies prüfen an den Beispielen (2a) und (2b) von Seite 265.

Im Falle (2a) haben wir $C = 0$ werden zu lassen. ω_1 und ω_2 werden unendlich groß, $x^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ bleibt dagegen endlich. Denn wir bekommen

$$x^2 = \lim_{C=0} \frac{L_1\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right)}{L_2\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right)} = \frac{L_1}{L_2}. \tag{48}$$

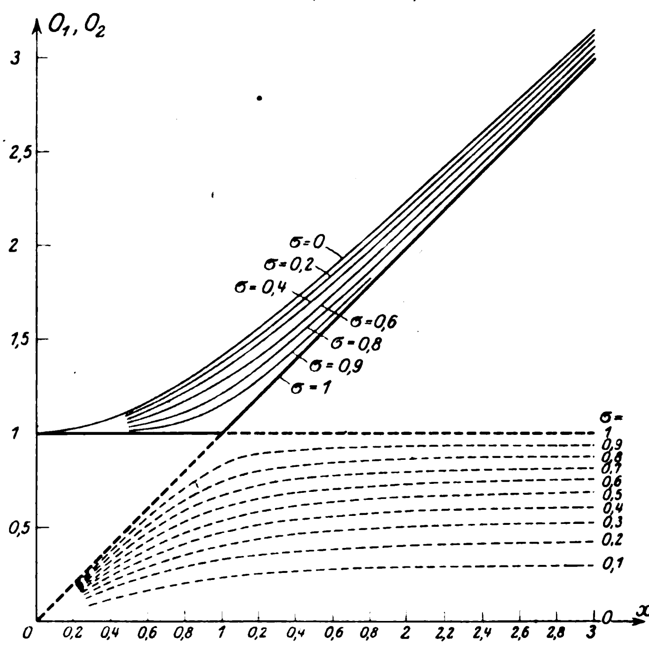


Bild 5. Die Koppelfrequenzen bei kapazitiver Kopplung.
——— rasche Koppelschwingung, O_1.
langsame Koppelschwingung, O_2.

Wegen $\Omega_1 = \omega_1 O_1 = \omega_1 \sqrt{1 + x^2}$ wird also die Frequenz der schnellen Koppelschwingung unendlich groß. (Das war zu erwarten, da sie schneller werden mußte, als jede der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen.) $\Omega_2 = O_2 \cdot \omega_2 = 0 \cdot \infty$ hat jedoch einen endlichen Grenzwert; es ergibt sich nämlich

$$\Omega_2^2 = \lim_{C=0} \left\{ \frac{1 + x^2}{2} \left[1 - \stackrel{+}{-}\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} \right] \cdot \frac{1}{L_1} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} \right] \right\}$$

$$= \lim_{C=0} \left\{ \frac{1 + x^2}{2} \left[1 - 1 + \frac{2\sigma x^2}{(1 + x^2)^2} \right] \left[\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C} \right] \right\} =$$

$$= \lim_{C=0} \left\{ \frac{\sigma x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{L_1 C} \right\} = \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \lim_{C=0} \frac{\sigma}{C}$$

oder wegen (37)

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right], \tag{49}$$

und das ist in Übereinstimmung mit Formel (38).

Im Falle (2b) haben wir $C_1 = C_2 = \infty$ werden zu lassen. Es wird nach (37)

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C L_1}} \text{ und } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C L_2}},$$

also $\Omega_1^2 = O_1^2 \omega_1^2 = (1 + x^2)\omega_1^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$, d. h.

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right] \tag{50}$$

in Übereinstimmung mit Formel (39). Dagegen wird $\Omega_2^2 = \omega_1^2 \cdot 0 = 0$. Während also im Falle (2a) die Frequenz der raschen Koppelschwingung unendlich groß, die der langsamen dagegen gleich der der wirklich auftretenden Schwingung wird, stellt im Falle (2b) die rasche Koppelschwingung die wirklich auftretende Schwingung dar, und die langsame Koppelschwingung wird unendlich langsam.

Zwischen den Kurven für $\sigma = 1$ und $\sigma = 0$ liegen diejenigen für die Zwischenwerte von σ. Hieraus schon ist zu sehen (Bild 5), daß die Frequenz der raschen Koppelschwingung nur wenig von σ abhängig sein kann; nur in der Nähe der Resonanzstelle $(x = 1)$ kann sie sich etwas mit der Kopplung ändern. Ebenso erkennt man sofort, daß die Frequenz der langsamen Koppelschwingung stark abhängig sein muß von der Größe der Kopplung.

Beides ist gerade umgekehrt der Fall bei der induktiven Kopplung. Da ändert sich die Frequenz der raschen Koppelschwingung stark, die der langsamen dagegen nur wenig mit dem Grade der Kopplung.

Es seien nun noch Näherungsausdrücke angegeben, die unter Umständen von Vorteil sein können. Entwickelt man zunächst den Wurzelausdruck $\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}$, der noch häufiger auftreten wird, für kleine und große x und für die Umgebung der Resonanzstelle, so erhält man:

1. für kleine x: $(0 < x \ll 1)$

$$\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} = 1 - 2\sigma x^2 + 2\sigma x^4 [2 - \sigma] + \ldots \tag{51}$$

2. für große x: $(1 \ll x < \infty)$

$$\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} = 1 - 2\sigma \frac{1}{x^2} + 2\sigma \frac{1}{x^4}[2 - \sigma] + \ldots \tag{52}$$

3. für x nahe gleich 1, wenn $x = 1 + \varepsilon$ $(0 < |\varepsilon| \ll 1)$ gesetzt wird:

$$\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}} = \sqrt{1 - \sigma} + \frac{\sigma}{2\sqrt{1 - \sigma}}\varepsilon^2 + \ldots = k + \frac{\sigma}{2k}\varepsilon^2 + \ldots \tag{53}$$

Für O_1 und O_2 ergeben sich unter Benutzung von (51) bis (53) die folgenden Näherungsausdrücke:

1. für kleine x: $(0 < x \ll 1)$

$$O_1 = 1 + \frac{x^2}{2}(1 - \sigma) = 1 + \frac{k^2}{2}x^2, \qquad O_2 = x\sqrt{\sigma}\left[1 - \frac{k^2}{2}x^2\right], \tag{54}$$

2. für große x: $(1 \ll x < \infty)$

$$O_1 = x\left[1 + \frac{1}{x^2}\frac{1 - \sigma}{2}\right] = x\left[1 + \frac{k^2}{2}\frac{1}{x^2}\right], \quad O_2 = \sqrt{\sigma}\left[1 - \frac{k^2}{2}\frac{1}{x^2}\right], \tag{55}$$

3. für x nahe gleich 1: $(x = 1 + \varepsilon,\ 0 < |\varepsilon| \ll 1)$

$$O_1 = \sqrt{1 + k}\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}\right] = \sqrt{1 + k}\,\frac{1 + x}{2}, \quad O_2 = \sqrt{1 - k}\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}\right] = \sqrt{1 - k}\,\frac{1 + x}{2}. \tag{56}$$

Aus Bild 5 und den angegebenen Näherungsformeln ergibt sich ohne weiteres folgendes Verhalten der Koppelfrequenzen: die schnelle Koppelkreisfrequenz stimmt

für sehr kleine und große Werte von x, d. h. für starke Verstimmung beider Kreise, sehr nahe überein mit der schnelleren der beiden ungekoppelten Eigenkreisfrequenzen. Je mehr man sich dem Resonanzpunkt nähert, desto größer wird die erstere im Vergleich zu der zweiten. Im Resonanzpunkte ($x = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) selbst hat das Verhältnis $\frac{\Omega_1}{\omega}$ seinen größten Wert $\sqrt{1 + k}$.

Die langsame Koppelfrequenz Ω_2 dagegen ist, abgesehen von dem Falle vollkommen loser Kopplung, immer beträchtlich kleiner als die langsamere der beiden ungekoppelten Eigenfrequenzen. Für sehr starke Verstimmung beider Kreise kommt sie ihr am nächsten, und zwar hat das Verhältnis dieser beiden Frequenzen dort den Wert $\sqrt{\sigma}$. Je mehr man sich dem Resonanzpunkte nähert, desto mehr noch unterscheidet sich verhältnismäßig die langsame Koppelfrequenz Ω_2 von der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenfrequenzen. Im Resonanzpunkte selbst hat das Verhältnis $\frac{\Omega_2}{\omega}$ den Wert $\sqrt{1 - k}$.

Bei der induktiven Kopplung liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Dort ist die schnelle Koppelschwingung immer beträchtlich schneller als die schnellere der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen, während die langsame Koppelschwingung sich verhältnismäßig nur wenig unterscheidet von der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen.

IV. Die Dämpfungen der Koppelfrequenzen.

Wir berücksichtigen jetzt die bisher vernachlässigten Widerstände. Unsere Differentialgleichung für die Koppelschwingungen hat jetzt die allgemeine Form (22). Der Ansatz $i = e^{j\Omega t}$ führt zu der folgenden Bestimmungsgleichung für Ω:

$$\begin{aligned} &\Omega^4 - \Omega^2[\omega_1^2 + \omega_2^2] + \omega_1^2\omega_2^2\sigma = \\ &= j\,\Omega^3\, 2\,[h_1 + h_2] + \Omega^2\, 4\, h_1 h_2 - j\,\Omega\, 2\,[\omega_2^2 h_1 + \omega_1^2 h_2]. \end{aligned} \tag{57}$$

Wir machen nun die Voraussetzung, h_1 und h_2 seien gegen ω_1 und ω_2 kleine Größen, d. h. die Ohmschen Widerstände R_1 und R_2 seien klein gegen die induktiven Widerstände $(L_1\omega_1)$ und $(L_2\omega_2)$. Dann werden sich die zu berechnenden Werte Ω nur wenig von den früher gefundenen Ω_1 und Ω_2 unterscheiden. Setzen wir mit Prof. Rogowski an $\Omega = \Omega(1 + \xi)$, so wird also ξ eine gegen 1 kleine Größe werden. Führen wir das ξ in unsere Gleichung (57) ein, entwickeln nach Potenzen von ξ und vernachlässigen alle von höherer als der ersten Ordnung kleinen Glieder, so bekommen wir als Bestimmungsgleichung von ξ die folgende:

$$\begin{aligned} &\Omega^4(1 + 4\xi) - \Omega^2[\omega_1^2 + \omega_2^2](1 + 2\xi) + \omega_1^2\omega_2^2\sigma = \\ &= j\,\Omega^3\, 2\,[h_1 + h_2] - j\,\Omega\, 2\,[\omega_2^2 h_1 + \omega_1^2 h_2] \end{aligned} \tag{58}$$

und hieraus:

$$j \cdot \xi \cdot \Omega = -\frac{\Omega^2[h_1 + h_2] - [\omega_2^2 h_1 + \omega_1^2 h_2]}{2\,\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} = -\alpha. \tag{59}$$

$j\xi\Omega$ ist reell, d. h. die Koppelfrequenzen erleiden durch die Einführung der kleinen Widerstände gegen früher keine Änderung. Waren aber früher die Koppelschwingungen ungedämpft, so sind sie jetzt gedämpft, und α ist ihr Dämpfungsexponent. Wir können schreiben:

$$\alpha = h_1 \frac{\Omega^2 - \omega_2^2}{2\,\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega^2 - \omega_1^2}{2\,\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]}. \tag{60}$$

Je nachdem wir für Ω den Wert Ω_1 der raschen oder den Wert Ω_2 der langsamen Koppelfrequenz einsetzen, erhalten wir den Dämpfungsexponenten α_1 der raschen oder α_2 der langsamen Koppelwelle:



$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= h_1 \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2}{2\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega_1^2 - \omega_1^2}{2\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} \\ \alpha_2 &= h_1 \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2}{2\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{2\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]}. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Führen wir unsere früheren Bezeichnungen (44) wieder ein und erinnern wir uns der Beziehung (47), so können wir einfacher schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= h_1 \frac{O_1^2 - x^2}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} = h_1 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} \\ \alpha_2 &= h_1 \frac{x^2 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} = h_1 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

oder kürzer noch:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= h_1 U_1 + h_2 U_2 & \alpha_2 &= h_1 U_2 + h_2 U_1, \\ \text{wo} \quad U_1 &= \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} & U_2 &= \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

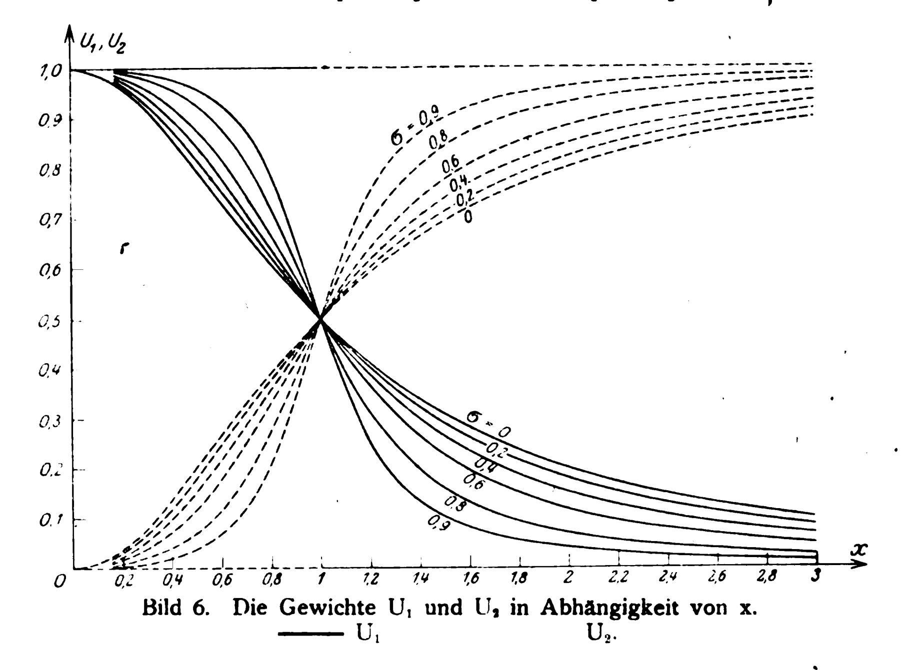


Bild 6. Die Gewichte U_1 und U_2 in Abhängigkeit von x.
——— U_1 - - - - U_2.

Wie bei der induktiven erhalten wir also auch bei der kapazitiven Kopplung die Dämpfungen einer jeden der beiden Koppelschwingungen aus den Dämpfungen h_1 und h_2 der ungekoppelten Kreise, indem wir h_1 und h_2 je mit gewissen Gewichten multiplizieren und dann addieren. Das ist natürlich nicht weiter verwunderlich, denn wir haben ja eigentlich nur eine Reihenentwicklung für α nach Potenzen von h_1 und h_2 angesetzt und nach den Gliedern erster Ordnung abgebrochen. Die Gewichte U sind wie O_1 und O_2 Funktionen der Verstimmung (x) und der Streuung (σ). Während jedoch bei der induktiven Kopplung alle vier Gewichte voneinander verschieden sind, haben wir hier nur zwei Gewichte, U_1 und U_2 zu betrachten. Führen wir für O_1 und O_2 die Ausdrücke (45) ein, so bekommen wir U_1 und U_2 direkt als Funktionen von x und σ:

$$U_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right] \qquad U_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]. \tag{64}$$

In Bild 6 sind die Gewichte U_1 (ausgezogen) und U_2 (gestrichelt) als Funktionen von x für verschiedene feste Werte von σ dargestellt.

Da $1 - O_2^2$, $O_1^2 - 1$ und $O_1^2 - O_2^2$ nie negativ sind, so sind es nach (63) auch nie die Gewichte. Da ferner aus (63) oder aus (64) sofort die einfache Beziehung

$$U_1 + U_2 = 1 \tag{65}$$

folgt, so haben wir allgemein:

$$0 \leq U_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq U_2 \leq 1.$$

Jede der beiden Koppeldämpfungen setzt sich also additiv zusammen aus gewissen echten Bruchteilen der Einzeldämpfungen h_1 und h_2. Und zwar ist, wie sich sofort aus (63) und (65) ergibt, immer

$$\alpha_1 + \alpha_2 = h_1 + h_2, \tag{66}$$

d. h. die Summe der beiden Koppeldämpfungen ist immer gleich der Summe der beiden ungekoppelten Einzeldämpfungen.

Bei der induktiven Kopplung liegen die Verhältnisse anders. Dort ist, wie sofort aus den von Prof. Rogowski angegebenen Formeln folgt,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{\sigma}[h_1 + h_2].$$

Die Summe der beiden Koppeldämpfungen ist also dort im allgemeinen größer, bei engerer Kopplung sogar beträchtlich größer als die Summe der beiden ungekoppelten Einzeldämpfungen.

Kehren wir zurück zur kapazitiven Kopplung, so können wir wegen (65) α_1 und α_2 in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= h_2 + (h_1 - h_2)\,U_1\\ \alpha_2 &= h_1 - (h_1 - h_2)\,U_1\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Da U_1 ja nie negativ ist, so folgt daraus, daß die Werte der beiden Koppeldämpfungen immer zwischen h_1 und h_2 liegen. Denn ist h_1 größer als h_2, so ist $\alpha_1 = h_2 + (h_1 - h_2)\,U_1 > h_2$ und ebenso $\alpha_2 = h_1 - (h_1 - h_2)\,U_1 < h_1$; ist dagegen h_1 kleiner als h_2, so ist $\alpha_1 = h_2 + (h_1 - h_2)\,U_1 < h_2$ und $\alpha_2 = h_1 - (h_1 - h_2)\,U_1 > h_1$.

Sind insbesondere die beiden Einzeldämpfungen einander gleich, ist also $h_1 = h_2 = h$, so sind auch die Dämpfungen der beiden Koppelwellen ihnen gleich, d. h. es ist dann auch $\alpha_1 = \alpha_2 = h$.

Auch dies ist anders als bei der induktiven Kopplung. Sind dort die beiden Einzeldämpfungen h_1 und h_2 einander gleich, so gilt da Folgendes: Für starke Verstimmung beider Kreise ist die Dämpfung der langsamen Koppelwelle nahe gleich den ungekoppelten Einzeldämpfungen; je mehr man sich jedoch der Resonanzstelle nähert, desto kleiner wird die Dämpfung der langsamen Koppelwelle; sie hat bei Resonanz ein Minimum, das um so stärker ausgeprägt ist, je enger die Kopplung ist. Die Dämpfung der raschen Koppelwelle ist für starke Verstimmung beider Kreise nahe gleich dem $\frac{1}{\sigma}$-fachen der ungekoppelten Dämpfungen, also bei festen Kopplungen beträchtlich größer als h. Je mehr man sich dem Resonanzpunkt nähert, desto größer noch wird die Dämpfung der raschen Koppelwelle, bei Resonanz hat sie ein Maximum. Dies unterschiedliche Verhalten der Koppeldämpfungen bei kapazitiver und induktiver Kopplung ist in Bild 7 veranschaulicht.

Um uns näher über die Koppeldämpfungen bei kapazitiver Kopplung zu orientieren, müssen wir die Gewichte U_1 und U_2 in ihrer Abhängigkeit von x und σ untersuchen. Entwickelt man U_1 und U_2 für kleine und große x nach Potenzen von x bzw. $\frac{1}{x}$ und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle nach Potenzen von $\varepsilon = x - 1$, so erhält man unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung



1. für kleine x:

$$U_1 = 1 - x^2 (1 - \sigma) \qquad U_2 = x^2 (1 - \sigma),$$

2. für $x = 1 + \varepsilon$:

$$U_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{k}\varepsilon\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x-1}{k}\right]$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{k}\varepsilon\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x-1}{k}\right],$$

3. für große x:

$$U_1 = \frac{1}{x^2}(1 - \sigma) \qquad U_2 = 1 - \frac{1}{x^2}(1 - \sigma). \qquad (68)$$

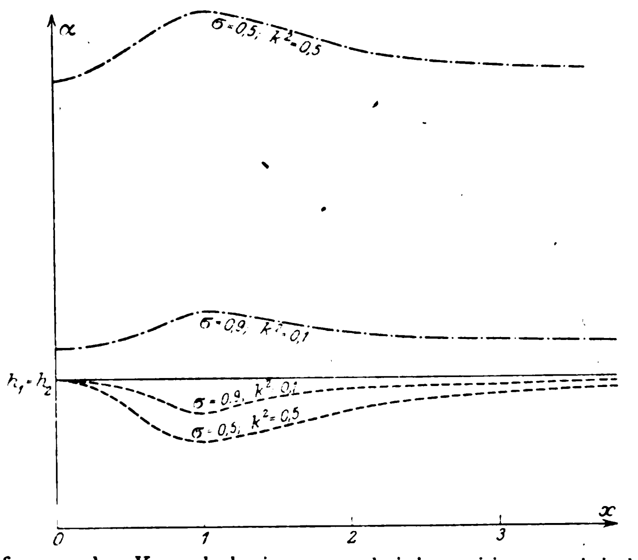


Bild 7. Die Dämpfungen der Koppelschwingungen bei kapazitiver und induktiver Kopplung. Dämpfungen ungekoppelt primär und sekundär einander gleich ($h_1 = h_2$).
kap. Kopplung, für rasche und langsame Koppelschwingung geltend,
. . . } indukt. Kopplung. für rasche Koppelschwingung geltend, für langsame Koppelschwingung geltend.

Es ist also für kleine x in großer Annäherung U_1 gleich 1 und U_2 gleich 0 (Bild 6), und somit $\alpha_1 = h_1$ und $\alpha_2 = h_2$; d. h. die Dämpfung der $\left\{\begin{matrix}\text{raschen}\\ \text{langsamen}\end{matrix}\right\}$ Koppelwelle ist für kleine x sehr nahe gleich der Dämpfung der $\left\{\begin{matrix}\text{rascheren}\\ \text{langsameren}\end{matrix}\right\}$ der beiden ungekoppelten Wellen. Genau dasselbe ergibt sich auch für große x; jetzt wird α_1 gleich h_2 und $\alpha_2 = h_1$, d. h. es ist wieder die Dämpfung der $\left\{\begin{matrix}\text{raschen}\\ \text{langsamen}\end{matrix}\right\}$ Koppelwelle sehr nahe gleich der Dämpfung der $\left\{\begin{matrix}\text{rascheren}\\ \text{langsameren}\end{matrix}\right\}$ der beiden ungekoppelten Wellen. Die beiden letzten Sätze zusammenfassend können wir sagen:

Sind die beiden miteinander gekoppelten Schwingungskreise stark gegeneinander verstimmt, so ist die Dämpfung der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung sehr nahe gleich der Dämpfung der rascheren bzw. der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen.

Bei induktiver Kopplung gilt das Entsprechende nur für die langsame Koppelwelle, die rasche Koppelwelle dagegen ist im allgemeinen, besonders bei festen

Kopplungen, stärker gedämpft als die raschere der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen.

Im Resonanzpunkt ist bei kapazitiver Kopplung $U_1 = U_2 = \frac{1}{2}$, also $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{h_1 + h_2}{2}$, d. h. die Dämpfungen der beiden Koppelwellen sind einander gleich, und zwar gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden ungekoppelten Einzeldämpfungen, unabhängig vom Grade der Kopplung.

Bei der induktiven Kopplung liegen die Verhältnisse anders. Dort ist im allgemeinen die Dämpfung der langsamen Koppelschwingung kleiner, die der raschen Koppelschwingung dagegen größer, bei festen Kopplungen sogar beträchtlich größer als das arithmetische Mittel aus den beiden ungekoppelten Einzeldämpfungen.

Verfolgen wir jetzt zusammenfassend bei kapazitiver Kopplung für einen festgehaltenen Wert von σ das Verhalten der beiden Koppeldämpfungen in seiner Abhängigkeit von der Verstimmung beider Kreise, so können wir — wenn wir noch die Darstellung (67) und den monotonen Verlauf der Kurven U_1 (Bild 6) beachten — folgendes aussagen (s. hierzu Bild 8 und 9):

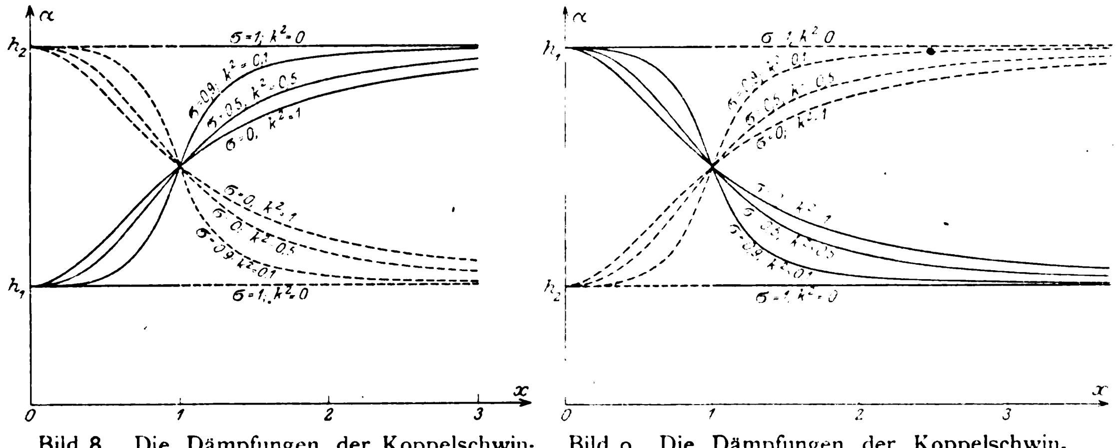


Bild 8. Die Dämpfungen der Koppelschwingungen bei kapazitiver Kopplung. Dämpfung ungekoppelt sekundär dreimal so groß wie primär ($h_2 = 3 h_1$).

Bild 9. Die Dämpfungen der Koppelschwingungen bei kapazitiver Kopplung. Dämpfung ungekoppelt primär dreimal so groß wie sekundär ($h_1 = 3 h_2$).

Für sehr kleine Werte von x ist der Dämpfungsexponent der raschen Koppelschwingung gleich demjenigen der rascheren der beiden ungekoppelten Schwingungen, d. h. gleich h_1; nähert man sich der Resonanzstelle, so nähert sich der Wert von α_1 allmählich dem Dämpfungsexponenten h_2 der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen; im Resonanzpunkt hat er gerade das Mittel $\frac{h_1 + h_2}{2}$ zwischen h_1 und h_2 erreicht. Wächst nun x über 1 hinaus, so nähert sich α_1 immer mehr dem Werte h_2, der von nun an jedoch den Dämpfungsexponenten der rascheren der beiden ungekoppelten Eigenfrequenzen darstellt. Für unendlich große x endlich wird α_1 gleich h_2, also wieder gleich dem Dämpfungexponenten der rascheren der beiden ungekoppelten Eigenfrequenzen. Durchläuft man also x von 0 bis ∞, so ändert sich α_1 monoton von h_1 bis h_2; je nachdem h_1 größer oder kleiner als h_2 ist, nimmt α_1 entweder immer ab oder immer zu (Bild 8 und 9).

Wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = h_1 + h_2$ erhält man den Verlauf der Kurven α_2 sofort, indem man die Kurven α_1 an der Parallelen zur x = Achse im Abstande $\frac{h_1 + h_2}{2}$ spiegelt

(Bild 8 und 9). Über die Dämpfung der langsamen Koppelwelle können wir also folgendes aussagen:

Für sehr kleine Werte von x ist der Dämpfungsexponent α_2 gleich demjenigen der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen, nämlich gleich h_2. Wächst x, so nähert α_2 sich allmählich dem Dämpfungsexponenten h_1 der rascheren der beiden ungekoppelten Eigenfrequenzen. Im Resonanzpunkt hat α_2 gerade das arithmetrische Mittel von h_1 und h_2 erreicht. Wächst nun x über 1 hinaus, so nähert sich α_2 immer mehr dem Werte h_1, der von nun an jedoch den Dämpfungsexponenten der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen darstellt. Für unendlich große x endlich wird α_2 gleich h_1, also wieder gleich dem Dämpfungsexponenten der langsameren der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen.

Die Abhängigkeit der Dämpfungen α_1 und α_2 von der Streuung erkennt man leicht, wenn man wieder die Darstellung (67) zugrunde legt und die Abhängigkeit des Gewichtes U_1 von der Streuung untersucht. Nähert man sich von kleinen und von großen Werten x der Resonanzstelle, so bleiben (vgl. (68) und Bild 6) die U_1 — Werte um so näher bei 1 und bei 0, je größer die Streuung, d. h. je loser die Kopplung ist. Dafür verläuft die U_1 — Kurve in der Nachbarschaft der Resonanzstelle um so steiler, je loser die Kopplung ist (vgl. (68) und Bild 6). Daraus folgt für die Abhängigkeit der Dämpfungen von der Streuung folgendes:

Die Dämpfung $\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix}$ der $\begin{Bmatrix}\text{raschen}\\ \text{langsamen}\end{Bmatrix}$ Koppelwelle ist für große und kleine x um so weniger von der Dämpfung der $\begin{Bmatrix}\text{rascheren}\\ \text{langsameren}\end{Bmatrix}$ der beiden ungekoppelten Schwingungen verschieden, je loser die Kopplung ist. Für die Resonanzstelle selbst ist sie unabhängig von der Streuung $\left(\text{sämtliche } U_1 = \text{Kurven gehen ja für } x = 1 \text{ durch den Punkt } \frac{1}{2}\right)$. Dafür ändert sie sich beim Verlassen der Resonanzstelle um so schneller mit x, je loser die Kopplung ist. Für vollkommen lose Kopplung ist $U_1 = 1$, für $x < 1$ und $U_1 = 0$ für $x > 1$ (s. den ausgezogenen gebrochenen Linienzug von Bild 6). Das bedeutet für die Dämpfungen der Koppelwellen, daß, unabhängig von der Verstimmung der beiden Kreise, bei vollkommen loser Kopplung die Dämpfung der $\begin{Bmatrix}\text{raschen}\\ \text{langsamen}\end{Bmatrix}$ Koppelwelle gleich ist der Dämpfung der $\begin{Bmatrix}\text{rascheren}\\ \text{langsameren}\end{Bmatrix}$ der beiden ungekoppelten Eigenschwingungen. Dies ist selbstverständlich, da ja bei vollkommen loser Kopplung die Koppelschwingungen mit den Schwingungen der ungekoppelten Kreise übereinstimmen.

Von Interesse ist noch der Fall vollkommen fester Kopplung ($\sigma = 0$). U_1 und U_2 werden dort zu

$$U_1 = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad U_2 = \frac{x^2}{1 + x^2}, \tag{69}$$

somit α_1 und α_2 zu

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= h_1 \frac{1}{1 + x^2} + h_2 \frac{x^2}{1 + x^2} \\ \text{und} \qquad \alpha_2 &= h_1 \frac{x^2}{1 + x^2} + h_2 \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Wenden wir diese Formeln auf die oben behandelten Spezialfälle 2a und 2b von Seite 265 an, so haben wir im Falle

2a: ($C = 0$), in welchem die langsame Koppelschwingung die wirklich auftretende Schwingung darstellt, $x^2 = \frac{L_1}{L_2}$,

also

$$\alpha_2 = h_1 \frac{L_1}{L_1 + L_2} + h_2 \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{R_1 + R_2}{2\,[L_1 + L_2]} \tag{71}$$

in Übereinstimmung mit Formel (38).

2 b: ($C_1 = C_2 = \infty$), in welchem die rasche Koppelschwingung die wirklich auftretende Schwingung darstellt, ebenfalls

$$x^2 = \frac{L_1}{L_2}, \text{ also } \alpha_2 = h_1 \frac{L_2}{L_1 + L_2} + h_2 \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$

oder

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\,[L_1 + L_2]} \left[R_1 \frac{L_2}{L_1} + R_2 \frac{L_1}{L_2} \right]. \tag{72}$$

Wie im oben näher behandelten Sonderfalle gleicher ungekoppelter Dämpfungen ($h_1 = h_2 = h$), so lassen sich auch für den allgemeinen Fall, daß h_1 und h_2 voneinander

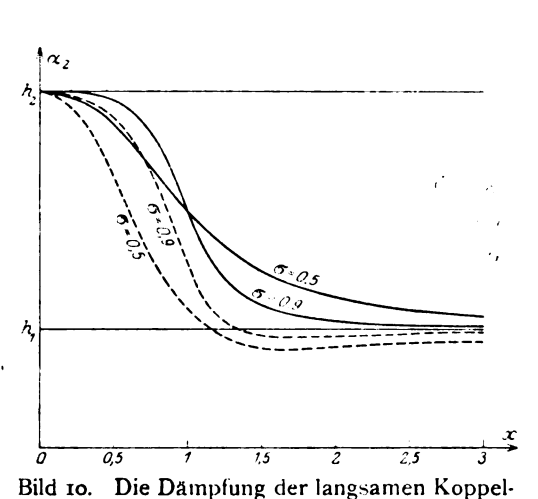


Bild 10. Die Dämpfung der langsamen Koppelschwingung bei kapazitiver und bei induktiver Kopplung. $h_2 = 3\,h_1$.
——— kapazitive Kopplung.
- - - - induktive Kopplung.

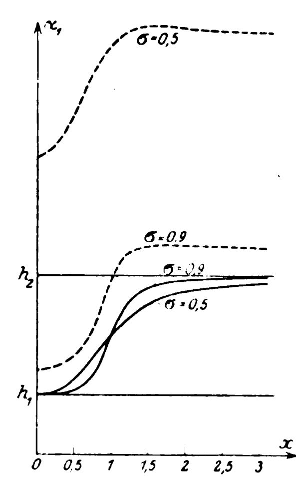


Bild 11. Die Dämpfung der raschen Koppelschwingung bei kapazitiver und bei induktiver Kopplung. $h_2 = 3\,h_1$.
——— kapazitive Kopplung.
- - - - induktive Kopplung.

verschieden sind, bedeutende Unterschiede zwischen den Dämpfungen der Koppelwellen bei kapazitiver und bei induktiver Kopplung feststellen. Zur Veranschaulichung dieser Unterschiede sollen die Bilder 10 und 11 dienen; das erste für die langsame, das zweite für die rasche Koppelwelle. Sie sind berechnet unter der Annahme $h_2 = 3\,h_1$.

Im allgemeinen läßt sich kurz sagen: Die Dämpfung der langsamen Koppelwelle ist bei induktiver Kopplung geringer als unter sonst gleichen Bedingungen bei kapazitiver Kopplung. Sie kann insbesondere bei induktiver Kopplung im Gegensatz zur kapazitiven kleiner sein als die Dämpfung der langsameren der beiden ungekoppelten Einzelwellen. Die Dämpfung der raschen Koppelwelle ist bei induktiver Kopplung größer, bei festen Kopplungen ganz beträchtlich größer als bei kapazitiver Kopplung.

Zur Berechnung der Koppeldämpfungen hatten wir in der Bestimmungsgleichung (57) für $\bar{\Omega}$ dieses gleich $\Omega\,(1 + \xi)$ gesetzt und bei der Ausrechnung von ξ alle von höherer als der ersten Ordnung kleinen Glieder vernachlässigt. Es liegt nun nahe, zwecks besserer Annäherung dieselbe Rechnung auch unter Beibehaltung noch der von zweiter Ordnung kleinen Glieder auszuführen. Man erhält dann eine quadratische

Gleichung für ξ, und es bietet keine Schwierigkeit, ξ daraus als Funktion von x und σ zu berechnen. Es zeigt sich bei der Durchführung, daß der rein imaginäre Bestandteil von ξ sich gegenüber den von uns oben erhaltenen Formeln nicht ändert, d. h. es treten zu unsern Formeln für die Koppeldämpfungen keine Glieder hinzu, welche h_1^2, h_2^2 und $h_1 h_2$ als Faktoren enthalten. Die von uns für die Koppeldämpfungen aufgestellten Näherungsformeln (63) und (64) sind also nicht nur in erster, sondern auch in zweiter Annäherung als gültig zu betrachten.

Wir haben nun noch den Anschluß an die in der Einleitung erwähnte Arbeit von M. Wien herzustellen. Wir haben also unsere Ergebnisse zu vergleichen mit den dort angegebenen Formeln für die Koppeldämpfungen bei vorherrschender Kopplung. Diese lauten in unseren Bezeichnungen und in einer der unseren angepaßten Schreibweise:

$$\alpha_1 = h_1 \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2\gamma^2}}\right] + h_2 \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2\gamma^2}}\right]$$

$$\alpha_2 = h_1 \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2\gamma^2}}\right] + h_2 \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2\gamma^2}}\right].$$

Darin ist

$$\gamma_1 = \sqrt{\omega_1^2 - h_1^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\omega_2^2 - h_2^2}, \quad \eta = \gamma_2 - \gamma_1.$$

Die Formeln gelten, wie schon erwähnt, nur für unmittelbare Nachbarschaft der Resonanzstelle, η ist also gegen γ_1 und γ_2 als sehr kleine Größe zu betrachten.

Vergleichen wir diese Formeln mit den unseren, so haben wir nur zu zeigen, daß für die Nachbarschaft der Resonanzstelle der Ausdruck

$$\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2\gamma^2}}$$

gleich $U_2 - \frac{1}{2}$, also gleich $\frac{1}{k}\varepsilon$, $(\varepsilon = x - 1)$, ist. Wir entwickeln dazu den Wurzelausdruck nach Potenzen von η:

$$\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + k^2\gamma^2}} = \frac{\eta}{k\gamma}\left\{1 + \frac{\eta^2}{k^2\gamma^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{k\gamma} - \frac{1}{2}\frac{\eta^3}{k^3\gamma^3}.$$

Das Glied $\frac{\eta^3}{k^3\gamma^3}$ können wir vernachlässigen. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß $\frac{\eta}{k \cdot \gamma}$ mit unserem $\frac{1}{k}\varepsilon$, daß also $\frac{\eta}{\gamma}$ mit ε übereinstimmt.

Da η nahe gleich $\omega_2 - \omega_1$ ist und wir für γ in erster Annäherung ω_1 schreiben können, so haben wir

$$\frac{\eta}{\gamma} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = x - 1 = \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, daß tatsächlich unsere Ergebnisse für die unmittelbare Nachbarschaft der Resonanzstelle mit den M. Wienschen in Einklang stehen.

Zum Schlusse ist es mir eine Ehre, meinen sehr verehrten Lehrern Herrn Geheimrat Wien, Jena, und Herrn Professor Rogowski, Aachen, für die Anregung zu dieser Arbeit wie für den stets gern erteilten Rat meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Verschärftes rechnerisches Verfahren der harmonischen Analyse.

Von

Walter Dällenbach.

Einleitung.

Ist eine periodische Funktion der Zeit $f(t)$ im ganzen Periodenintervall o bis T durch die Fourierreihe

$$\left.\begin{aligned} f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos(2\,\omega t) + b_2 \sin(2\,\omega t + \ldots\ldots \\ + a_n \cos(n\,\omega t) + b_n \sin(n\,\omega t) + \ldots\ldots \text{ in inf.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

darstellbar, so berechnen sich deren Koeffizienten zu

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\,\omega t)\, dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\,\omega t)\, dt \end{aligned}\right| \quad (2)$$

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ ist die Kreisfrequenz der Grundwelle. Die Funktion $f(t)$ sei empirisch durch eine Kurve gegeben. Dann besteht eine angenäherte Berechnung der Koeffizienten a_n und b_n darin, daß man das Intervall o bis T in m gleiche Teilintervalle der Öffnung $\frac{1}{m}$ einteilt und die Integrale für a_n und b_n durch die Summen approximiert

$$\left.\begin{aligned} a_n^* &= \frac{2}{m} \sum_{a=1}^{m} f_a \cos_a \\ b_n &= \frac{2}{m} \sum_{a=1}^{m} f_a \sin_a. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

f_a, $\cos_a$, $\sin_a$ bedeuten richtig bezogen die Werte der Funktionen $f(t)$, $\cos(n\,\omega t)$, $\sin(n\,\omega t)$ im a^{ten} Teilpunkt. Dieses angenäherte Verfahren der harmonischen Analyse wollen wir das Rungesche nennen, denn Runge beschreibt eine zur numerischen Rechnung bequeme Handhabung davon[1]). Es hat den Nachteil, daß auch bei ziemlich glatt verlaufenden Kurven die Anzahl m der Teilpunkte groß gewählt werden muß, wenn die Werte der 7, 8, 9 und höherer Harmonischen noch einigermaßen stimmen sollen. Ferner liefert es keine anschauliche Vorstellung vom Fehler, den man begeht. Denn bei Annäherung der Integrale durch Summen, ist es ja nicht die zu analysierende Originalkurve $f(t)$, sondern es sind die nicht direkt gegebenen Funktionen $f(t) \cdot \cos(n\,\omega t)$ und $f(t) \cdot \sin(n\,\omega t)$, die durch m-stufige Treppenkurven ersetzt werden.

Anläßlich einiger Analysen, die ich in einer elektrotechnischen Frage durchzuführen die Gelegenheit hatte, habe ich dem Mathematiker Herrn Prof. Hermann

[1]) Vgl. Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Sammlung Schubert XXXII (1904) § 17. Wiedergegeben in Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch (1921), Band I, Seite 130.

Weyl die Vermutung geäußert, es sollte doch möglich sein, das Rungesche Verfahren in ähnlicher Weise zu verschärfen, wie etwa die Simpsonsche Regel eine Verschärfung der Annäherung eines einfachen Integrals durch eine Summe darstellt. Herr Weyl hat dann die im nächsten Abschnitt wiedergegebene Annäherung gerechnet. Sie liefert die strenge Analyse des Polygonzuges, der entsteht, wenn die Bogen zwischen aufeinanderfolgenden Teilpunkten der Originalkurve durch die Sehnen ersetzt werden. Im darauffolgenden Abschnitt endlich habe ich die Annäherung weiter getrieben. Durch vier aufeinanderfolgende Teilpunkte etwa $(a-2, a-1, a, a+1)$ wird die kubische Parabel gelegt. Ersetzt man die Originalkurve nur im mittleren Intervall $(a-1, a)$ durch den kubischen Parabelbogen und das für alle Intervalle $a = 1$ bis m, so erhält man auch bei verhältnismäßig geringer Anzahl von Teilpunkten eine Ersatzkurve, die sich mit einer für die Bedürfnisse des Technikers ausreichenden Genauigkeit an eine einigermaßen glatt verlaufende Originalkurve anschmiegt. Diese aus m kubischen Parabelbögen zusammengestückelte Ersatzkurve wird streng analysiert. Es rechtfertigt sich, hier darüber zu berichten, da die Ergebnisse einfach und praktisch sind. Sowohl im Fall des Polygonzuges, wie im Fall der kubischen Parabelbögen als Ersatzkurve, sind die nach Runge berechneten Werte a_n^* und b_n^* zu multiplizieren mit einem in den zwei Fällen verschiedenen Faktor K, der allein abhängt von der Nummer n der Harmonischen und der Anzahl m der Teilpunkte. Die Korrektur ist für die höheren Harmonischen beträchtlich und beträgt z. B. bei Annäherung durch kubische Parabelbogen und bei $m = 24$ Teilpunkten für die 3te Harmonische 1%, für die 5te 4%, für die 7te 12%, für die 9te 27% und für die 11te 46%.

Annäherung durch Polygonzug.

Um die Rechnung einfacher zu gestalten, benützen wir die Schreibweise in komplexen Zahlen $(j = \sqrt{-1})$.

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j n \omega t} \tag{4}$$

ist eine mit (1) völlig identische Darstellung der Fourierreihe, falls die komplexen Koeffizienten vermöge

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \text{ und } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

mit den reellen a_n und b_n zusammenhängen[1]).

An Stelle von (2) tritt dann

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-j n \omega t} dt. \tag{5}$$

Sein angenäherter Wert nach dem Rungeschen Verfahren beträgt entsprechend (3)

$$c_n^* = \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m} f_a e_a, \tag{6}$$

wo f_a und e_a die Werte von $f(t)$ und $e^{-j n \omega t}$ im aten Teilpunkte bedeuten.

Mit der aus Bild 1 ersichtlichen Bezeichnung ist im aten Teilintervall

$$f(t) = f(\vartheta) = f_{a-1} + (f_a - f_{a-1})\frac{\vartheta}{\omega} + \eta.$$

[1]) Vergleiche hierüber z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (1903) § 49.

η ist die Abweichung der Originalkurve vom Polygonzug. Bis auf den Rest

$$R = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \eta\, e^{-jn\omega t}\, dt \qquad \text{ist}$$

$$c_n = \sum_{a=1}^{m} c_{na}, \quad \text{wo}$$

$$c_{na} = \frac{1}{T}\int_{\vartheta=0}^{\Theta} \left[f_{a-1} + (f_a - f_{a-1})\frac{\vartheta}{\Theta}\right] e^{-jn\omega[(a-1)\Theta+\vartheta]}\, d\vartheta$$

den Beitrag des a^{ten} Teilintervalls zum Werte von c_n bedeutet.

Bild 1.

$$c_{na} = \frac{-1}{j2\pi n}\left[f_{a-1}(e_a - e_{a-1}) + (f_a - f_{a-1})\int_0^{\Theta} \frac{\vartheta}{\Theta}\, d\left\{e^{-jn\omega[(a-1)\Theta+\vartheta]}\right\}\right].$$

Das verbleibende Integral partiell integriert

$$c_{na} = \frac{-1}{j2\pi n}\left\{f_a e_a - f_{a-1} e_{a-1} + \frac{m}{j2\pi n}(f_a - f_{a-1})(e_a - e_{a-1})\right\}.$$

Also ist bis auf den angegebenen Rest R

$$c_n = \frac{m}{(2\pi n)^2}\sum_{a=1}^{m}(f_a - f_{a-1})(e_a - e_{a-1}).$$

Ordnet man diese Summe nach den Funktionswerten f_a, so erhält f_a den Faktor:

$$\begin{aligned} 2e_a - e_{a-1} - e_{a+1} &= e_a(2 - e_{-1} - e_{+1}) \\ &= e_a\left(2 - e^{j2\pi\frac{n}{m}} - e^{-j2\pi\frac{n}{m}}\right) \\ &= 2e_a\left[1 - \cos\left(2\pi\frac{n}{m}\right)\right] \\ &= 4e_a \sin^2\left(\pi\frac{n}{m}\right). \end{aligned}$$

Folglich

$$c_n = \left[\frac{\sin\frac{\pi n}{m}}{\frac{\pi n}{m}}\right]^2 \cdot \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m} f_a e_a$$

oder streng

$$c_n = K c_n^* + R.$$

Da $\left|e^{-jn\omega t}\right| = 1$ ist $R \leq \frac{1}{T}\int_0^T |\eta|\, dt = |\eta|$.

Es ist also endgültig

$$c_n \leq K c_n^* + |\eta|,$$

oder für die reellen Koeffizienten

$$a_n \leq K a_n^* + |\eta|$$

$$b_n \leqq K\, b_n^* + |\eta|.$$

Hierin bedeuten $|\eta|$ den Mittelwert des absoluten Betrages der Abweichung des Polygonzuges von der Originalkurve, gebildet über das Periodenintervall 0 bis T,

$$K = \left[\frac{\sin\frac{\pi n}{m}}{\frac{\pi n}{m}}\right]^2$$

der Korrektionsfaktor, gebaut wie das Quadrat eines Wicklungsfaktors, der allein abhängt von der Anzahl m der Teilintervalle und der Nummer n der Harmonischen.

c_n^* bzw. a_n^* und b_n^* sind die nach dem Rungeschen Verfahren, Formeln (3) und (6), ermittelten Koeffizienten der Fourierreihe.

Annäherung durch kubische Parabelbogen.

Mit den aus Bild 2 ersichtlichen Bezeichnungen ist im Intervall vom $(a-2)^{ten}$ bis zum $(a+1)^{ten}$ Teilpunkt

$$f(t) = f(\vartheta) = A\,\vartheta^3 + B\,\vartheta^2 + C\,\vartheta + D + \eta.$$

η ist die Abweichung der Originalkurve von der kubischen Parabel, die durch die vier aufeinanderfolgenden Teilpunkte vom $(a-2)^{ten}$ bis zum $(a+1)^{ten}$ hindurchgeht. Die Konstanten A, B, C, D haben also den Gleichungen zu genügen:

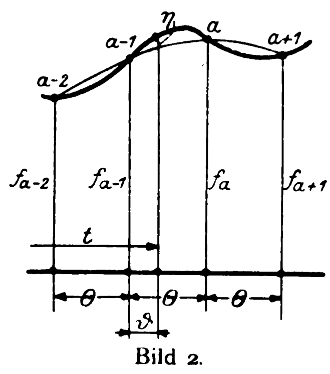


Bild 2.

$$-A\,\Theta^3 + B\,\Theta^2 - C\,\Theta + D = f_{a-2}$$
$$D = f_{a-1}$$
$$A\,\Theta^3 + B\,\Theta^2 + C\,\Theta + D = f_a$$
$$8\,A\,\Theta^3 + 4\,B\,\Theta^2 + 2\,C\,\Theta + D = f_{a+1}$$

und bestimmen sich daraus zu

$$A_1 = 6\,\Theta^3 A = f_{a+1} - 3\,f_a + 3\,f_{a-1} - f_{a-2}$$
$$B_1 = 2\,\Theta^2 B = f_a - 2\,f_{a-1} + f_{a-2}$$
$$C_1 = 6\,\Theta\,C = -f_{a+1} + 6\,f_a - 3\,f_{a-1} - 2\,f_{a-2}$$
$$D = f_{a-1}.$$

Bis auf den von der Abweichung η herrührenden Rest ist daher bei obiger Zerlegung von f(t) der Beitrag des a^{ten} Teilintervalls zum Werte von c_n

$$c_{na} = \frac{1}{T}\int_0^{\Theta}\left[A\,\vartheta^3 + B\,\vartheta^2 + C\,\vartheta + D\right] e^{-jn\omega[(a-1)\Theta+\vartheta]}\,d\vartheta.$$

Ersetzt man A, B, C durch A_1, B_1, C_1, substituiert $u = \frac{\vartheta}{\Theta}$ als neue Variable und nennt $-j\,2\pi\frac{n}{m} = \frac{1}{\lambda}$, so resultiert

$$c_{na} = \frac{e_{a-1}}{m}\int_0^1\left[\frac{1}{6}A_1 u^3 + \frac{1}{2}B_1 u^2 + \frac{1}{6}C_1 u + D\right] e^{\frac{u}{\lambda}}\,du.$$

Nun betragen die Integrale

$$\int_0^1 e^{\frac{u}{\lambda}}\,du = \lambda\left(e^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)$$

$$\int_0^1 u\,e^{\frac{u}{\lambda}}\,du = \lambda\left[(1-\lambda)\,e^{\frac{1}{\lambda}} + \lambda\right]$$

$$\int_0^1 u^2 e^{\frac{u}{\lambda}} du = \lambda \left[(1 - 2\lambda + 2\lambda^2) e^{\frac{1}{\lambda}} - 2\lambda^2 \right]$$

$$\int_0^1 u^3 e^{\frac{u}{\lambda}} du = \lambda \left[(1 - 3\lambda + 6\lambda^2 - 6\lambda^3) e^{\frac{1}{\lambda}} + 6\lambda^3 \right].$$

Führt man diese Werte in c_{na} ein, berücksichtigt, daß $e^{\frac{1}{\lambda}} = e_1$; $e^{-\frac{1}{\lambda}} = e_{-1}$; $e_1 e_{a-1} = e_a$ und ordnet nach Potenzen von λ, so wird

$$c_{na} = \lambda \frac{e_a}{m} \left\{ \left[\left(\frac{1}{6} A_1 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{6} C_1 + D \right) - e_{-1} D \right] + \left[-\frac{1}{2} A_1 - B_1 - \frac{1}{6} C_1 + \frac{1}{6} e_{-1} c_1 \right] \lambda + \right.$$

$$\left. + \left[A_1 + B_1 - e_{-1} B_1 \right] \lambda^2 + \left[- A_1 + e_{-1} A_1 \right] \lambda^3 \right\}.$$

Setzt man die Ausdrücke für A_1, B_1, C_1, D ein, bildet $c_n = \sum_{a=1}^{m} c_{na} + \text{Rest}$ und ordnet die Summe nach f_a, so ergibt sich

$$c_n \leqq K \frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} f_a e_a + |\overline{\eta}| ,$$

wo

$$K = \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{6} \right) [e_2 + e_{-2} - 4(e_1 + e_{-1}) + 6]$$

$$= \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{6} \right) \left[e^{-j\pi\frac{n}{m}} - e^{j\pi\frac{n}{m}} \right]^4$$

oder als Ergebnis

$$c_n \leqq K c_n^* + |\overline{\eta}|$$
$$a_n \leqq K a_n^* + |\overline{\eta}|$$
$$b_n \leqq K b_n^* + |\overline{\eta}| ,$$

wo $|\overline{\eta}|$, c_n^*, a_n^*, b_n^* die gleiche Bedeutung haben wie im vorigen Abschnitt und

$$K = \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi n}{m} \right)^2 \right] \left[\frac{\sin \frac{\pi n}{m}}{\frac{\pi n}{m}} \right]^4$$

der nur von m und n abhängige Korrektionsfaktor ist.

Für $m = 24$ Teilpunkte sind die Werte von K bis zur 12ten Harmonischen[1])

n	K	n	K
1	0,99993	7	0,87654
2	0,99888	8	0,80970
3	0,99453	9	0,72816
4	0,98353	10	0,63519
5	0,96217	11	0,53546
6	0,92721	12	0,43445

[1]) Den Studenten der Eidgen. Techn. Hochschule, die mir bei der Kontrolle dieser kleinen Tabelle behilflich waren, danke ich.

Sie lassen sich benützen zur Verschärfung der Analyse nach dem Rechenchema, wie es angegeben ist in der Hütte, Band I, Seite 132, Abschnitt 11.

Schlußbemerkungen.

1. Hat die zu analysierende Kurve im groben einen ziemlich glatten Verlauf, dem aber eine intensive Oberwelle überlagert ist, wie das etwa bei Feldkurven mit ausgeprägten Nutenoberschwingungen vorkommt, so ist es zweckmäßig, diese Oberwelle zu schätzen, von der Originalkurve graphisch zu subtrahieren und erst die verbleibende glatter verlaufende Differenzkurve rechnerisch zu analysieren.

II. Es mag mathematisches Interesse bieten, die in dieser Arbeit angegebene Methode fortzusetzen und durch k aufeinanderfolgende Teilpunkte die Parabel $(k-1)^{ten}$ Grades zu legen, — den Grenzfall $k = m$ eingeschlossen — und zu sehen, welches bei geeigneter Wahl der Teilintegrationsintervalle der allgemeine Ausdruck ist, den der Korrektionsfaktor K annimmt. Eine numerisch bessere Näherung ist davon kaum zu erwarten.

III. Beim Durchsehen der Literatur finde ich, daß Runge[1]) einen ähnlichen Versuch gemacht hat. Er legt als Ersatzkurve durch zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte eine Parabel k^{ten} Grades und verlangt, daß aneinanderstoßende Parabelbogen in den Teilpunkten auch noch in den Ableitungen bis zu einer Ordnung übereinstimmen sollen, die genügt, die Parabelbogen eindeutig festzulegen. Es führt das zu Summen für c_n, in welche die Funktionswerte f^a wie bei der Simpsonschen Regel mit verschiedenem Gewicht eingehen, so daß c_n sich nicht mehr aus c_n^* berechnen läßt. Die Handhabung ist nicht mehr einfach.

IV. Außer rechnerischen Verfahren der harmonischen Analyse ist noch das graphische Verfahren von Fischer-Hinnen (ETZ. 1901, Seite 396) ziemlich bekannt. Theoretisch, d. h. wenn man die mit vielfachem Abzirkeln von Strecken verbundenen Felder vernachläßigt, ergibt es genaue und nicht bloß angenäherte Werte der Oberwellen. Umständlich ist, daß das Intervall zur Bestimmung jeder Oberwelle immer anders eingeteilt werden muß. Man kann hierzu eine kleine Teilmaschine benützen. Das Verfahren verlangt ferner, daß die höchsten Oberwellen, die gerade noch von merkbarem Einfluß sind auf die empirisch gegebene Kurve, zuerst bestimmt werden. Aus diesen folgen dann rekursiv diejenigen niedrigerer Ordnung. Die Grundwelle erhält man zuletzt. Man ist also gezwungen, die Analyse immer — auch dann, wenn nur die Oberwellen niedrigerer Ordnung interessieren — bis zu der Genauigkeit durchzuführen, mit der die zu analysierende Kurve gegeben ist.

Ich habe gefunden, daß ich mit dem beschriebenen, verschärften Rungeschen Verfahren, das sich kubischer Parabelbögen zur Annäherung bedient, in Aufgaben der Elektrotechnik rascher und genauer zum Ziel komme, als mit irgend einem andern mir bekannten rechnerischen oder graphischen Verfahren.

Baden (Schweiz), im Juli 1921.

[1]) Runge, a. a. O., § 20, Seite 192 bis 196.



Archiv für Elektrotechnik

X. Band. 8. u. 9. Heft. 1921.

Dielektrische Eigenschaften der Kabelpapiere[1]).

Von

Carl Lübben. Berlin-Wilmersdorf.

1. Einleitung. In der nachstehenden Arbeit sollen die Ergebnisse einer Reihe von Messungen mitgeteilt werden, die 1913—1914 im Telegraphen-Versuchsamt ausgeführt wurden und sich auf die Untersuchung der dielektrischen Eigenschaften von Kabelpapieren erstreckten. Das Ziel der Untersuchungen war, die Abhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften unter den verschiedenen elektrischen Bedingungen von der Feuchtigkeit festzustellen und aus den gewonnenen Resultaten Größen festzulegen, die eindeutig alle dielektrischen Eigenschaften des Papiers bestimmen. Wichtig erschien es dabei, die Frage zu lösen, ob überhaupt und nach welchen Gesetzen ein Zusammenhang zwischen den Verlustkonstanten bei Gleichstrom und bei Wechselstrom vorhanden ist.

Auf den erheblichen Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes hat bereits Jordan[2]) hingewiesen. Jordan konnte auch zeigen, daß es in manchen Fällen möglich ist, aus den Werten der Gleichstromleitfähigkeit die Wechselstromverluste zu berechnen. In anderen Fällen ergaben aber Gleichstrom- und Wechselstrommessungen bedeutende Unterschiede in der Größenordnung. Wagner[3]) und Meyer[4]) ziehen daraus den Schluß, daß die Nachwirkung durch mehrere Glieder mit sehr verschiedenen Zeitkonstanten bestimmt ist, so daß die bei relativ großen Zeitwerten ausgeführten Gleichstrommessungen durch das Glied mit großer Zeitkonstante, die Wechselstrommessungen, denen kleine Meßzeiten entsprechen, durch das Glied mit kleiner Zeitkonstanten dargestellt werden.

Auf Grund der Maxwellschen Anschauung, daß die dielektrische Nachwirkung durch Inhomogenitäten des Isolators bedingt wird, gelangt Meyer zu dem Ergebnis, daß die größere Zeitkonstante dem Isolator mit sehr kleiner Leitfähigkeit, die kleinere Zeitkonstante dem Feuchtigkeitsgehalt zuzuschreiben ist, den fast alle Stoffe aufweisen. Den Zeitkonstanten 10^{-4} und 10^{3} sec., wie sie sich aus Messungen von Wagner ergeben, würden Leitfähigkeiten von 10^{-16} und 10^{-9} Siemens entsprechen, Werte die als gut möglich erscheinen.

Gleichstrommessungen von Tank[5]), die mittels des Helmholtzschen Pendels schon nach $3 \cdot 10^{-4}$ sec ausgeführt werden konnten, ergaben in einigen Fällen Übereinstimmung mit Wechselstrommessungen bei 50 Perioden.

Evershed[6]) hat Gleichstrommessungen an feuchten Stoffen bei verschiedenen Spannungen ausgeführt und einen bedeutenden Einfluß der Spannung auf die Leitfähigkeit festgestellt. Seine Ergebnisse und die daraus abgeleitete Theorie ist sehr beachtenswert und wird später noch eingehend zu behandeln sein.

---

[1]) Mitteilung aus dem Tel-Versuchsamt. Die Arbeit wurde bereits 1914 abgeschlossen. Die verspätete Veröffentlichung wurde durch den Krieg und Verlust einzelner Unterlagen verursacht.

[2]) H. Jordan, ETZ. **32**, 127, 160, 172, 1911.

[3]) K. W. Wagner, Ann. d. Phys. **40**, 852, 1913.

[4]) U. Meyer, Verh. d. D. phys. Ges. **19**, 139, 1917.

[5]) E. Tank, Ann. d. Phys **48**, 307, 1905.

[6]) S. Evershed, Journ. Inst. El. Eng. **52**, 51, 73, 1913.

Bevor wir uns den experimentellen Ergebnissen dieser Arbeit zuwenden, sei zunächst eine kurze Übersicht über die bisherigen theoretischen Arbeiten gegeben. Für das eingehendere Studium sei auf die Originalarbeiten verwiesen.

2. Ladung und Entladung des Kondensators bei Gleichstrom. Wird ein Kondensator mit festem Dielektrikum an eine Stromquelle von konstanter Spannung V_0 gelegt, so setzt sich der auftretende Ladestrom aus drei Komponenten zusammen:

a) Der „normale Ladestrom" der nur verschwindend kurze Zeit von meßbarer Größe ist und dem Kondensator eine Elektrizitätsmenge $Q_0 = V_0 C_0$ zuführt.

b) Der „Leitungsstrom", der von der Leitfähigkeit des Dielektrikums herrührt und zeitlich konstant ist.

c) Der „Nachladungsstrom", der zeitlich sehr viel langsamer als der normale Ladestrom abfällt und dem Kondensator eine weitere Elektrizitätsmenge zuführt und die Gesamtladung auf den Wert $Q = (1 + k) C_0 V_0$ bringt.

C_0 bezeichnet man als „geometrische Kapazität" und die vom Nachladestrom zugeführte Elektrizitätsmenge $k C_0 V_0$ als „Rückstandsladung".

Wird ein geladener Kondensator nach beendeter Ladung plötzlich kurzgeschlossen so setzt sich der Entladestrom aus zwei Komponenten zusammen:

a) Der „normale Entladestrom" der die vom normalen Ladestrom herrührende Ladung $Q_0 = C_0 V_0$ fast momentan ausgleicht.

b) Der „Rückstandsstrom", der als Umkehr des Nachladestrom aufzufassen ist und die Rückstandsladung in zeitlich langsam abfallendem Strom ausgleicht.

Nachlade- und Rückstandsstrom sind durch das „Superpositionsgesetz" von Hopkinson[1]) miteinander verknüpft, wonach der Rückstandsstrom I_2 aus der Superposition des umgekehrten Nachladungsstromes I_1 und eines Stromes entsteht, der als Fortsetzung des Ladungsstromes aufzufassen ist, d. h. wenn δ die Ladungsdauer bezeichnet, gilt:

$$I_1 = f(t) \qquad I_2 = -f(t) + f(t + \delta) \tag{1}$$

Bei genügend langer Ladungsdauer ist danach der Rückstandsstrom die Wiederholung des Nachladestroms mit umgekehrten Vorzeichen, und man erhält den reinen Leitungsstrom, wenn man den gesamten Entladestrom vom gesamten Ladestrom abzieht.

3. Das Dielektrikum im Wechselfelde. Bei sinusförmiger Wechselspannung $V = V_0 \sin \omega t$ treten entsprechend den drei Komponenten für Gleichstromladung drei Stromkomponenten auf:

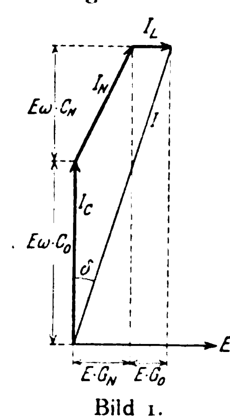


Bild 1.

a) Die wattlose Komponente I_c des „reinen Ladestromes", die der Spannung um 90 Grad voreilt.

b) Die Wattkomponente I_c des „Leitungsstromes", die mit Spannung gleichphasig ist.

c) Die Komponente I_n des „Nachwirkungsstromes", die hinter der wattlosen Komponente in der Phase zurückbleibt. Bild 1.

Setzt man den Gesamtstrom nach dem Wechselstromdiagramm aus den drei Komponenten zusammen (Bild 1), so erkennt man, daß der Gesamtstrom der wattlosen Komponente um den sogenannten „Verlustwinkel δ" nacheilt, was einem Energieverlust:

$$N = \frac{\omega E_0^2 C}{2} \operatorname{tg} \delta \tag{2}$$

[1]) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien, 2. Abt. **70**. 275, 1874, J. Hopkinson. Phil. Trans. **166**, 489, 1877; **167**, 599, 1878.

entspricht. Dabei bedeutet C die wirkliche Kapazität des Kondensators. Man erkennt aus dem Bilde 1 leicht, daß sowohl die geometrische Kapazität C_0, d. h. die Kapazität ohne Vorhandensein einer Nachwirkung, als auch die Ableitung G_0 durch den Nachwirkungsstrom um C_N bzw. G_N vergrößert sind. Die dem Gesamtstrom entsprechende Ableitung

$$G = \omega C \sin \delta \tag{3}$$

wird als „fiktive Ableitung" bezeichnet.

4. Das Verhalten der flüssigen Dielektrika. Die flüssigen Dielektrika zeigen ein wesentlich anderes Verhalten als die festen Dielektrikas. Zwar tritt auch bei diesen ein anormaler Ladestrom auf, es fehlt aber der entsprechende Rückstandsstrom. Der Vorgang von Ladung und Entladung ist also bei den flüssigen Stoffen nicht reversibel und das Superpositionsgesetz hat keine Gültigkeit. Theoretisch hat man versucht, die Eigenschaften der flüssigen Dielektrikas durch die Gesetze der „Ionenleitung" zu erklären. Die Leitfähigkeit nimmt infolge Verringerung des Ionengehalts unter dem Einfluß eines Stromes zeitlich ab und strebt einem Endwert zu, der mit zunehmender Stromdichte geringer wird.

Wesentlich komplizierter wird das Verhalten der flüssigen Stoffe, wenn sie nur in feinster Verteilung oder in Kapillaren vorhanden sind. Auf die hierbei auftretenden Erscheinungen wird später noch näher einzugehen sein.

5. Theorie der dielektrischen Nachwirkung. Die oben erwähnten Anomalien des festen Dielektrikums finden ihre Erklärung in der Theorie der dielektrischen Nachwirkung". Zwei Wege sind bei der Aufstellung einer Theorie der dielektrischen Nachwirkung vor allem eingeschlagen worden.

Maxwell[1]) erklärt die Nachwirkungen durch ein quer zur Feldrichtung geschichtetes Dielektrikum, für welches das Verhältnis der Leitfähigkeit zur Dielektrizitätskonstante in den einzelnen Schichten verschieden ist. Leider scheitert die allgemeine theoretische Behandlung einer größeren Anzahl Schichten an mathematischen Schwierigkeiten, obwohl sich zeigen läßt, daß ein geschichtetes Dielektrikum die Erscheinungen der Nachwirkung besitzen muß. Mehrfach sind einfache Modelle behandelt worden und gezeigt worden, daß eine Erklärung der dielektrischen Nachwirkung infolge Inhomogenität des Dielektrikums als sehr wahrscheinlich anzunehmen ist. Auf einzelne einfache Modelle wird an späterer Stelle noch zurückzugreifen sein.

Schweidler[2]) nimmt eine doppelartige dielektrische Verschiebung an. Außer den schwingungsfähigen Elektronen mit geringer Dämpfung, die unter dem Einfluß eines Feldes scheinbar sofort in die neue Ruhelage hineinschwingen, soll noch eine zweite Art von Elektronen mit sehr großer Dämpfung vorhanden sein, die ihre neue Gleichgewichtslage aperiodisch erst nach einer bestimmten Zeit erreichen. Der Bewegungsvorgang dieser stark gedämpften Elektronen soll so verlaufen, daß die Abweichung vom Endzustand proportional der Exponentialfunktion $e^{-\frac{t}{T_0}}$ ist (T_0 = Zeitkonstante). Die schwingungsfähigen Elektronen liefern dann zur dielektrischen Verschiebung einen Beitrag gleich $\frac{\varepsilon E}{4 \pi c^2}$ und die aperiodischen Elektronen einen Beitrag, der dem Endwert $k \frac{\varepsilon E}{4 \pi c^2}$ zustrebt, wo k das Verhältnis der Zahl der schwingungsfähigen zur Zahl der aperiodischen Elektronen ist.

Die gesamte dielektrische Verschiebung hat dann den Wert:

[1]) J. C. Maxwell, Lehrbuch d. Elektrizität u. d. Magnetismus, Bd. 1, Art. 328—330 Berlin 1883.

[2]) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. **24**. 711, 1907.

$$D = \frac{\varepsilon E}{4 \pi c^2} [1 + \psi^{(\infty)} - \psi^{(t)}], \tag{4}$$

wo die Nachwirkungsfunktion den Wert hat:

$$\psi(t) = k e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{(Pellat)} \tag{5}$$

Diese Formel, von Pellat[1]) angegeben, ist aber mit den experimentellen Ergebnissen nicht in Übereinstimmung zu bringen. Schweidler hat daher den Ansatz von Pellat erweitert durch die Annahme mehrerer Gruppen aperiodischer Elektronen mit verschiedenen Zeitkonstanten T_n, wobei die Anzahl der Elektronen jeder Gruppe ebenfalls verschieden im Verhältnis der Konstanten k_n sein soll. Die Nachwirkungsfunktion erhält so die Form:

$$\psi(t) = \Sigma k_n e^{-\frac{t}{T_n}} \quad \text{(Schweidler)} \tag{6}$$

Die Darstellung der experimentellen Ergebnisse nach der Schweidlerschen Formel war zwar möglich, erforderte aber die Annahme einer größeren Anzahl Glieder mit weit auseinander liegenden Zeitkonstanten. Eine solche Darstellung mit vielen beliebig wählbaren Konstanten konnte natürlich ebenfalls nicht befriedigen, da schließlich jede ähnlich verlaufende Funktion mit genügender Annäherung auf diese Weise darzustellen war. Einen wesentlichen Fortschritt erzielte Wagner[2]), indem er einmal den Ansatz von Schweidler erweiterte und vorraussetzte, daß alle Zeitkonstanten von 0 bis ∞ vorkommen, aber mit der Beschränkung, daß sich die Zeitkonstanten um einen wahrscheinlichen Wert T_0 gesetzmäßig gruppieren sollen. Das Verteilungsgesetz für die Gruppierung der Zeitkonstanten entnimmt Wagner der Wichertschen[3]) Theorie der elastischen Nachwirkung. Er erhält auf diese Weise als Nachwirkungsfunktion die Gleichung:

$$\psi(t) = \frac{k b}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2 z^2 - \frac{t}{T_0} e^{-z}} dz \quad \text{(Wagner)} \tag{7}$$

wo $z = \log \operatorname{nat} \frac{T}{T_0}$ ist. Die Nachwirkungsfunktion ist somit nach der Wagnerschen Formel durch die drei Konstanten k, b und T_0 bestimmt. Die Zeitkonstanten gruppieren sich um den wahrscheinlichen Wert T_0 um so dichter, je größer b ist.

Aus den Grundformeln (4), (6) und (7) ergibt sich bei konstanter Feldstärke die Stromstärke I des Verschiebungsstroms und für Wechselstrom die Zunahme der geometrischen Kapazität ΔC und der Verlustwinkel δ. Diese Formeln lauten:

$$I = C V_0 \sum \frac{k_n}{T_n} e^{-\frac{t}{T_n}} \tag{8}$$

$$\Delta C = C \sum \frac{k_n}{1 + \omega^2 T_n^2} \quad \text{Schweidler.} \tag{9}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C}{C + \Delta C} \sum \frac{k_n \omega T_n}{1 + \omega^2 T_n^2} \tag{10}$$

$$I = C V_0 \frac{K \; b}{T_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2 z^2 - z - \frac{t}{T_0} e^{-z}} dz \quad \text{Wagner.} \tag{11}$$

[1]) H. Pellat, Compt. rend. **128**, 1312, 1899. — Ann. d. chim. et phys. **18**, 150, 1899.
[2]) K. W. Wagner. Ann. d. Phys. **40**, 817, 1913.
[3]) E. Wichert, Wied. Ann. **50**, 335, 546, 1893.

$$\Delta C = C \frac{Kb}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2 z_0^2} \int_0^\infty e^{-b^2 u^2} \frac{\operatorname{Cos}(2 b^2 z_0 - 1) u}{\operatorname{Cos} u} du \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C}{C + \Delta C} \cdot \frac{kb}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-b^2 z_0^2} \int_0^\infty e^{-b^2 u^2} \frac{\operatorname{Cos} 2 b^2 z_0 u}{\operatorname{Cos} u} du \qquad (13)$$

Wagner.

$$\text{wo } z = \log \text{ nat } \frac{T}{T_0}$$

$$z_0 = \log \text{ nat } \omega T_0$$

$$u = z + z_0.$$

Die Integrale der Wagnerschen Formeln können für bestimmte Werte von b und t/T_0 berechnet werden[1]. Wenn b klein und ω groß ist, kommen folgende Näherungsformeln in Frage:

$$\underset{(b = \text{klein})}{\log I} = \log \frac{C V_0 kb}{T_0 \sqrt{\pi}} - \log \frac{t}{T_0} - \frac{b^2}{\log e}\left(\log \frac{t}{T_0}\right)^2 \qquad (14)$$

$$\underset{b = \text{klein}, \ \omega = \text{groß})}{\Delta C} = C \frac{k e^{\frac{1}{b^2}}}{\omega^2 T_0^2} \qquad (15)$$

$$\underset{(b = \text{klein}, \ \omega = \text{groß})}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{C}{C + \Delta C} \frac{k e^{\frac{1}{4 b^2}}}{\omega T_0} \qquad (16)$$

Wagner.

Zur Ableitung der bisher genannten Formeln ist es nicht notwendig, die Schweidlersche Annahme von zwei verschiedenen Elektronenarten vorauszusetzen, auch auf Grund der Maxwellschen Anschauungen kann man zu den gleichen Ergebnissen gelangen.

Meyer[2] hat ein geschichtetes Modell behandelt. Er gelangt unter der Annahme, daß zwei verschiedene Leitfähigkeiten und Dielektrizitätskonstanten in den Schichten vorkommen, zu den Formeln von Pellat und bei Annahme von drei verschiedenartigen Schichten zu der Formel von Schweidler mit zwei Gliedern.

Für die Konstanten T_n und k_n ergeben sich folgende Werte, wenn d_1, d_1, d_2 die Schichtdicken, ε_1, ε_2, ε_3 die Dielektrizitätskonstanten, σ_1, σ_2, σ_3, die Leitfähigkeiten und q der Querschnitt des Dielektrikums sind:

$$T_1 = \frac{1}{4 \pi c^2} \frac{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}, \qquad (17)$$

$$T_2 = \frac{1}{4 \pi c^2} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 d_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 d_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 d_1}{\sigma_3 (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)}, \qquad (18)$$

$$\frac{k_1}{T_1} C = q \frac{d_1 d_2 (\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma \varepsilon_1)^2}{(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)^2 (\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1)}, \qquad (19)$$

$$\frac{k_2}{T_2} C = q \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \sigma_3 d_3}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 d_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 d_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 d_1)^2}. \qquad (20)$$

Bei zwei Schichten sind dabei die Konstanten T_1 und k_1 zu benutzen, während bei drei Schichten das zweite Glied mit den Konstanten T_2 und k_2 hinzutritt. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Leitfähigkeiten wesentlich verschieden sind, d. h.

[1] K. W. Wagner. Ann. d. Phys. **40,** 817, 1913; ETZ. 1913, S. 1279.

[2] N. **Meyer.** Ber. d. deutschen phys. Ges. **19,** 134, 1917.

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} > \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3}.$$

Wagner hat ein Modell behandelt, bei dem in einer nichtleitenden Substanz kleine Kugeln mit gleicher Dielektrizitätskonstante, aber einer gewissen Leitfähigkeit eingebettet sind. Das Ergebnis ist auch hier dieselbe Verschiebungsfunktion, wobei sich für die Konstanten die Werte:

$$T_n = \frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,c^2\,\sigma_n}, \tag{21}$$

$$k_n = 3\,p_n \tag{22}$$

ergeben, wo p das Verhältnis der Volumina von nichtleitender zu leitender Substanz ist.

Man erkennt, daß diese Modelle die wirklichen Verhältnisse natürlich nicht vollständig wiedergeben können und die Konstanten je nach der Wahl des Modells verschieden ausfallen, wichtig ist aber, daß im wesentlichen stets das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ die Größenordnung der Konstanten bestimmt.

Erweitert man die Betrachtung unter Voraussetzung der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes auf eine größere Anzahl Schichten, so ergibt sich die allgemeine Schweidlersche Formel und von dieser kann dann weiter auch die Wagnersche Formel durch die Annahme des gleichen Verteilungsgesetzes erhalten werden.

Diese Betrachtungen zeigen, daß auch auf Grund der Maxwellschen Annahme der Inhomogenität eine Erklärung der dielektrischen Nachwirkung sehr wohl möglich ist.

6. Meßmethode. Für die an Kabelpapieren ausgeführten Gleich- und Wechselstrommessungen standen dieselben Einrichtungen und Hilfsmittel zur Verfügung, die bereits Wagner zu seinen ausführlichen Messungen benutzt hatte, so daß es sich hier erübrigt, nähere Einzelheiten zu wiederholen, vielmehr auf die Erläuterungen in den Wagnerschen Arbeiten verwiesen werden kann. Die Gleichstrommessungen wurden mit einer Hochspannungsbatterie für Spannungen bis 510 Volt und einem empfindlichen Drehspulgalvanometer, die Wechselstromuntersuchungen mit einem Hochfrequenzmaschinensatz (w = 2000 bis 40000) und der vorzüglichen Wechselstrommeßbrücke des Telegraphen-Versuchsamt ausgeführt. Tabelle 1.

Die untersuchten Papierproben waren von den größeren Kabelfabriken in verschiedener Stärke und Farbe zur Verfügung gestellt (vgl. Tabelle 1). Bei den Messungen wurden stets zwei aufeinander gelegte Papierblätter als Dielektrikum zwischen zwei polierten Eisenplatten benutzt, da ein einzelnes Blatt leicht durchschlagen wurde. Die Fläche der Kondensatorplatten betrug etwa 610 cm. Die Papierblätter waren größer als die Kondensatorplatten geschnitten, so daß sie über diese an jeder Seite etwa 1 cm überstanden. Durch besondere Versuche wurde festgestellt, daß dadurch jede Fälschung der Resultate infolge Oberflächenleitung beseitigt war.

Da die Meßresultate sehr stark von der Temperatur abhängen, mußte auf Konstanthaltung der Temperatur ganz besonders geachtet werden. Der Kondensator war zu diesem Zweck in einem gut abgedichteten Holzkasten eingebaut. Die obere Kondensatorplatte trug einen Napf mit Quecksilber, in das ein Thermometer eintauchte. Der Skalenteil des Thermometers ragte durch die obere Wand des Kastens heraus, so daß die Ablesung bei geschlossenem Kasten vorgenommen werden konnte. Der Luftraum des Kastens war elektrisch heizbar, seine Temperatur wurde durch ein zweites Thermometer kontrolliert. Um einwandfreie Messungen zu erhalten, mußten vor Beginn jeder Messung Kondensatorplatten, Luftraum des Kastens und Außenraum längere Zeit auf gleiche konstante Temperatur gehalten werden.

Tabelle 1.

Papier-sorte	Dicke für 1 Blatt	Spez.-Gew.	Feuchtigkeitsgehalt f_∞ bei Luftfeuchtigkeit von		Farbe	Zusammensetzung	
	cm		50%	100%		Hadern	Zellstoff
1	0,023	0,66	9,4%	19,0%	grau	40%	60%
2	0,022	0,65	9,5	19,5	grau	50	50
3	0,020	0,70	9,5	19,5	grün	50	50
4	0,019	0,72	9,5	19,5	rot	50	50
5	0,018	0,72	9,5	19,5	blau	50	50
6	0,010	0,90	9,4	19,0	grau	—	100
7	0,009	0,79	10,0	20,3	blau	50	50
8	0,0085	0,81	9,8	20,2	rot	50	50
9	0,008	0,76	9,9	20,8	grau	100	(Jutezusatz)
10	0,0075	0,72	10,0	21,8	grau	60	40%
11	0,0075	0,76	10,3	20,8	blau	60	40
12	0,0075	0,85	10,1	20,4	grau	50	50
13	0,007	0,77	10,4	22,2	grau	100	—
14	0,007	0,84	9,3	18,7	rot	50	50
15	0,007	0,87	9,8	19,6	blau	50	50
16	0,007	0,88	9,8	19,6	grau	50	50
17	0,006	0,74	9,0	19,5	blau	100	—
18	0,006	0,77	10,0	20,0	rot	100	—
19	0,006	0,84	9,7	20,4	grau	100	—

Reißlängen in der Maschinenrichtung 8–10 km Aschenprobe 1—2%
„ in der Querrichtung 4–5 km
Dehnung in der Maschinenrichtung 1,5—2%
„ in der Querrichtung 3—4%

Das Trockengewicht des Papiers wurde nach längerem Trocknen in heißer Luft von zirka 120 Grad bestimmt. Ein Trocknen bei gewöhnlicher Temperatur, z. B. im Behälter mit Chlorkalzium, ist unzureichend, da das Papier dann selbst nach langer Zeit noch einen erheblichen Gehalt an Feuchtigkeit aufweist, der überdies völlig unbestimmt ist.

Das getrocknete Papier nimmt die Feuchtigkeit aus der Luft anfangs sehr schnell auf und nähert sich dann langsam einem Endwert f_∞, der vom Feuchtigkeitsgehalt der Luft abhängt. Trägt man den Feuchtigkeitsgehalt, bezogen auf den Endzustand als Funktion der Zeit auf (Bild 2), so ist die Kurve in weiten Grenzen vom Endzustand unabhängig und zeigt den charakteristischen Verlauf der Nachwirkungserscheinung. Es gilt mit sehr guter Annäherung die Beziehung:

$$\frac{f}{f_\infty} = 1 - e^{-t}. \qquad (23)$$

Die Messungen wurden während der Feuchtigkeitsaufnahme in bestimmten Zeiträumen vorgenommen und der Feuchtigkeitsgehalt gleichzeitig durch Wägung bestimmt. Infolge der anfangs sehr starken Feuchtigkeitsaufnahme bot dieses Verfahren zunächst erhebliche Schwierigkeiten, da die Wägungen durch die schnelle Gewichtszunahme erschwert wird und sogar die elektrischen Messungen sich langsam änderten. Nach einiger Übung konnten aber einwandfreie Resultate erhalten werden, indem nach Vorversuchen bestimmte Gewichte auf die Wage gelegt und, sobald der Zeiger der Wage die Mittellage fast erreicht hatte, die Messungen sehr schnell ausgeführt wurden. Bild 2.

Bemerkt sei, daß bei dieser Meßmethode mit einer ungewollten Inhomogenität des Dielektrikums zu rechnen ist, da das Wasser im ersten Zeitabschnitt nicht gleich-

mäßig im Papier verteilt sein wird. Man muß annehmen, daß die Feuchtigkeitsaufnahme zunächst in der Oberflächenschicht stattfindet und nach dem Innern zu langsamer fortschreitet, so daß ein gleichmäßiger Zustand erst nach längerer Zeit eintritt. Diese Annahme wird durch folgende Erscheinung gestützt. Bringt man das Papier nach etwa 30—60 Minuten Feuchtigkeitsaufnahme in Luft von geringerer Feuchtigkeit, so gibt das Papier zunächst einen Teil der Feuchtigkeit wieder ab, obwohl der Endwert auch für die geringere Luftfeuchtigkeit noch nicht erreicht ist.

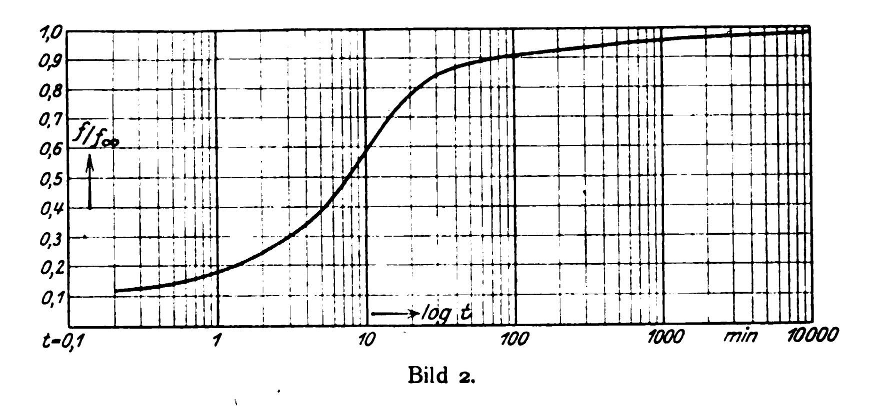


Bild 2.

Nach einiger Zeit tritt dann eine weitere Feuchtigkeitszunahme auf. Dies ist nur dadurch zu erklären, daß die Oberflächenschicht den der geringeren Luftfeuchtigkeit entsprechenden Endwert bereits überschritten hat und daher die überschüssige Feuchtigkeit nicht nur an die Innenschicht, sondern auch an die umgebende Luft abgibt, bis der Gleichgewichtszustand mit der Luft erreicht ist, worauf dann die weitere Feuchtigkeitsaufnahme wieder einsetzt. Es ist aber anzunehmen, daß die durch diese Inhomogenität bedingten Meßfehler vollständig gegenüber der starken Änderung mit der Feuchtigkeit zu vernachlässigen sind.

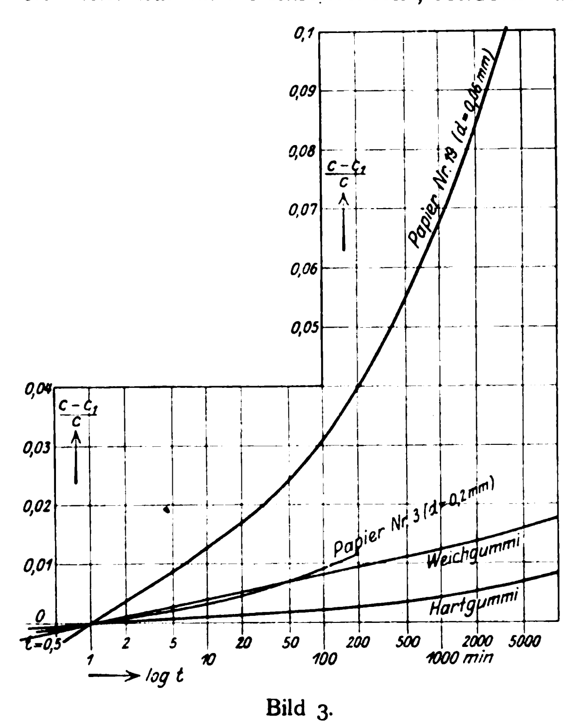


Bild 3.

Als weitere störende Nebenerscheinung ist die durch den Druck der oberen Kondensatorplatte hervorgerufene Deformation des Dielektrikums zu erwähnen. Wird der Plattenabstand durch kleine an den Ecken eingelegte Hartgummiplättchen so fixiert, daß der Plattenabstand größer als die Papierdicke ist, so ist natürlich die Kapazität mit dem Plattenabstand veränderlich, aber zeitlich konstant, während der Verlustwinkel mit der Abnahme des Abstandes beträchtlich zunimmt und einen annähernd konstanten zeitlich unveränderlichen Wert erst erreicht, wenn die Platten am Papier fest anliegen. Diese Zunahme des Verlustwinkels ist in erster Linie durch die Abnahme der Luftschicht bedingt, hinzukommt aber noch eine Vergrößerung infolge des normalen



Leitungsstroms, sobald die Platten am Papier anliegen. Daher wächst der Verlustwinkel auch noch weiter langsam an, wenn der Druck der oberen Platte auf das Papier gesteigert wird, da mit der Kontaktverbesserung auch die Leitfähigkeit ansteigt, was durch die Gleichstrommessungen bestätigt wird.

Während der Verlustwinkel zeitlich nahezu konstant ist, wenn die Platten am Papier fest anliegen, zeigt die Kapazität unter diesen Verhältnissen eine beträchtliche zeitliche Zunahme. Diese Zunahme hat ihre Ursache in einer elastischen Deformation und konnte auch bei anderen Stoffen, z. B. Hart- und Weichgummi, beobachtet werden. In Bild 3 sind diese Kapazitätsänderungen für zwei Papierproben von verschiedener Stärke und für Hart- und Weichgummi wiedergegeben (C_1 = Kapazität zur Zeit $t = 1$). Eine gleichzeitige entsprechende Abstandsänderung der Platten konnte durch genaue Messung festgestellt werden. Beim Papier sind diese Deformationen besonders groß, weil das Papier anfangs stets etwas gewellt ist und erst nach und nach glatt gepreßt wird. Bei den stärkeren Papiersorten ist dies wieder weniger der Fall. Für die Papierprobe von geringerer Stärke konnte nach 7000 Minuten eine Kapazitätszunahme von etwa 12 % gemessen werden.

Brauchbare Messungen des Verlustwinkels und Bestimmung der Gleichstromkurven waren nur zu erzielen, wenn die Platten fest am Papier anlagen, die zeitliche Kapazitätszunahme mußte dabei mit in Kauf genommen werden. Die Verhältnisse waren am günstigsten, wenn der Druck groß war, da dann die Kapazitätszunahme schon nach kurzer Zeit gering wurde. Die Gleich- und Wechselstrommessungen wurden mit einem Plattendruck von zirka 16,8 gr/cm² ausgeführt, stets 1 Minute nach Beginn des Druckeinflusses.

7. Gleichstrommessungen und Einfluß der Feuchtigkeit. An der Papiersorte 4 wurden bei einer Ladespannung von 510 Volt der zeitliche Verlauf des Ladestroms und Entladestroms bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden bestimmt. Die Ergebnisse sind in Bild 4 und 5 graphisch dargestellt (ausgezogene Kurven). Aus

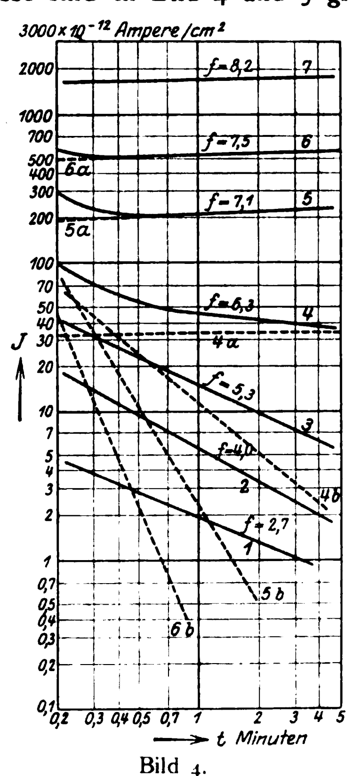


Bild 4.

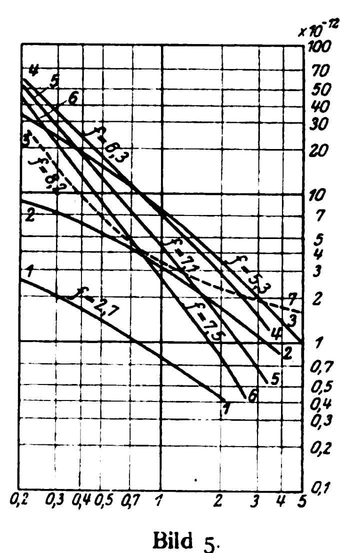


Bild 5.

der Darstellung ersieht man, daß bei der Ladung die Kurven 1, 2 und 3, bei der Entladung alle mit Ausnahme von Kurve 7 in der logarithmischen Darstellung nahezu geradlinig verlaufen, d. h. es gilt für den zeitlichen Verlauf des Stromes das Gesetz:

$$I = I_N t^{-n}. \tag{24}$$

I_N ist die Stromstärke zur Zeit $t = 1$ und n eine Konstante gleich dem Tangens des Neigungswinkels der Geraden gegen die t-Achse. Dieses Gesetz wurde schon wiederholt von anderen Forschern empirisch als das Zeitgesetz der dielektrischen Nachwirkung gefunden, wenn die Beobachtungen einen nicht zu großen Zeitraum umfassen, und läßt sich auch aus der Wagnerschen Formel 11 bzw. 14 für kleine Werte von b ableiten.

Eine erhebliche Abweichung von dem normalen Verlauf der Kurven bei nicht zu großem Feuchtigkeitsgehalt zeigen die Ladekurven 4 bis 7. Während die entsprechenden Entladungskurven (ausgenommen die Kurve 7) auch bei hohen Feuchtigkeitsgraden noch den normalen Verlauf aufweisen, überlagert sich bei den Ladekurven zu dem normalen geradlinigen Abfall eine Zunahme des Stromes mit der Zeit, die sich bei der Kurve 4 in der Veränderung der Kurvenform äußert, bei höheren Feuchtigkeitsgraden aber schließlich den Verlauf der Nachwirkungskurve völlig verdeckt, so daß bei den Kurven 5 und 6 nach kurzer Zeit, bei der Kurve 7 während der ganzen Beobachtungszeit ein zeitlicher Anstieg des Stromes zu bemerken ist. Zur Erklärung wollen wir die Theorie von Evershed heranziehen.

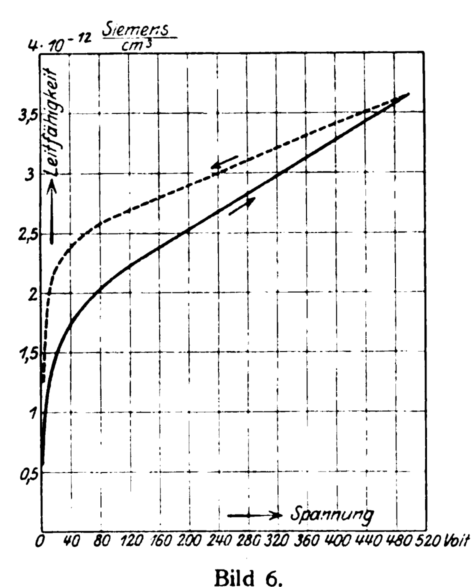


Bild 6.

Evershed nimmt an, daß das Wasser in feuchtigkeitshaltigen Stoffen nicht die Kapillarräume desselben vollständig erfüllt, sondern in Form kleiner Tropfen darin verteilt ist, die untereinander durch eine äußerst dünne Wasserschicht an der Wandung der Kapillare leitend verbunden sind. Unter dem Einfluß einer Potentialdifferenz werden die Tropfen deformiert, so daß die dünne Wasserschicht an der Wandung verstärkt wird. Diese Deformation ist um so größer, je größer die Spannung ist und demzufolge wächst die Leitfähigkeit mit der Zunahme der Spannung. Wird die Spannung kleiner oder der Stromkreis ganz unterbrochen, so nimmt der Tropfen seine ursprüngliche Gestalt nicht sofort an, sondern es bleibt eine Deformation übrig, die erst nach längerer Zeit verschwindet, es tritt also eine Hysteresiserscheinung auf. Evershed konnte seine Theorie an einem Kapillarrohr, das mit kleinsten Wassertropfen und Luftblasen gefüllt war, durch Widerstandsmessungen bestätigen und durch mikroskopische Beobachtung der an den Enden der Luftblasen auftretenden Newtonschen Ringen (Die Wasserschicht an den Wandungen war dünner als ein Viertel der Lichtwellenlänge) die Deformation und Hysteresis beobachten. Eine weitere Bestätigung lieferten die Messungen, die Evershed an vielen Stoffen vorgenommen hat. Für die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Spannung ergab sich zwischen 50 und 500 Volt mit guter Annäherung die Formel:

$$G = G_0 V^m. \tag{25}$$

Die Konstante m ist ein Maß für die Steilheit des Anstiegs der Leitfähigkeit mit der Feuchtigkeit.

Die Messungen von Evershed wurden zum Teil nachgeprüft und durch neue ergänzt. Das Bild 6 zeigt die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Spannung und zugleich die Hysteresiserscheinung. Bei den Messungen wurde die Spannung zunächst von 4,2 Volt nach und nach bis 510 Volt gesteigert (ausgezogene Kurve) und dann ebenso wieder nach und nach bis 4,2 Volt vermindert (gestrichelte Kurve). Die verschiedenen Messungen und Versuche ergaben folgende Resultate, die zum Teil auch bereits von Evershed erkannt waren.

a) Nach dem Einschalten des Stromes tritt die Deformation der Wassertropfen nicht sofort, sondern mit zeitlicher Nachwirkung ein (vgl. die Kurven 5—7 des Bildes 4). Der reine Leitungsstrom verläuft zeitlich nach dem Gesetz:

$$I = I_L t^p. \tag{26}$$

b) Die Konstanten m und p (Steilheit der Leitfähigkeit-Spannung und Leitfähigkeit-Zeit-Kurve) wachsen zunächst mit zunehmender Feuchtigkeit bis zu einem Maximum, welches bei etwa 6% Feuchtigkeit erreicht wird, und werden mit weiter zunehmender Feuchtigkeit wieder kleiner. Die Stärke der Wasserschicht an den Kapillarwänden wächst mit zunehmender Feuchtigkeit und damit zunächst auch die Deformationsmöglichkeit. Bei zu hohem Feuchtigkeitsgehalt ist ein großer Teil der Kapillarräume ganz oder so weitgehend mit Wasser gefüllt, daß die Möglichkeit der Deformation herabsinkt.

c) Mit zunehmendem Druck werden die Konstanten m und p kleiner, während die Leitfähigkeit gleichzeitig steigt. Es ist anzunehmen, daß unter erhöhtem Druck die Wasserschichten an den Kapillarwänden dicker werden, so daß mit der Zunahme der Leitfähigkeit die Möglichkeit der Deformation geringer wird.

d) Auch bei geöffnetem Stromkreise findet eine langsame Zunahme der Leitfähigkeit und gleichzeitige Verkleinerung der Konstanten m und p statt, die Dicke der Wasserschicht an den Wänden muß also auch ohne Beeinflussung durch den elektrischen Strom mit der Zeit zunehmen.

Kehren wir nun zu der Betrachtung der Ladekurven in Bild 4 zurück, so müssen wir uns den Ladestrom aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, den Nachwirkungsstrom, der zeitlich nach der Formel 24 abnimmt, und den Leitungsstrom, der zeitlich nach der Formel 26 zunimmt. Der beobachtete Ladestrom läßt sich also nach der Formel

$$I = I_L t^p + I_N t^{-n} \tag{27}$$

darstellen. Bei kleinen Feuchtigkeitsgraden wird das erste Glied, bei hohen Feuchtigkeitsgraden das zweite Glied zu vernachlässigen sein. Bei den Kurven 4—6 treten beide Glieder merklich in Erscheinung, es gelingt aber verhältnismäßig leicht, die experimentell bestimmten Kurven in ihre Teile zu zerlegen. In Bild 4 sind die zu den Kurven 4—6 gehörigen Leitungsströme 4a—6a und die Nachwirkungsströme 4b—6b gestrichelt eingezeichnet.

Die Entladungskurven können nur den Nachwirkungsstrom zeigen, und es ist daher beim Vergleich derselben mit den Ladekurven wichtig, daß auch die Teilkurven 4b—6b sich den Ladkurven 1—3 so einpassen, daß zwischen Lade- und Entladekurven wenn auch nicht völlige, so doch recht gute Übereinstimmung vorhanden ist. Besonders auffallend ist, daß die Geraden mit zunehmender Feuchtigkeit steiler verlaufen, daß also die Entladung schneller verläuft.

In der Tabelle 2 sind die nach der Formel (24) berechneten Konstanten I_N und n zusammengestellt. Von den Ladekurven sind natürlich die Teilkurven benutzt worden, die den Leitungsstrom nicht mehr enthalten. Beachtet man, daß infolge der sehr viel größeren Werte des Leitungsstroms bei hohen Feuchtigkeitsgraden die Ladungswerte sehr unsicher sind, so muß die Übereinstimmung als eine recht gute bezeichnet werden.



Tabelle 2.

f	Ladung I_n	Ladung n	Entladung I_n	Entladung n	T_0 für b = 0,25	σ für Wasser
2,7 %	$1{,}88 \cdot 10^{-12}$ Amp.	0,58	$0{,}83 \cdot 10^{-12}$ Amp.	0,77	6,4 min.	$2 \cdot 10^{-14}$ $\frac{\text{Siem}}{\text{cm}^2}$
4,0	5,67 "	0,73	3,13 "	0,79	5,4 "	$3 \cdot 10^{-14}$
5,3	15 "	0,62	7,43 "	1,03	0,8 "	$1{,}5 \cdot 10^{-13}$
6,3	11,5 "	1,1	8,1 "	1,2	0,2 "	$0{,}6 \cdot 10^{-12}$
7,1	2,33 "	2,3	4,77 "	1,5	0,02 "	$0{,}6 \cdot 10^{-11}$
7,5	0,32 "	3,0	2,6 "	1,7	0,004 "	$3 \cdot 10^{-10}$

Der nahezu geradlinige Verlauf der Kurven macht die Annahme kleiner Werte von b der **Wagnerschen** Formel 11 notwendig, und es gilt dann die Beziehung für den Zeitqunkt t = 1 Minute:

$$\log T_0 = \frac{\log e}{2\,b^2}(1 - n) \tag{28}$$

Unter der Annahme von b = 0,25 sind die Werte von T_0 berechnet und in der Tabelle 2 mit angegeben worden.

Schon die mit der Feuchtigkeit zunehmende Steilheit der Kurven macht es wahrscheinlich, daß die Nachwirkung zum erheblichen Teil von Wassergehalt herrührt. Ein Vergleich mit der Theorie bestätigt diese Annahme noch weiter und stützt zugleich die Annahme, daß die Nachwirkung eine Folge der Inhomogenitäten ist. Berechnet man für das getrocknete Papier unter der Annahme von zwei Schichten, Papier und Luft, nach der Formel 17 die Zeitkonstante, so gelangt man zu einem Wert von etwa 1500 Minuten. Dabei ist die Leitfähigkeit des trocknen

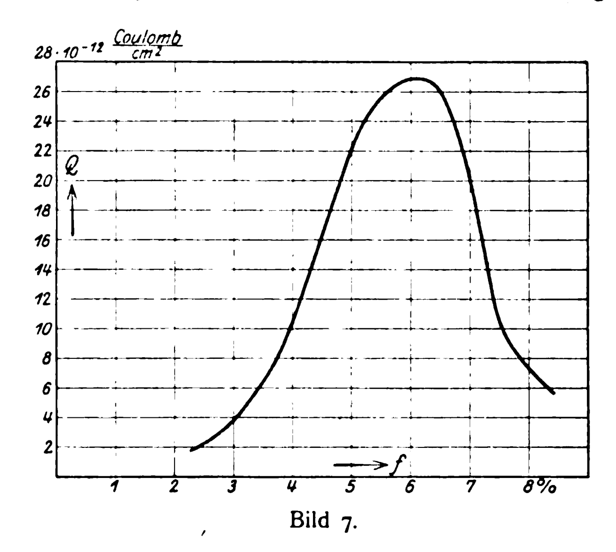


Bild 7.

Papiers mit $10^{-17} \frac{\text{Siemens}}{\text{cm}^2}$ (10^{-26} CGS Einheiten) nach den Gleichstrommessungen am trocknen Papier und für das Luftvolumen etwa 0,1 des Gesamtvolumens angenommen, da das Papier maximal etwa 20—25 % Feuchtigkeit aufnimmt. Die Kurven am feuchten Papier lassen den Einfluß dieser Zeitkonstante nicht erkennen. Schreibt man die aus dem Verlauf der Kurven ermittelten Zeitkonstanten (Tabelle 2) einer dritten Schicht, nämlich dem Wassergehalt, zu, so lassen sich nach der Formel 18 die zugehörigen Werte der Leitfähigkeit berechnen. Führt man diese Berechnung durch, so ergeben sich die in der Tabelle 2 ebenfalls angeführten Werte.

Tabelle 3.

Gleichstrom-Leitfähigkeit G in Siemens für ein Blatt von 1 cm Dicke und 1 cm^2 Fläche gemessen bei 510 Volt nach 1 Minute.

Papier-sorte	f = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 °/o	g	Go
1	$2{,}5 \cdot 10^{-17}$	$12 \cdot 10^{-17}$	$41 \cdot 10^{-17}$	$8{,}7 \cdot 10^{-16}$	$19 \cdot 10^{-16}$	$73 \cdot 10^{-16}$	$37 \cdot 10^{-15}$	$22 \cdot 10^{-14}$	$14 \cdot 10^{-13}$	$87 \cdot 10^{-13}$	5,6	$12 \cdot 10^{-19}$
2	1,0	3,1	8,7	2,5	5,5	12	3,6	1,8	1,0	6,6	5,6	1,0
3	0,5	2,4	9,6	3,0	7,6	17	6,0	3,3	1,9	14	6,0	1,2
4	0,9	2,6	7,3	2,0	4,8	11	3,1	1,6	0,9	5,5	5,6	0,9
5	0,4	1,7	6,2	2,0	5,5	14	5,1	3,0	1,7	12	5,8	1,5
6	1,5	3,4	9,6	2,4	7,6	24	10	4,8	2,9	24	6,2	1,4
7	1,6	3,9	8,7	1,5	3,0	5,9	1,7	0,9	0,9	11	5,6	0,49
8	1,3	2,9	6,5	1,3	3,1	6,8	2,2	1,0	0,8	8,1	5,6	0,58
9	1,7	3,2	6,6	1,3	2,5	7,2	2,4	1,2	0,9	6,8	5,6	0,65
10	1,6	2,6	4,9	1,0	2,3	5,4	1,7	0,6	0,25	1,2	4,0	3,6
11	1,1	1,4	2,3	0,5	1,0	3,2	1,2	0,5	0,26	1,3	4,7	1,1
12	1,3	2,3	4,6	1,0	2,9	9,1	2,9	1,4	0,7	3,8	5,0	1,7
13	1,2	2,1	4,3	1,0	2,7	8,5	2,7	1,1	0,47	2,1	4,4	3,5
14	1,5	3,0	8,5	2,9	12	64	36	19	11	60	5,6	11
15	0,9	2,4	6,8	2,1	6,8	24	9,6	3,8	1,9	11	4,7	7,8
16	1,1	2,7	8,5	2,9	12	64	32	17	9,6	60	5,8	8,1
17	2,0	2,9	5,5	1,4	4,6	17	6,6	2,6	1,2	5,1	4,3	10
18	0,4	0,9	2,1	0,6	1,6	4,9	1,8	0,7	0,3	1,5	4,4	2,4
19	1,4	2,3	5,1	1,4	4,6	17	6,6	2,6	1,2	5,1	4,3	10

Ein Vergleich dieser Werte mit den tatsächlichen Messungen (Tabelle 3, Bild 8) zeigt, daß diese zwar eine kleinere Leitfähigkeit aufweisen, beachtet man aber, daß das Wasservolumen bei 2,7 % Feuchtigkeit nur etwa 0,016 des Gesamtvolumens, bei 7,5 % Feuchtigkeit nur 0,043 des Gesamtvolumens ausmacht, daß nun also die gemessenen Werte mit 60 bzw. 50 multiplizieren muß, um die Leitfähigkeit des Wassers im Papier zu erhalten und daß auch dann noch diese Werte zu klein sind, da bei der Messung die Wasserteilchen zum Teil nichtleitend unterbrochen sind und daher nur ein Mittelwert gemessen wird, so muß die Übereinstimmung als eine sehr gute bezeichnet werden.

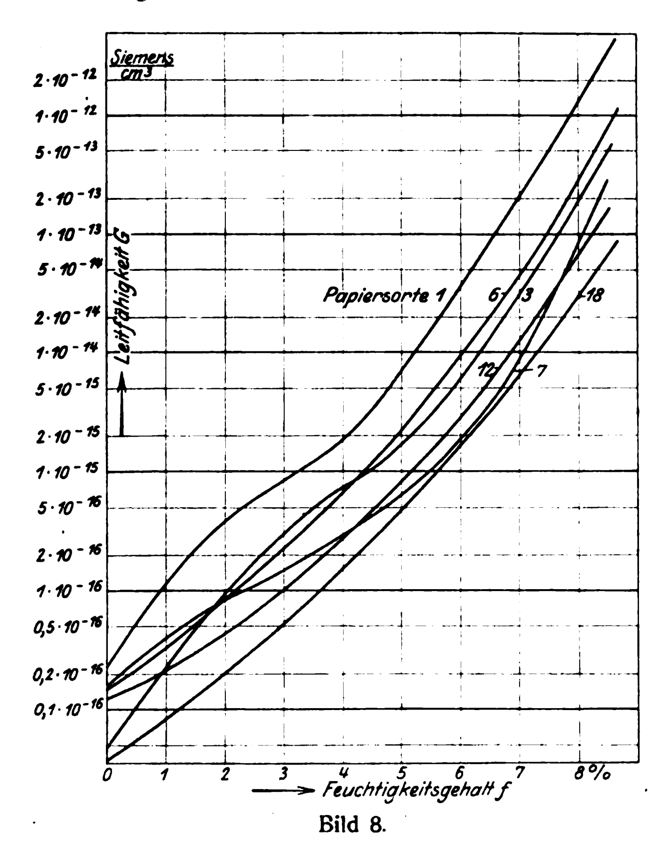


Bild 8.

Für die Rückstandsladung, die bei der Entladung im Zeitintervall t_1 bis t_2 frei wird, $Q = \int_{t_1}^{t_2} I\,dt$, ergibt sich nach Gleichung 24 der Wert:

$$Q = \frac{I_2 t_2 - I_1 t_1}{1 - n}. \tag{29}$$

Für $t_1 = 0,2$ und $t_2 = 5$ min wurden die Werte berechnet und in Bild 7 graphisch aufgetragen. Die so berechnete Rückstandsladung ist der gesamten Rückstandsladung angenähert proportional. Die Kurve zeigt ein sehr stark ausgeprägtes Maximum bei etwa 6 % Feuchtigkeit. In Übereinstimmung damit konnte eine interessante experimentelle Beobachtung gemacht werden. Werden nämlich die Blätter nach der Ladung sofort aus dem Kondensator herausgenommen, so ziehen sich beide Papierblätter bei etwa 6 % Feuchtigkeit sehr stark gegenseitig an. Trennt man die Blätter etwas voneinander und läßt sie dann frei, so klappen sie wieder heftig zusammen. Oberflächenladungen kommen nicht in Betracht, da die Erscheinung auch nach dem Zusammenpressen mit Stanniolblättern unvermindert be-

steht und ziemlich lange Zeit andauert. Wenn der Feuchtigkeitsgehalt größer oder kleiner wird, nimmt die Stärke der Anziehung sehr schnell ab. Dabei ist bemerkenswert, daß die Anziehung bei kleinen Feuchtigkeitsgraden zwar schwach ist, aber sehr viel längere Zeit andauert, während sie bei hohen Feuchtigkeitsgraden äußerst schnell verschwindet, so daß sie nur mit Mühe zu beobachten ist. Es ist anzunehmen, daß auch bei offenem äußerem Stromkreis die Rückstandsladung durch Entladung im Innern des Papiers langsam verschwindet[1]).

Nicht berücksichtigt wurde bei den bisherigen Betrachtungen die Entladekurve 7 des Bildes 5 bei hohem Feuchtigkeitsgehalt, die nicht den normalen Verlauf der übrigen Kurven zeigt. Die Abweichungen können vielleicht durch Polarisationsströme erklärt werden.

Zum Vergleich der verschiedenen Papiersorten untereinander wurde für alle Papierproben der Ladestrom zur Zeit $t = 1$ min für verschiedene Feuchtigkeitsgrade gemessen. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 3 zusammengestellt und für einige Papiersorten in dem Bild 8 graphisch dargestellt. In der logarithmischen Darstellung verlaufen die Kurven von etwa 4% Feuchtigkeit an nahezu geradlinig, d. h. es ist

$$G = G_0 \cdot g^f. \tag{30}$$

Die Werte für G_0 und g sind in der Tabelle 3 ebenfalls mit angegeben. Berücksichtigt man, daß der dem Leitungsstrom überlagerte Verschiebungsstrom besonders bei kleinen Feuchtigkeitsgraden bemerkbar wird, so kann man schließen, daß für den Leitungsstrom allein die Formel 30 mit noch größerer Genauigkeit und auch für kleinere Werte der Feuchtigkeit gilt. Eine stärkere Abweichung von der Geraden zeigen besonders die beiden Papiersorten 7 und 8, die schon äußerlich durch eine große Sprödigkeit auffallen und daher bei den Messungen besonders bei kleinen Feuchtigkeitsgraden ziemlich wellig im Kondensator liegen.

Der Unterschied der einzelnen Papiersorten ist im Vergleich zum starken Einfluß der Feuchtigkeit nur gering. Ein Zusammenhang zwischen diesen Unterschieden und den Materialeigenschaften ist nicht erkennbar. Die Ursache dürfte in rein zufälligen Verschiedenheiten der inneren Struktur zu suchen sein, denn auch verschiedene Blätter der gleichen Sorte zeigten in den Messungen Abweichungen in ungefähr derselben Größenordnung.

8. Die Wechselstrommessungen.

Das Ergebnis der Wechselstrommessungen ist in den Bildern 9 bis 12 graphisch wiedergegeben. Bild 9 (Tabelle 4) zeigt die Abhängigkeit der Kapazitätszunahme $\frac{\Delta C}{C}$ und des Verlustwinkels δ von der Frequenz bei großem Feuchtigkeitsgehalt. Für den Vergleich mit der Theorie ist zu beachten, daß ein Teil des Verlustwinkels dem normalen Leitungsstrom zuzuschreiben ist. Wenn die Gleichstromleitfähigkeit konstant wäre, würde sich dieser Anteil nach der Formel 3 berechnen. Die Gleichstrommessungen haben aber eine Abhängigkeit von der Spannung und eine zeitliche Änderung ergeben. Dem Einfluß der Spannung kann durch Einsetzen eines mittleren Wertes Rechnung getragen werden, der auf Grund der Formel 26 und dem Bild 6 berechnet werden kann. Daraus folgt, daß dieser Anteil des Verlustwinkels kleiner ist, als er sich nach Formel 3 berechnet. Um die zeitliche Nachwirkung berücksichtigen zu können, wäre es notwendig, diese Änderung bei sehr kleinen Zeiten zu kennen. Die Gleichung 26 und die Kurven des Bildes 4 sind das Ergebnis der

[1]) Es ist zu bemerken, daß die Anziehung derart stark ist und bei so großem Abstand bemerkbar ist, daß sie kaum aus der Anziehung elektrischer Ladungen erklärt werden kann. Eine eingehende Untersuchung dieser Erscheinung wurde durch den Ausbruch des Krieges verhindert, dürfte aber zweckmäßig sein, zumal auch neuerdings ähnliches bei blankpolierten Isolatoren und Metallen beobachtet sein soll.



Messungen bei verhältnismäßig großen Zeiten und besitzen für kleine Zeiten fraglos keine Gültigkeit. Die Änderungen bei kleinen Zeiten müssen erheblich größer sein. Man kann mit ziemlicher Sicherheit aussagen, daß der von dem reinen Leitungsstrom herrührende Anteil des Verlustwinkels mit abnehmender Frequenz stark anwachsen muß, jedenfalls erheblich stärker, als einfach proportional der reziproken Frequenz, wie dies nach Gleichung 3 der Fall sein müßte.

Tabelle 4.

Papiersorte Nr. 3. $f = $ ca. 7,8 %
$\theta = 20^0$

ω	$C \cdot 10^6$	$tg\delta \cdot 10^4$	$\frac{C_\omega}{C_{(\omega = 5000)}}$	$\frac{tg\,\delta_\omega}{tg\,\delta_{\omega = 5000}}$
2 200	3,584	230	1,0093	1,40
3 000	3,570	197	1,0054	1,20
4 000	3,558	176	1,002	1,07
5 000	3,551	164	1	1
6 000	3,546	155	0,9986	0,94
8 000	3,537	143	0,9961	0,88
10 000	3,531	135	0,9944	0,82
15 000	3,520₅	122	0,9914	0,74
20 000	3,514	113	0,9896	0,69
30 000	3,504₅	99	0,9869	0,60
40 000	3,499	89	0,9830	0,54

Berechnet man den Verlustwinkel aus den Gleichstromwerten, so ergibt sich ein Wert von der Größenordnung 10^{-8}, während die Wechselstrommessungen einen Wert von der Größenordnung 10^{-4} ergeben. Der Anteil, den der reine Leitungs-

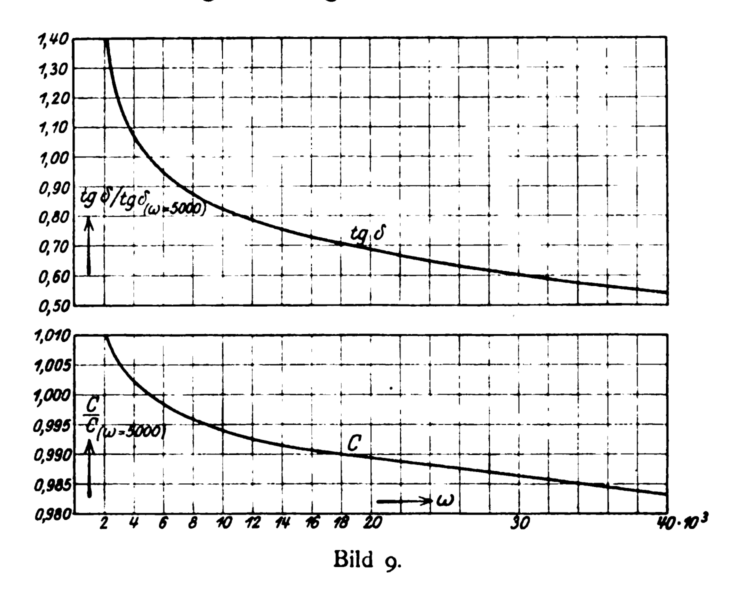


Bild 9.

strom also zum Verlustwinkel beiträgt, ist so gering, daß er gegenüber den Wechselstromwerten zu vernachlässigen ist. Versucht man aber die Kurven des Bildes 8 mit der Wagnerschen Theorie darzustellen, so zeigt sich, daß man unwahrscheinlich große Werte von b annehmen muß, um auch nur angenäherte Übereinstimmung

zu erhalten, ebenso unwahrscheinlich sind die Werte für T_0. Noch deutlicher tritt der Widerspruch mit der Theorie hervor, wenn man das Bild 10 (Tabelle 5) zur Betrachtung heranzieht. Das Bild 10 zeigt die Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Feuchtigkeit. Die Kurven zeigen zunächst eine erhebliche Zunahme des Verlustwinkels mit der Feuchtigkeit, die ebenfalls von ganz anderer Größenordnung ist, als sie sich aus der Gleichstromleitfähigkeit ergeben würde. Besonders auffällig ist die Abhängigkeit von der Frequenz bei verschiedenen Feuchtigkeitsgraden, die ebenfalls im Widerspruch zu den Gleichstromergebnissen steht. Bei kleinen Feuchtigkeitsgraden nimmt der Verlustwinkel mit der Frequenz zu. Hier ist Übereinstimmung mit der Wagnerschen Theorie vorhanden und setzt die Annahme kleiner Werte von T_0 voraus, was durchaus wahrscheinlich ist. Aus den Gleichstrommessungen hatte sich eine Abnahme der Zeitkonstante mit steigender Feuchtigkeit ergeben. Daraus wäre nach der Wagnerschen Theorie zu folgern, daß der Verlustwinkel mit steigender Feuchtigkeit auch stärker mit der Frequenz zunimmt. Das Gegenteil ist der Fall. Bei hohen Feuchtigkeitsgraden nimmt der Verlustwinkel mit der Frequenz stark ab. Offenbar überlagern sich hier zwei Einflüsse,

Tabelle 5.
Papiersorte Nr. 6
$\theta = 20^0$

f	$\mathrm{tg}\,\delta \cdot 10^4$ bei der Frequenz $\omega =$			
	3000	5000	10000	30000
0	27	29	31	36
1	30	33	35	39
2	35	38	40	43
3	42	44	46	48
4	56	56	56	56
5	83	76	71	67
6	137	114	102	89
7	286	228	188	140
7,5	460	360	290	190

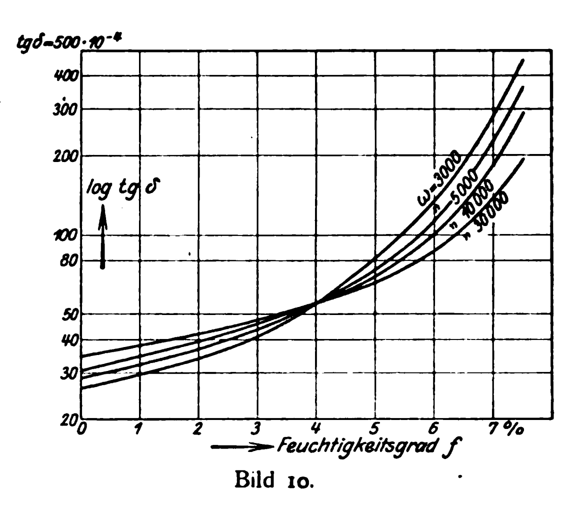


Bild 10.

einmal die dielektrische Nachwirkung des Papiers, und zweitens der Einfluß der Feuchtigkeit. Der erste Anteil des Verlustwinkels wächst mit der Frequenz, der zweite Anteil nimmt mit der Frequenz ab. Diese Abnahme mit der Frequenz wächst mit steigender Feuchtigkeit, gleichzeitig wächst der absolute Wert dieses zweiten Anteils mit der Feuchtigkeit an. So kommt es, daß bei einem mittleren Feuchtigkeitsgehalt von ca. 4% der Verlustwinkel von der Frequenz unabhängig ist. Jede Diskrepanz wäre beseitigt und der Einfluß der Feuchtigkeit durch den einen Leitungsstrom erklärt, wenn nicht der Wert des Verlustwinkels, aus den Gleichstromwerten berechnet, von so erheblich abweichender Größenordnung wäre.

Um die Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Feuchtigkeit festzustellen, wurden für alle Papierproben und verschiedene Feuchtigkeitsgrade Messungen mit der Frequenz $\omega = 5000$ ausgeführt. Die Verlustwinkel sind in der Tabelle 6 und für einzelne Proben (die gleichen wie in Bild 8) in dem Bild 11 graphisch wiedergegeben. Man sieht, daß auch bei den Wechselstrommessungen ein sehr starker Anstieg mit der Feuchtigkeit vorhanden ist. Der Verlauf der Kurven ist in logarithmischer Darstellung den Gleichstromkurven ähnlich, allerdings ist die Annäherung an den geradlinigen Verlauf nicht so groß. Würde der von der dielektrischen Nachwirkung herrührende Teil in Abzug gebracht werden, so würde auch hier die Annäherung an den geradlinigen Verlauf wahrscheinlich sein. Bemerkenswert ist, daß

Tabelle 6.

f	$\operatorname{tg}\delta \cdot 10^4$ für Papiersorte Nr.														$\omega = 5000$, $\theta = 20^\circ$ C				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0 %	33,9	27,8	33,4	33,9	30,3	30,3	28	31	23,3	21,7	13,7	24	16,2	16,0	17,0	18,0	13,6	13,7	24,8
1 %	41	32,3	39,6	38,8	34,8	34	32	34	26	22,6	14,5	28	17,8	18,2	19,5	19,8	17,8	16,4	26,0
2 %	51	37,6	45	43	40	37	37	37	29	23,9	15,6	32	20,0	22,0	22,8	24,0	24,0	20,3	28,6
3 %	65	43	49	46	43	45	44	42	34	26,0	17,2	38	24,0	28,0	27,3	32,7	32,5	25,7	33,5
4 %	90	47	52	49	47	55	54	49	42	29,7	19,6	47	29,6	42	35,5	50	46	34	45
5 %	143	53	58	55	53	73	69	60	60	37,6	24,0	63	39	69	54	84	68	47	65
6 %	262	64	69	65	66	118	104	82	95	52	33,5	95	58	118	90	155	105	70	106
7 %	530	91	106	101	101	243	175	135	160	87	55	154	91	208	156	290	162	112	178
8 %	1160	154	195	186	186	550	315	245	310	162	95	270	150	360	290	(500)	260	184	310
9 %	2500	290	390	370	370	1320	580	470	670	320	170	515	250	640	550	(1000)	420	320	550
$C_{o\,beob.} \cdot 10^6$	2,156	2,526	2,808	2,760	2,603	4,582	3,628	4,544	3,574	2,964	2,570	3,405	3,391	2,819	2,599	3,130	4,115	2,941	2,942
$d_{o\,beob.}$	0,0670	0,0585	0,0515	0,0525	0,0545	0,0320	0,0340	0,0310	0,0330	0,0395	0,0395	0,0335	0,0330	0,0390	0,0410	0,0360	0,0280	0,0315	0,0360
ΔC	0,034	0,018	0,023	0,019	0,013	0,037	0,087	0,081	0,068	0,083	0,022	0,080	0,029	0,024	0,019	0,039	0,041	0,019	0,044
$\varepsilon_{Luft+Papier}$	1,63	1,67	1,63	1,64	1,61	1,66	1,40	1,59	1,33	1.33	1,15	1,29	1,27	1,24	1,21	1,27	1,30	1,05	1,20
ε_{Papier}	2,29	2,14	1,99	2,17	2,35	2,74	2,03	3,10	2,05	2,88	1,52	2,00	2,00	2,17	2,04	2,21	1,68	1,14	2,00

$$\Delta C = \frac{C_f - C_o}{f \cdot C_o} \qquad \varepsilon_{Luft + Papier} = 11{,}3 \cdot 10^6\, d_o\, C_o$$

$$\varepsilon_{Papier} = \frac{d_p}{\frac{1}{11{,}3 \cdot 10^6\, C_o} - (d_o - d_p)}$$

C_f = Kapazität in Mikrofarad bei der Feuchtigkeit f pro 1 cm²
C_o = " " " des trocknen Papiers " "
d_o = Abstand der Kondensatorplatten in cm
d_p = Dicke der Papierzwischenlage (2 Blätter) in cm

die Kurven viel weniger steil ansteigen als bei den Gleichstrommessungen. Zum Vergleich sind in der Tabelle 7 für eine Papierprobe der nach der Formel 3 aus den Gleichstromwerten berechnete Wert $\mathrm{tg}\,\delta_\lambda$ und der für $\omega = 5000$ gemessene Wert von $\mathrm{tg}\,\delta$ zusammengestellt. Man erkennt, daß für trockenes Papier beide Werte von sehr verschiedener Größenordnung sind, sich aber mit zunehmender Feuchtigkeit stark nähern. Bei 8% Feuchtigkeit ist der Unterschied schon nicht

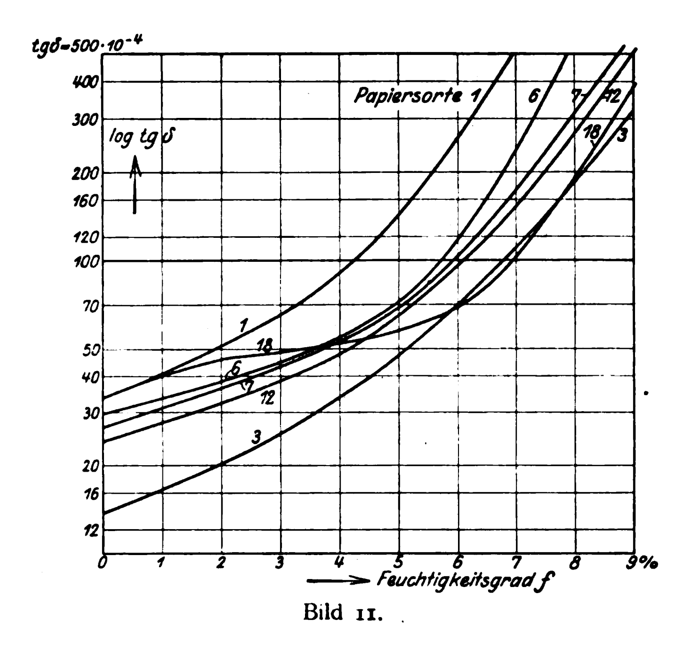


Bild 11.

mehr groß, und es kann angenommen werden, daß er bei Sättigung (Papier nimmt bis zu etwa 20% Feuchtigkeit auf) ganz verschwindet. Dabei ist zu beachten, daß die Gleichstromleitfähigkeit auch stets zu klein gemessen wird (vgl. S. 11, Abschn. 4).

Tabelle 7.

f =	0	2	4	6	8	9
$\mathrm{tg}\,\delta \cdot 10^4 =$	27,8	37,6	47	64	154	290
$\mathrm{tg}\,\delta_\lambda \cdot 10^4 =$	$1{,}35 \cdot 10^{-4}$	$11{,}3 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$4{,}4 \cdot 10^{-2}$	1,18	7,7
$\frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\mathrm{tg}\,\delta_\lambda} =$	$2{,}1 \cdot 10^5$	$3{,}3 \cdot 10^4$	$6{,}7 \cdot 10^3$	$1{,}5 \cdot 10^3$	130	38

$$\mathrm{tg}\,\delta_\lambda = \frac{G}{\omega C}.$$

Die Kapazität wächst ziemlich genau proportional mit dem Feuchtigkeitsgehalt, es ist also:

$$C = C_0 (1 + c \cdot f) \tag{31}$$

c ist demnach die relative Kapazitätszunahme für 1% Feuchtigkeitszunahme. Die Werte von C_0 und c sind in der Tabelle 6 angegeben.

Verlustwinkel und Kapazität wachsen nahezu proportional mit der Temperatur. Die prozentuale Zunahme mit der Temperatur ist für zwei Papierproben in dem Bild 12 (Tabelle 8) graphisch dargestellt.



Tabelle 8.

Θ	f = 8,2 % Papiersorte 19		f = 8,2 % Papiersorte 1	
	$\frac{C_\Theta}{C_{20°}}$	$\frac{tg\,\delta_\Theta}{tg\,\delta_{20°}}$	$\frac{C_\Theta}{C_{20°}}$	$\frac{tg\,\delta_\Theta}{tg\,\delta_{20°}}$
10°	0,97	—	0,86	0,48
15°	0,98	0,62	0,93	0,75
20°	1	1	1	1
25°	1,025	1,36	1,074	1,24
30°	1,054	1,67	1,162	1,46
35°	1,088	1,93	1,266	1,67
40°	1,129	2,18	1,385	1,87
45°	1,180	2,42	1,53	2,05
50°	1,250	2,63	1,69	2,22

Θ = Temperatur in Celsius.

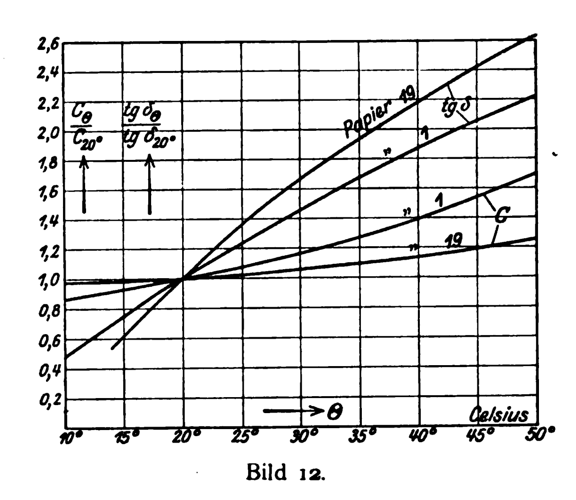


Bild 12.

9. Zusammenfassung.

a) Gleich- und Wechselstrommessungen, die unter verschiedenen mechanischen und elektrischen Bedingungen an einer größeren Anzahl Papierproben ausgeführt wurden, bestätigten die von früheren Forschern untersuchten Erscheinungen der dielektrischen Nachwirkung.

b) Gleichstromleitfähigkeit und Verlustwinkel wachsen mit wachsendem Feuchtigkeitsgehalt des Papiers sehr stark an. Die Wechselstromkapazität nimmt nahezu proportional mit dem Feuchtigkeitsgehalt zu.

c) Die Gleichstromleitfähigkeit wächst mit zunehmender Spannung und zeigt eine zeitliche Zunahme. Diese Erscheinungen werden durch die Evershedsche Theorie erklärt.

d) Die zeitliche Abnahme der dielektrischen Nachwirkung bei den Gleichstrommessungen wächst mit zunehmender Feuchtigkeit, d. h. die Zeitkonstante verschiebt sich mit zunehmender Feuchtigkeit nach kleineren Werten hin.

e) Die Rückstandsladung besitzt ein ziemlich scharf ausgeprägtes Maximum bei etwa 6% Feuchtigkeit.

f) Bei trocknem Papier nimmt der Verlustwinkel mit der Frequenz zu, bei feuchtem Papier dagegen mit steigender Frequenz ab. Ersterer Einfluß

rührt von der dielektrischen Nachwirkung, letzterer vom Feuchtigkeitsgehalt (Leitungsstrom) her.

g) Ein Einfluß der Zusammensetzung oder sonstigen Beschaffenheit des Papiers konnte nicht bemerkt werden.

Bei Messungen an feuchtigkeitshaltigen Stoffen ist zwischen zwei Teileinflüssen zu unterscheiden. Der erste Anteil ist der dielektrischen Nachwirkung zuzuschreiben. Soweit eine Trennung dieses Anteils aus der Gesamtwirkung möglich ist, findet die Theorie der dielektrischen Nachwirkung, insbesondere die Theorie von Wagner ihre Bestätigung. Der zweite Anteil ist dem Feuchtigkeitsgehalt zuzuschreiben. Dieser beeinflußt einmal den Verlauf der reinen dielektrischen Nachwirkung und liefert zweitens einen Anteil, dessen Verlauf sich mit den Beobachtungen und der Theorie von Evershed erklären lassen. Ein Zusammenhang zwischen Gleich- und Wechselstromkonstanten besteht quantitativ bei kleinen Feuchtigkeitsgraden nicht, mit zunehmender Feuchtigkeit wächst die Annäherung.

Literaturübersicht.

Die ältere Literatur ist zusammengestellt bei E. v. Schweidler. Ann. d. Phys. **24.** 711. 1907.

1. W. Hahnemann, L. Adelmann, ETZ. **28.** 988—90. 1010—11. 1907.
2. F. Lüschen, Blätter f. Post u. Tel. **4.** 588. 1908.
3. M. Arndt, ETZ. **31.** 1271—72. 1910.
4. G. Jaffé, Ann. d. Phys. **28.** 326. 1909.
5. R. S. Allen, Electrician **63.** 339. 1909.
6. A. Ebeling, ETZ. **31.** 419—23. 1910; **34.** 433—36. 1913.
7. H. L. Curtis, Bull. of the Bur. of Stand. Washington **6.** 471. 1910; **11.** 359. 1915. ETZ. **37.** 469—71. 1916.
8. F. W. Grover, Bull. of the Bur. of Stand. Washington. **7.** 495. 1911.
9. H. Jordan, ETZ. **32.** 127—30. 160-62 172. 1911; Verh. d. deutsch. phys. Ges. **14.** 451. 1912.
10. K. W. Wagner, ETZ **32.** 1001—02. 1911; **33.** 635—37. 1912; **36.** 606—609, 601—24. 1915. Ann. d. Phys. **40.** 817—55. 1913. Arch. f. El. **2.** 371—87. 1914; **3.** 67-106. 1914. ETZ. **34.** 1279—81. 1913; **35.** 740. 1614; **36.** 111. 121. 1915.
11. K. W. Wagner, A. Wertheimer, Phys. ZS. **13.** 368—75. 1912; ETZ. **34.** 613—16. 649—54. 1913.
12. A. Wertheimer, ETZ. **34.** 555—57. 1913.
13. L. Schiller, Ann. d. Phys. **35.** 931. 1911.
14. Tch Bialobjeski, Le Radium **9.** 250—59. 1912. (ETZ. **34.** 38. 1913).
15. W. Petersen, Arch. f. El. **1.** 95—109. 1912.
16. J. A. Fleming, B. Dyke, Journ. Inst. El. Eng. **49.** 323. 1912; Electrieian **68.** 1017. 1912
17. L. Pungs, Diss. Darmstadt 1913. (ETZ. **35.** 365. 1915).
18. M. Bureau, Bull. Soc. Int. Electriciens **3.** 669. 1913 (ETZ. **15.** 306. 1914).
19. Tedeschi, Arch. f. El. **1.** 497. 1913.
20. S. Evershed, Journ. Inst. El. Eng. **52.** 51—73 1913. (ETZ. **35.** 887. 1914).
21. C. L. Fortescue, S. W. Tarnsworth, Proc. Am. Inst. El. Eng. **32.** 757—71. 1913. (ETZ. **35.** 1045. 1914).
22. E. F. Petritsch, El. u. Masch. **33.** 445-50. 461—65. 1915.
23. F. W. Peeck, Proc. Am. Inst. El. Eng. **34.** 1695. 1915. (ETZ. **37.** 246. 1916).
24. Grünberg, Diss. Darmstadt. (ETZ. **37.** 290—91. 1916).
25. L. Schüler, ETZ. **37.** 535—37. 1916.
26. F. Tank, Ann. d. Phys. **48.** 307. 1915; Verh. d. deutsch. phys. Ges. **20.** 3. 1918.
27. U. Meyer, Verh. d. deutsch. phys. Ges. **19.** 139—54. 1917.

Stationäre Resonanzüberströme in elektrischen Kraftnetzen.

Theorie des gesättigten Transformators.

Von

Walter Dällenbach.

In elektrischen Kraftnetzen werden bei bestimmten kapazitiven Belastungen stationäre Resonanzüberströme höherer Frequenz beobachtet, die den Normalströmen überlagert, zu mancherlei Störungen Anlaß geben können. Ich will in dieser Arbeit zeigen, daß der nicht proportionale Verlauf von Fluß und Magnetisierungsstrom im gesättigten Transformator und die damit verbundene Frequenzumwandlung die Ursache der beobachteten Erscheinung sein kann.

Vorbemerkung über Fourierreihen.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t + \ldots\ldots \text{ in inf.} \qquad (1)$$

ist die bekannte Entwicklung einer periodischen Funktion der Zeit $f(t)$ in eine Fourierreihe. ν ist die Frequenz, $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz der Grundwelle.

Für die folgende Rechnung ist vorteilhaft durch Benützen komplexer Größen (1) in eine gedrängte Form zu bringen. Bedeuten $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit und c_n ein zu c_{-n} konjugiert komplexer Koeffizient, so ist

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j n \omega t} \qquad (2)$$

eine mit (1) völlig identische, in der Mathematik übliche Darstellung der Funktion $f(t)$, falls die reellen Koeffizienten a_n und b_n aus den komplexen c_n vermöge folgender Gleichungen entspringen

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = j\,(c_n - c_{-n}).$$

Man erkennt diese Identität, wenn man in (2) setzt

$$e^{j n \omega t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t$$

und jeweilen das n^{te} Glied mit dem $-n^{ten}$ Gliede zusammenfaßt.

Der exakte Ansatz. Vorläufige Diskussion. Der Fall der Resonanz.

Ein Einphasen-Generator G sei über einen gesättigten Einphasentransformator T belastet (Bild 1). Die Streuinduktivität des Primärkreises (Generator plus Transformator) betrage S Henry, sein Widerstand R^I Ohm. Die Belastung des Sekundärkreises inkl. Sekundärstreuung des Transformators lasse sich nachahmen durch Serieschaltung einer Induktivität L Henry, einer Kapazität C Farad und eines Widerstandes R^{II} Ohm. Die Momentanwerte der Zustandsgrößen seien bezeichnet durch

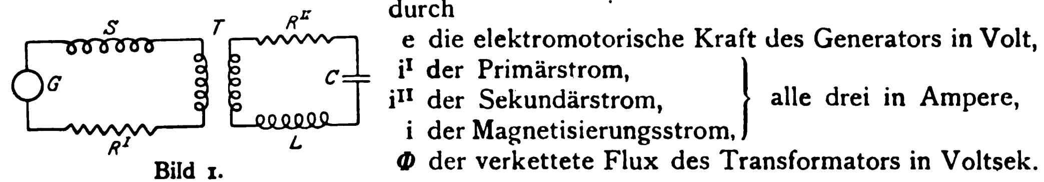


Bild 1.

- e die elektromotorische Kraft des Generators in Volt,
- i^I der Primärstrom, } alle drei in Ampere,
- i^{II} der Sekundärstrom, } alle drei in Ampere,
- i der Magnetisierungsstrom, } alle drei in Ampere,
- Φ der verkettete Flux des Transformators in Voltsek.

Nennen wir ferner z_1 und z_2 die Windungszahlen des Transformators, $u = \frac{z_1}{z_2}$, sein Übersetzungsverhältnis, so sind, wenn e eine bekannte Funktion der Zeit ist,



die vier unbekannten Funktionen i^I, i^{II}, i und Φ bestimmt durch die folgenden vier Gleichungen

$$e - S\frac{di^I}{dt} - i^I R^I = z_1 \frac{d\Phi}{dt} \tag{3a}$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i^{II}\,dt + \mathfrak{L}\frac{di^{II}}{dt} + i^{II} R^{II} = -z_2\frac{d\Phi}{dt} \tag{3b}$$

$$i = i^I + \frac{1}{u} i^{II} \tag{3c}$$

Magnetisierungskurve $\Phi = \Phi\,(i)$. (3d)

Die freien Schwingungen, deren das System fähig ist, interessieren uns hier nicht. Wir fragen nach der stationären Lösung. Die Variabeln sollen periodische Funktionen der Zeit sein. Wenn wir für sie, die nach (2) verständlichen Ansätze einführen

$$e = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_n e^{jn\omega t} \qquad i^I = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^I_n e^{jn\omega t} \qquad \Phi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n e^{jn\omega t},$$

$$i = \sum_{-\infty}^{+\infty} i_n e^{jn\omega t} \qquad i^{II} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^{II}_n e^{jn\omega t}$$

so zerfallen die Gleichungen (3a), (3b), (3c) wegen ihrer Linearität in unendlich viele lineare Gleichungen für die komplexen Fourierkoeffizienten. Nämlich

$$e_n - (jn\omega S + R^I)\, i^I_n = jn\omega z_1 \Phi_n \tag{4a}$$

$$\left(\frac{1}{jn\omega C} + jn\omega L + R^{II}\right) i^{II}_n = -jn\omega z_2 \Phi_n \tag{4b}$$

$$i_n = i^I_n + \frac{1}{u} i^{II}_n. \tag{4c}$$

Die Gleichung $\Phi = \Phi(i)$ der Magnetisierungskurve ist der Behandlung am wenigsten zugänglich. Es wird daher zweckmäßig sein, zunächst aus (4a), (4b), (4c) i^I_n und i^{II}_n zu eliminieren und aus ihnen eine Gleichung zwischen Φ_n und i_n allein zu gewinnen, die zusammen mit der Gleichung $\Phi = \Phi(i)$ die Unbekannten bestimmt.

Nennen wir

$$jn\omega S + R^I = Z^I_n, \qquad u^2\left(jn\omega \mathfrak{L} + \frac{1}{jn\omega C} + R^{II}\right) = Z^{II}_n, \tag{5a und b}$$

die Primär- bzw. Sekundärimpedanz, so lautet die Beziehung zwischen i^I_n und i^{II}_n, die man aus (4a) und (4b) erhält durch Elimination von Φ_n

$$e_n - Z^I_n i^I_n + \frac{1}{u} Z^{II}_n i^{II}_n = 0.$$

Daraus und aus (4c), i^I_n bzw. i^{II}_n eliminiert, liefert

$$i^I_n = \frac{e_n + Z^{II}_n i_n}{Z^I_n + Z^{II}_n}, \qquad \frac{1}{u} i^{II}_n = \frac{e_n - Z^I_n i_n}{Z^I_n + Z^{II}_n}. \tag{6a und b}$$

Benützt man (6a), um in (4a) i^I_n durch i_n auszudrücken, so folgt aus (4a)

$$\Phi_n = K_n\left(\frac{e_n}{Z^I_n} - i_n\right), \tag{7}$$

wo abkürzend die



$$K_n = \frac{1}{j n \omega z_1} \frac{Z_n^I Z_n^{II}}{Z_n^I + Z_n^{II}} \tag{5c}$$

Konstanten des Systems sind.

Der weitere Weg muß nun der sein, daß aus den Gleichungen (3a) und (7) die Funktionen Φ (t) und i (t) ermittelt werden. Aus i (t) folgen dann vermöge der Gleichungen (6a) und (6b) i^I und i^{II}.

Bevor wir diese Aufgabe im nächsten Abschnitt durchführen — sie stellt ein mathematisches Problem für sich dar — soll zunächst die Diskussion der bis hierher gewonnenen Beziehungen vorweg genommen werden. Die Unterbrechung des mathematischen Gedankenganges rechtfertigt sich deshalb, weil aus diesen Beziehungen schon die hauptsächlichsten Eigenschaften des gesättigten Transformators zu ersehen sind.

Der nicht-lineare Verlauf der Magnetisierungskurve $\Phi = \Phi(i)$ bringt es mit sich, daß einmal Φ(t) und i(t) auch dann Oberwellen enthalten, wenn die Generator EMK rein sinusförmig variiert, und daß ferner die Überlagerung zweier Lösungen der Gleichungen (3d) und (7) im allgemeinen keine Lösung mehr darstellt. Das in der Theorie des ungesättigten Transformators zutreffende Superpositionsprinzip gilt hier nicht. Bei Generatoren und Transformatoren, wie sie heute gebaut werden, sind die Oberwellen der Generator EMK klein zu deren Grundwelle. Ebensolches gilt für die Oberwellen im Magnetisierungsstrom des Transformators zu den Grundwellen seiner Vollastströme. Aus den Gleichungen (6a) und (6b) folgt daher, daß man im allgemeinen recht tut, die Oberwellen in Primär- und Sekundärstrom zu vernachlässigen und nur mit deren Grundwellen zu rechnen. Doch gibt es, wie diese Gleichungen erkennen lassen, für jede Oberwelle einen ausgezeichneten Belastungsfall, den Fall der Resonanz, für den das auch nicht mehr angenähert zutrifft, vorausgesetzt, daß die Dämpfung nicht abnorm groß ist. Ist nämlich für die n^{te} Oberwelle der Nenner $Z_n^I + Z_n^{II}$ der Gleichungen (6a) und (6b) sehr klein und reduziert sich im Fall der Resonanz auf die Ohmschen Widerstände $R^I + u^2 R^{II}$, so werden auch verhältnismäßig kleine Oberwellen von e_n und i_n bedeutende Resonanzströme i_n^I und i_n^{II} in Primär- und Sekundärkreis zur Folge haben. Wir werden nicht fehlgehen, in diesen stationären Überströmen höherer Frequenz die Ursache der Störungen zu erblicken, die bei kapazitiver Belastung von Zentralen beobachtet wurden und die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gegeben haben.

Wenn wir die Gleichungen (6a) und (6b) daraufhin genauer betrachten, so zeigen sie, daß die n^{ten} Harmonischen in den Hauptströmen sich additiv zusammensetzen aus 2 Termen, deren erster abhängt von der n^{ten} Harmonischen in der EMK des Generators, deren zweiter abhängt von der n^{ten} Harmonischen im Magnetisierungsstrom des Transformators. Insofern der Magnetisierungsstrom des Transformators via Magnetisierungskurve selber wieder eine Funktion der Generatorspannung ist — wir werden sie im nächsten Abschnitt ermitteln — wird auch der zweite Term durch die Generatorspannung beeinflußt. Wir behandeln die 2 Terme gesondert.

Die n^{te} Oberwelle der EMK e_n des Generators erzeugt in den Hauptströmen n^{te} Oberwellen

$$i_n^I = -\frac{1}{u} i_n^{II} = \frac{e_n}{Z_n^I + Z_n^{II}},$$

welche in Phasenopposition sind und sich verhalten umgekehrt wie die Windungszahlen. Im Fall der Resonanz werden diese Ströme maximal. Transformator und Netz bilden für die n^{te} Harmonische des Generators einen Kurzschlußkreis vom Widerstand $R^I + u^2 R^{II}$.



Ob die Generatoren, wie sie heute gebaut werden, Oberwellen in ihrer EMK erzeugen, die genügen, um Resonanzüberströme zu erregen, die den in Zentralen beobachteten Störungen entsprechen, bedürfte einer besondern Untersuchung über Generatoren, die nicht in den Rahmen dieser Arbeit gehört.

Größeres Interesse bieten die n^{ten} Oberwellen der Hauptströme, die ihre Ursache haben in der n^{ten} Oberwelle des Magnetisierungsstromes des Transformators. Sie betragen nach den Gleichungen (6a) und (6b)

$$i_n^I = \frac{Z_n^{II}}{Z_n^I + Z_n^{II}} i_n \quad \text{und} \quad -\frac{1}{u} i_n^{II} = \frac{Z_n^I}{Z_n^I + Z_n^{II}} i_n.$$

Der Transformator sei angeschlossen an ein größeres, leerlaufendes Verteilungsnetz. Wenn wir absehen von dem wenig interessanten Sonderfall, daß die Sekundärimpedanz Z_n^{II} sich reduziert auf den Ohmschen Widerstand $u^2 R^{II}$, so werden unter Verhältnissen, wie sie in praktischen Fällen vorliegen, die Ohmschen Widerstände in Z_n^I und Z_n^{II} und — sofern wir uns der Resonanzlage fernhalten — auch der in $Z_n^I + Z_n^{II}$ zu vernachlässigen sein. i_n^I bezw. i_n^{II} sind dann entweder in Phase oder in Phasenopposition zu i_n. Die zur Magnetisierung nötige Oberwelle i_n wird durch die Hauptströme gedeckt, ohne in diesen Oberwellen zu verursachen, die zu Störungen Anlaß geben könnten. Nähern wir uns jetzt mit der Belastung der Resonanzlage, so werden die Reaktanzen von Z_n^I und Z_n^{II} schließlich entgegengesetzt gleich, so daß bis auf die kleinen Ohmschen Widerstände gilt $Z_n^I = -Z_n^{II}$, und

$$i_n^I = \frac{Z_n^{II}}{R^I + u^2 R^{II}} i_n = -\frac{1}{u} i_n^{II}.$$

Die Hauptströme i_n^I und i_n^{II} sind daher nicht streng, aber doch mit großer Annäherung in Phasenopposition, während der Magnetisierungsstrom i_n auf ihnen senkrecht steht (Bild 2). Die beiden Hauptströme müssen daher relativ große n^{te} Oberwellen führen, um eine im Magnetisierungsstrom nötige, wenn auch relativ kleine, n^{te} Oberwelle decken zu können. — Vom gesättigten und belasteten Transformator werden wir im nächsten Abschnitt allgemein die Oberwellen im Magnetisierungsstrom berechnen und im letzten Abschnitt an Hand eines numerischen Beispieles für Resonanz der 5ten Oberwelle zeigen, daß der Transformator allein genügt, um Störungen zu erzeugen, wie sie in Betrieben vorkommen. —

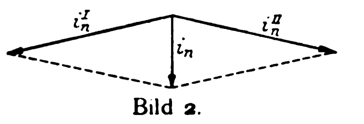


Bild 2.

Angenäherte Berechnung von Flux und Magnetisierungsstrom des belasteten Transformators. Die Frequenz-Umwandlung.

Wir kehren zurück und nehmen den mathematischen Gedankengang wieder auf, den wir unterbrochen haben. Es sollen für den Fall vorgegebener höherer Harmonischer e_n in der EMK des Generators aus den Gleichungen (3d) und (7) der Fluß Φ und der Magnetisierungsstrom i als Funktionen der Zeit berechnet werden.

Als erster Weg bietet sich der folgende an: man vernachlässigt die Hysterese und macht für $\Phi = \Phi$ (i) irgend einen der bekannten, oder noch unbekannten analytischen Ansätze, der eine genügende Annäherung an die Leerlaufcharakteristik des Transformators darstellt. Als einfachstes Beispiel mag gelten:

$$i = \delta_1 \Phi + \delta_3 \Phi^3$$

Führt man darin die Fourierentwicklungen von i und Φ ein und bringt die rechte Seite wieder auf die Form einer Fourierreihe, so ergibt die Methode der Koeffizientenvergleichung die Koeffizienten i_n von i als Funktion der Koeffizienten Φ_n von Φ in Gestalt von nicht linearen unendlichen Reihen. Führt man diese Reihen für die



Koeffizienten i_n in das Gleichungssystem (7) ein, so geht dieses über in ein System von unendlich vielen nicht linearen Gleichungen für die unendlich vielen Unbekannten Φ_n. Insbesondere die Nichtlinearität erschwert es, eine brauchbare angenäherte Lösung zu finden. Ergänzt man den Ansatz für i durch weitere Glieder $+ \delta_5 \Phi^5 + \delta_7 \Phi^7 + \ldots$, so wird die Rechnung umständlicher, wählt man für $i = i(\Phi)$ eine transzendente Funktion, so tritt an Stelle der ganzen rationalen Funktion eine unendliche Reihe und als weitere Schwierigkeit kommt hinzu die Frage ihrer Konvergenz. Scherbius[1]) hat in dieser Richtung einen Versuch gemacht.

Eine weitere Möglichkeit wäre nach dem Vorgange von Biermanns[2]), zunächst auf die Entwicklung in Fourierreihen zu verzichten, den analytischen Ansatz für Φ (i) in die Differentialgleichungen (3) einzusetzen und deren Integration direkt zu versuchen, wie das Biermanns für die Eigenschwingungen eines einfachen Schwingungskreises, gebildet aus einer eisengesättigten Drosselspule und einem Kondensator, durchgeführt hat. In unserem Fall handelt es sich um die durch eine Generator-EMK beliebiger Kurvenform erzwungenen Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden. Die Gleichungen werden so kompliziert, daß ich es aufgegeben habe, in dieser Richtung zu suchen. Wir schlagen einen anderen Weg ein.

Sind einerseits die Resonanzüberströme höherer Frequenz, die wir berechnen wollen, von derselben Größenordnung, aber doch kleiner als die Normalströme selbst, so werden die Oberwellen der Streuflüsse im Primärkreis klein sein im Verhältnis zum Hauptfluß des Transformators. Sind anderseits auch die Oberwellen in der EMK des Generators relativ zur Grundwelle hinreichend klein, so wird der Hauptfluß des Transformators verhältnismäßig wenig von der Sinusform abweichen. Stellen $e^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$ eine in diesem Sinne zu der uns interessierenden Lösung e, Φ, i benachbarte Lösung der Gleichungen (3d) und (7) dar, deren Fluß $\Phi^{(0)}$ aber rein periodisch variiert, so geht die Annahme, die wir jetzt machen wollen, dahin, daß in

$$\left.\begin{aligned} e &= e^{(0)} + \Delta e \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \Delta \Phi \\ i &= i^{(0)} + \Delta i \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

die Momentanwerte der Differenzlösung Δe, $\Delta \Phi$, Δi kleine Größen seien gegenüber den Amplituden der Grundwellen von e, Φ, i.

Wegen der Linearität der Gleichung (7) genügt ihr auch die Differenzlösung

$$\Delta \Phi_n = K_n \left(\frac{\Delta e_n}{Z_n^I} - \Delta i_n \right). \tag{9}$$

Für die nicht lineare Magnetisierungskurve $\Phi = \Phi(i)$ trifft ähnliches nicht zu.

Dagegen sind wir imstande, aus ihr eine weitere Beziehung zwischen $\Delta \Phi$ und Δi zu gewinnen für den Fall, daß wir diese Größen in erster Annäherung als unendlich klein ansehen. Nämlich:

$$\Delta \Phi = \frac{d\Phi}{di} \Delta i. \tag{10}$$

$\frac{d\Phi}{di}$, die Ableitung der Magnetisierungskurve, ist mit dieser gegeben und, wenn wir etwa auf graphischem Wege die Lösung $e^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$ ermittelt denken, so kennen wir $\frac{d\Phi}{di}$ auch als Funktion der Zeit. In Bild 3 sind zusammengehörende Oszillogramme von $\Phi^{(0)}$, $i^{(0)}$, $\frac{d\Phi}{di}$ dargestellt, wie sie folgen aus der Hysteresisschleife Bild 4. Die dazugehörende EMK $e^{(0)}$ müßte nach Gleichung (7) so gewählt werden, daß $\Phi^{(0)}$

[1]) Scherbius, Die magnetische Induktion in geschlossenen Spulen. München und Berlin, Oldenburg 1919.

[2]) Biermanns, Archiv für Elektrotechnik. Bd. III (1915), S. 345.

wie verlangt rein periodisch variiert. Sind also $e^{(0)}, \Phi^{(0)}, i^{(0)}$ und damit $\frac{d\Phi}{di}$ bekannt, so wird es möglich, vermöge der Gleichungen (9) und (10) $\Delta\Phi$ und Δi und damit die gesuchte Lösung e, Φ, i zu berechnen.

Bevor wir die Rechnung durchführen, wollen wir noch einmal und diesmal zusammenhängend die Folge von Operationen durchgehen, die bei gegebener EMK e des Generators zur Bestimmung von Fluß Φ und Magnetisierungsstrom i des Transformators nötig sind.

Es wird zunächst nach der elementaren Theorie des Transformators die zum Effektivwert von e gehörende Amplitude des Flusses Φ angenähert gerechnet. Variiert Φ mit dieser Amplitude rein periodisch, — es sei dies der Fluß $\Phi^{(0)}$ — so folgen aus der empirisch gegebenen Hysteresisschleife graphisch die Oszillogramme von $i^{(0)}$ und

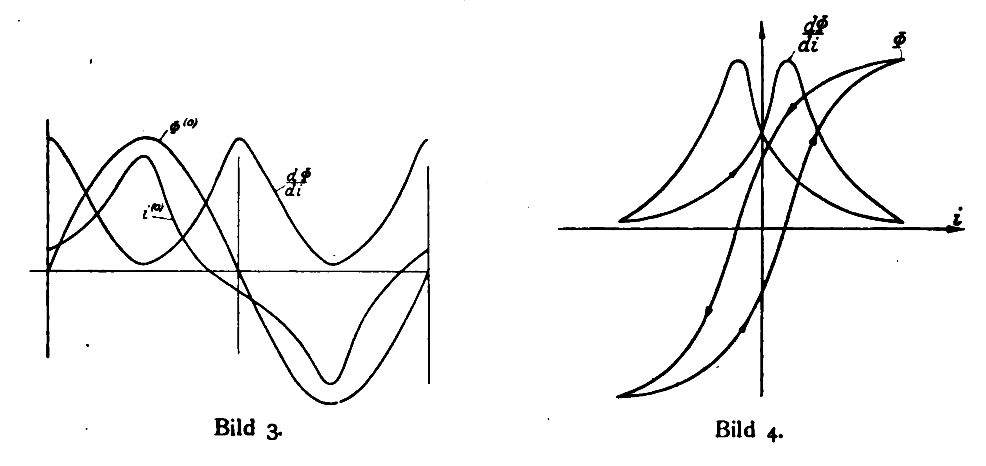


Bild 3. Bild 4.

$\frac{d\Phi}{di}$. Führt man $\Phi^{(0)}$ und $i^{(0)}$ in Gleichung (7) ein, so folgt aus ihr exakt die EMK $e^{(0)}$ des Generators, die er zu reinperiodischer Variation des Transformatorflusses haben müßte. Diese Grundlösung $e^{(0)}, \Phi^{(0)}, i^{(0)}$ ist es, die wir zur wirklichen Lösung als unendlich benachbart annehmen. Aus der tatsächlich wirkenden EMK des Generators folgt die Differenz $\Delta e = e - e^{(0)}$ und aus ihr sind vermöge (9) und (10) $\Delta\Phi$ und Δi zu berechnen, wie wir jetzt noch zu zeigen haben, und damit sind auch Φ und i und schließlich auch i^{I} und i^{II} bestimmt.

Das aus der empirisch vorliegenden Hysteresisschleife ermittelte Oszillogramm von $\frac{d\Phi}{di}$ werde harmonisch analysiert und führe auf die Fourierentwicklung

$$\frac{d\Phi}{di} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_r e^{jr\omega t} \tag{11a}$$

Wegen der Punktsymmetrie der Hysteresisschleife zum Ursprung enthält sie nur gerade Glieder.

Machen wir ferner für $\Delta\Phi$ und Δi die Ansätze

$$\Delta\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta\Phi_n e^{jn\omega t}, \qquad \Delta i = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta i_s e^{js\omega t} \tag{11 b und c}$$

so folgt aus (10)
$$\Delta\Phi = \sum_{r,s=-\infty}^{+\infty}\sum A_r \Delta i_s e^{j(r+s)\omega t}$$

oder setzt man $r + s = n$, so wird

$$\Delta \Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega t} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{n-s} \Delta i_s.$$

Daraus durch Koeffizientenvergleichung mit (11 b)

$$\Delta \Phi_n = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{n-s} \Delta i_s \tag{12}$$

Führt man diesen Ausdruck für $\Delta \Phi_n$ in (9) ein, so resultiert für die unendlich vielen Unbekannten Δi_s das folgende System unendlich vieler linearer Gleichungen:

$$K_n \Delta i_n + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{n-s} \Delta i_s = \frac{K_n}{Z_n^1} \Delta e_n. \tag{13}$$

Wegen der Punktsymmetrie der Hysteresisschleife enthalten $i^{(o)}$ und also auch $e^{(o)}$ nur ungerade Glieder. Liefert auch der Generator nur ungerade Harmonische e, so sind nur ungerade Δe_n von Null verschieden. Anderseits, da alle ungeraden Δ_{n-s} verschwinden, enthält die linke Seite jeder Gleichung des Systems (13) entweder nur gerade, oder nur ungerade Glieder. (13) zerfällt daher in 2 Gleichungssysteme, und zwar in ein inhomogenes für die ungeraden Δi_s und in ein homogenes für die geraden Δi_s.

Wegen der Willkürlichkeit der Koeffizienten Δ verlangt das homogene, daß alle geraden Harmonischen Δi_s verschwinden müssen. Über die Lösung des inhomogenen Systems von Gleichungen kann man allgemein aussagen, daß jedes Δi_n eine lineare homogene Funktion aller Δe_s sein muß.

$$\Delta i_n = \sum_{s=\infty}^{+\infty} A_{ns} \frac{K_s}{Z_s^1} \Delta e_s.$$

Also: Irgend eine Harmonische des Magnetisierungsstromes wird von allen Harmonischen der Generator EMK beeinflußt. Die Konstanten A_{ns} hängen ab von K_n und Δ_n[1]).

Wir machen hier eine weitere vereinfachende Annahme: Es soll die Fourierentwicklung für $\frac{d\Phi}{di}$ mit dem zweiten Gliede abbrechen.

$$\frac{d\Phi}{di} = \Delta_0 + (\Delta_2 + \Delta_{-2}) \cos 2\omega t + j(\Delta_2 - \Delta_{-2}) \sin 2\omega t.$$

Orientieren wir den Nullpunkt der Zeitachse derart, daß der reinperiodische Fluß $\Phi^{(o)}$ durch eine Sinusfunktion dargestellt wird, $\Phi^{(o)} = \Phi_m \sin \omega t$, so ist $\Delta_2 - \Delta_{-2}$ ein Maß der Hysterese. Dabei beträgt der Maximalwert Φ_m des Flusses $\Phi^{(o)}$, wenn wir ihn ausdrücken durch die Koeffizienten seiner Fourierentwicklung, gleich $-2j\Phi_1^{(o)}$ Um die folgenden Rechnungen nicht unnötig zu belasten, nehmen wir weiter an, das Eisen zeige keine Hysterese, es sei $\Delta_2 = \Delta_{-2} =$ reell. Durch diese Annahme entgeht uns nichts Wesentliches. Der im folgenden eingeschlagene Weg zur Lösung des vereinfachten Gleichungssystems bleibt übrigens ohne weitere Schwierigkeiten, allein mit einem etwas größeren Aufwand an Symbolen, auch ohne diese Annahme gangbar.

[1]) Sie sind die normierten Unterdeterminanten der unendlichen Determinante des inhomogenen Gleichungssystems (13). Die Aufgabe wäre, diese normierten Unterdeterminanten allgemein zu berechnen. Vielleicht schöpft ein Mathematiker aus der elektrotechnischen Bedeutung des Problems die Anregung, seine allgemeine Lösung zu versuchen.



Wir machen also endgültig den Ansatz

$$\frac{d\Phi}{d\,i} = \Delta_0 + 2\,\Delta_2 \cos(2\,\omega\,t).$$

Wir sind so zu einer bestimmten vereinfachenden Annahme über den Charakter der Magnetisierungskurve geführt worden, und wir wollen noch untersuchen, durch was für eine analytische Funktion sie jetzt dargestellt wird. Berücksichtigen wir, daß $\Phi^{(0)} = \Phi_m \sin \omega\,t$, also $\cos(2\,\omega\,t) = 1 - 2\left(\frac{\Phi^{(0)}}{\Phi_m}\right)^2$ sind und setzen wir $\frac{\Phi^{(0)}}{\Phi_m} = u$, so wird

$$i = \Phi_m \int\limits_0^u \frac{d\,u}{\Delta_0 + 2\,\Delta_2 - 4\,\Delta_2\,u^2}.$$ Daraus nach Integration

$$\Phi^{(0)} = \Phi_m \sqrt{\frac{\Delta_0 + 2\,\Delta_2}{4\,\Delta_2}} \cdot \mathfrak{Tg}\left\{\frac{i}{\Phi_m}\sqrt{4\,\Delta_2\,(\Delta_0 + 2\,\Delta_2)}\right\}, \tag{15}$$

also der Tangenshyperbolicus, wie er für verschiedene Abszissenmaßstäbe im Bild 5 dargestellt ist. Die Leerlaufcharakteristik eines Transformators gibt er insofern unvollkommen wieder als der lineare Anstieg des Flusses nach erreichter Sättigung gar nicht zum Ausdruck kommt. Mit dem Ansatz (14) nimmt das Gleichungssystem (13) die Gestalt an

Bild 5.

$$\Delta_{-2}\,\Delta i_{n+2} + (\Delta_0 + K_n)\,\Delta i_n + \Delta_2\,\Delta i_{n-2} = \frac{K_n}{Z^I_n}\,\Delta e_n,$$

oder indem wir setzen

$$C_n = \frac{\Delta_0 + K_n}{\Delta_2} \tag{16}$$

$$\Delta i_{n+2} + C_n\,\Delta i_n + \Delta i_{n-2} = \frac{K_n}{\Delta_2\,Z^I_n}\,\Delta e_n, \tag{17}$$

wo n alle ungeraden Werte durchläuft von $-\infty$ bis $+\infty$.

Wie bei einem System endlich vieler linearer, inhomogener Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten, bestimmt sich auch hier jede Unbekannte Δi_n als Quotient zweier Determinanten. Hier sind es aber Determinanten mit unendlich vielen Gliedern, und zwar steht im Nenner die eigentliche Determinante D des Systems

$$D = \begin{vmatrix} \text{in inf.} & C_{n-4} & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & C_{n-2} & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & C_n & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & C_{n+2} & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{n+4} & \text{in inf.} \end{vmatrix}$$

Als Zähler aber steht eine Determinante, die man aus D erhält, wenn man die Glieder der n^{ten} Kolonne ersetzt durch die absoluten Terme des Gleichungssystems. Entwickelt man den Zähler nach Unterdeterminanten der Glieder dieser n^{ten} Kolonne und heißt D_{sn} die Unterdeterminante von D des $(s, n)^{\text{ten}}$ Gliedes, so schreibt sich

$$\Delta i_n = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{D_{sn}}{D}\,\frac{K_s}{\Delta_2\,Z^I_s}\,\Delta e_s. \tag{18}$$

$\frac{D_{sn}}{D}$ heißt die normierte Unterdeterminante von D bezüglich deren $(s, n)^{\text{ten}}$ Gliedes.



Aus formalen Gründen schreiben wir in D $C_n = C_i$, wo $n = 2i + 1$ ist, sodaß i alle ganzzahligen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, wenn n alle ungeraden durchläuft. Es ist dann:

$$D = \begin{vmatrix} \text{in inf.}\ C_{i-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & & & & & \\ 1 & C_{i-1} & 1 & 0 & 0 & \cdot & & & & & \\ 0 & 1 & C_i & 1 & 0 & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & C_{i+1} & 1 & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & C_{i+2} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & C_{k-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \cdot & 1 & C_{k-1} & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & \cdot & 0 & 1 & C_k & 1 & 0 & \\ & & & & \cdot & 0 & 0 & 1 & C_{k+1} & 1 & \\ & & & & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{k+2}\ \text{in inf.} & \end{vmatrix}$$

Von den 2 Indizes i und k, die wir zur Bezeichnung eines beliebigen Gliedes benötigen, sei stets $i \leqq k$, so daß (i, k) ein Glied über der Hauptdiagonale, (k, i) das zu ihm symmetrische unter der Hauptdiagonale bedeuten. Zu berechnen haben wir die normierten Unterdeterminanten $\frac{D_{ik}}{D}$ bzw. $\frac{D_{ki}}{D}$.

D_i^- und D_k^+ sollen die folgenden nur einseitig ins Unendliche sich erstreckenden Determinanten bezeichnen

$$D_i^- = \begin{vmatrix} \text{in inf.} & & C_{i-2} & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & C_{i-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & C_i \end{vmatrix} \qquad D_k^+ = \begin{vmatrix} C_k & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_{k+1} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & C_{k+2} & 0\ \text{in inf.} & & & \end{vmatrix}$$

Man nennt sie aus Gründen, die bald offenbar werden, Kettenbruchdeterminanten. Eine Determinante, in der die Glieder eines die Hauptdiagonale mit einer Ecke berührenden Eckfeldes verschwinden, zerfällt stets in das Produkt zweier Teildeterminanten nach folgendem Schema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1r} & 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2r} & 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{rr} & 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & c_{1r} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & c_{2r} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{s1} & c_{s2} & c_{s3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & c_{sr} & b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{ss} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1r} \\ a_{r1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{r2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{1s} \\ b_{s1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{ss} \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminanten von D sind alle von dieser Art und man erhält für sie

$$D_{ik} = D_{ki} = D_{i-1}^- \cdot D_{k+1}^+ \quad \text{für} \quad i < k.$$

Insbesondere

$$D_{ii} = D_{i-1}^- \cdot D_{i+1}^+ \quad \text{für} \quad i = k.$$

Entwickelt man D selbst einmal nach der i^{ten}, dann nach der k^{ten} Zeile in Unterdeterminanten, so erhält man folgende zwei Darstellungen:



$$D = C_i\, D_{i-1}^{-}\, D_{i+1}^{+} - D_{i-1}^{-}\, D_{i+2}^{+} - D_{i-2}^{-}\, D_{i+1}^{+}$$
$$D = C_k\, D_{k-1}^{-}\, D_{k+1}^{+} - D_{k-1}^{-}\, D_{k+2}^{+} - D_{k-2}^{-}\, D_{k+1}^{+}.$$

Nennt man die Verhältnisse zweier aufeinander folgender Kettenbruchdeterminanten

$$\alpha_k = \frac{D_{k+1}^{+}}{D_k^{+}} \quad \text{und} \quad \beta_i = \frac{D_{i-1}^{-}}{D_i^{-}},$$

so resultiert für die normierte Unterdeterminante von D

$$\left.\begin{aligned} \frac{D_{ik}}{D} &= \frac{D_{ki}}{D} = \frac{\alpha_{i+1} \cdot \alpha_{i+2} \cdots \alpha_k}{C_i - \alpha_{i+1} - \beta_{i-1}} = \frac{\beta_{k-1} \cdot \beta_{k-2} \cdots \beta_i}{C_k - \alpha_{k+1} - \beta_{k-1}} \quad \text{für } i < k \\ \frac{D_{ii}}{D} &= \frac{1}{C_i - \alpha_{i+1} - \beta_{i-1}} \quad \text{für } i = k \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn es gelingt, die Verhältnisse α_n und β_i zu berechnen.

Entwickelt man D_i bzw. D_k nach Unterdeterminanten ihrer ersten Zeile, so erhält man zwischen 3 aufeinander folgenden Kettenbruchdeterminanten folgende lineare Beziehungen:

$$D_k^{+} = C_k D_{k+1}^{+} - D_{k+2}^{+}\,; \qquad D_i^{-} = C_i D_{i-1}^{-} - D_{i-2}^{-} \qquad \text{oder}$$

$$\frac{1}{\alpha_k} = C_k - \alpha_{k+1}\,; \qquad \frac{1}{\beta_i} = C_i - \beta_{i-1}.$$

Aus ihnen folgen α_k und β_i in Form unendlicher Kettenbrüche

$$\alpha_k = \cfrac{1}{C_k - \cfrac{1}{C_{k+1} - \cfrac{1}{C_{k+2} - \cfrac{1}{C_{k+3} \ldots \text{in. inf.}}}}} \qquad \beta_i = \cfrac{1}{C_i - \cfrac{1}{C_{i-1} - \cfrac{1}{C_{i-2} - \cfrac{1}{C_{i-3} \ldots \text{in. inf.}}}}} \tag{20}$$

Es bleibt uns deren Konvergenz zu diskutieren. Wenn wir über die Formeln (16) und (5c) zurückgreifen auf die Bedeutung von C_i, so erkennen wir, daß

$$\lim_{i = \pm\infty} C_i = C_\infty = \frac{1}{\Delta_2}\left[\Delta_0 + \frac{n^2 S L}{S + n^2 L}\right]. \tag{22}$$

Die Kettenbrüche α_k und β_i sind limitärperiodisch. Nach Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen[1]), Seite 285, Satz 41, nähern sie sich für große Werte von i bzw. k der gemeinsamen Grenze

$$\lim_{k=\infty} \alpha_k = \lim_{i=-\infty} \beta_i = \alpha_\infty = \beta_{-\infty} = \cfrac{1}{C_\infty - \cfrac{1}{C_\infty - \cfrac{1}{C_\infty \text{ in. inf.}}}}$$

Nach eben diesem Satze bestimmt sich der reziproke Grenzwert $\frac{1}{\alpha_\infty}$ als die größere Wurzel der quadratischen Gleichung

$$X^2 - C_\infty X + 1 = 0,$$

doch unter der Bedingung, daß die absoluten Beträge der zwei Wurzeln verschieden seien, was hier der Fall ist, also

$$\frac{1}{\alpha_\infty} = \frac{C_\infty}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_\infty}{2}\right)^2 - 1} \qquad \text{oder}$$

$$\alpha_\infty = \beta_{-\infty} = \frac{C_\infty}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_\infty}{2}\right)^2 - 1}. \tag{23}$$

[1]) Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Teubner 1913. Dem Mathematiker Herrn Professor Polza in Zürich danke ich für diesen Literaturnachweis und die Ratschläge, die er mir erteilt hat.

Aus (22) erkennt man, da $2\,\Delta_2 < \Delta_0$ sein muß, daß C_∞ immer größer als 2 ist und in der Grenze $\Delta_2 = 0$ der Grenze ∞ zustrebt. $\frac{1}{\alpha_\infty}$ ist daher immer größer als 1 und nähert sich mit C_∞ der Grenze ∞. $\alpha_\infty = \beta_{-\infty}$ ist folglich eine positive Zahl kleiner als 1, die für $\Delta_2 = 0$, d. h. für eine Magnetisierungskurve, die sich der Geraden nähert, den Wert null annimmt. Damit folgen aus den Rekursionsformeln (20) α_k und β_i mit beliebiger Genauigkeit.

Führen wir die hiemit berechneten normierten Unterdeterminanten (19) in (18) ein und kehren zu Indizes zurück, die wieder nur ungerade Werte annehmen, so resultiert endgültig für die Änderungen des Magnetisierungsstromes:

$$\Delta i_n = \frac{1}{\Delta_2 (C_n - \alpha_{n+2} - \beta_{n-2})} \left[\sum_{s=-\infty}^{n-2} \Delta e_s \frac{K_s}{Z_s^I} \prod_{r=s}^{n-2} \beta_r + \frac{K_n}{Z_n^I} \Delta e_n + \sum_{s=n+2}^{+\infty} \Delta e_s \frac{K_s}{Z_s^I} \prod_{r=n+2}^{s} \alpha_r \right] \quad (24)$$

Der Index n und die Indizes s und r der Summen Σ wie der Produkte Π durchlaufen dabei nur ungerade Werte. Δi_n ist also eine lineare homogene Funktion aller Δe. Da $\frac{K_s}{Z_s^I}$ für große positive wie negative Werte von s sich der Grenze null nähert und auch die Kettenbrüche α_r und β_r von einem genügend großen r an dem Grenzwert $\alpha_\infty = \beta_{-\infty} < 1$ zustreben, so werden von einem bestimmten s an die höheren Harmonischen von Δe auf die bestimmte Oberwelle Δi_n einen um so geringeren Einfluß ausüben, eine je höhere Frequenz sie haben. Machen wir den Grenzübergang zum geradlinigen Verlauf der Magnetisierungskurve, so sind $\Delta_2 = 0$; $\Delta_2 C_n = \Delta_0 + K_n$ und alle $C_n = \infty$. Sämtliche Kettenbrüche α und β verschwinden und (24) reduziert sich auf

$$\Delta i_n = \frac{K_n}{(\Delta_0 + K_n) Z_n^I} \cdot \Delta e_n$$

in Übereinstimmung mit dem, was man direkt aus Gleichung (17) erhält.

Beispiel.

Ein Einphasen-Generator von 6000 kVA und 10000 Volt arbeite über einen Einphasentransformator auf eine 100000 Volt-Leitung. Betragen bei Normallast die Jouleschen Verluste des Primärkreises 1% der kVA-Zahl, der induktive Spannungsabfall des Generators 12%, der der Primärwicklung des Transformators 5% der Unterspannung, so werden

$$R^I = 0{,}15 \text{ Ohm}; \qquad S = 0{,}009 \text{ Henry}.$$

Die Streuspannung der Sekundärwicklung betrage 5% der Oberspannung entsprechend einer Induktivität von 0,27 Henry. Die einphasige Freileitung sei mit einem Kabelradius von 0,7 cm, einem Querschnitt von 120 mm², einem Leiterabstand von 400 cm und einer Länge von 72 km so bemessen, daß bei leerlaufender Leitung für die 5te Oberwelle Resonanz besteht. Unter diesen Annahmen sind

$$L = 0{,}37 \text{ Henry}, \qquad C = 0{,}32 \cdot 10^{-6} \text{ Farad}, \qquad R^{II} = 10 \text{ Ohm}.$$

Zur weiteren Rechnung benötigen wir einige Daten des Transformators. Seine Windungszahlen $z_1 = 300$, $z_2 = 3000$ entsprechen einem Maximalwert des verketteten Flusses von $\Phi_m = -j\,2\,\Phi_1^{(0)} = 0{,}15$ Voltsec. Die Magnetisierungskurve sei dargestellt durch die Gleichung

$$\Phi = 0{,}152\ \mathfrak{Tg}\ \frac{5\,i}{100},$$

die stark ausgezogene Kurve des Bildes 5.



Es sind also nach (15)

$$\Delta_0 = 3{,}90 \cdot 10^{-3} \text{ Voltsec/Amp.}$$
$$2\,\Delta_2 = 3{,}70 \cdot 10^{-3} \quad ,, \quad ,,$$

Die Impedanzen Z_n^I, Z_n^{II} und Größen K_n und C_n werden nach den Formeln (5 a, b, c) und (16) berechnet zu

n	Z_n^I	Z_n^{II}	$K_n \cdot 10^5$	$C_n \cdot 10^5$
1	0,15 + j 2,83	0,10 — j 98,42	3,12 — j 0,17	2,12 + ∼ 0
3	0,15 + j 8,49	0,10 — j 27,68	4,82 — j 0,11	2,13 + ∼ 0
5	0,15 + j 14,13	0,10 — j 14,08	(0 — j · 0,17) · 10³	2,11 — j 0,92
7	0,15 + j 19,78	0,10 — j 6,07	1,33 + ∼ j · 0	2,10 + ∼ 0
9	0,15 + j 25,45	0,10 — j 0,59	0,06 + ∼ 0	2,11 + ∼ 0
11	0,15 + j 31,10	0,10 + j 3,73	0,33 + ∼ 0	2,11 + ∼ 0
∞	0,15 + j ∞	0,10 + j ∞	0,87 + ∼ 0	2,11 + ∼ 0

Für die Lösung $\Phi^{(0)}$, $e^{(0)}$, $i^{(0)}$ zu der wir die wirkliche als unendlich benachbart betrachten, variiert der Fluß $\Phi^{(0)}$ mit der Amplitude $\Phi_m = 0{,}15$ Voltsec rein periodisch. Die harmonische Analyse¹) des Magnetisierungsstromes ergibt für ihn die folgenden Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} i_1^{(0)} &= j\,40{,}9 \text{ Amp.} \\ i_3^{(0)} &= -j\;9{,}9 \quad ,, \\ i_5^{(0)} &= j\;4{,}1 \quad ,, \\ i_7^{(0)} &= -j\;2{,}2 \quad ,, \\ i_9^{(0)} &= j\;1{,}0 \quad ,, \\ i_{11}^{(0)} &= -j\;0{,}4 \quad ,, \end{aligned}$$

Die zu diesem Verlauf von Φ und i nötige EMK des Generators folgt aus Gleichung (7)

$$\begin{aligned} e_1^{(0)} &= -6930 - j\,5 \quad \text{Volt} \\ e_3^{(0)} &= 84 - j\,1{,}5 \quad ,, \\ e_5^{(0)} &= -58 + j\,0{,}6 \quad ,, \\ e_7^{(0)} &= 43{,}5 - j\,0{,}3 \quad ,, \\ e_9^{(0)} &= -25{,}5 + j\,0{,}1 \quad ,, \\ e_{11}^{(0)} &= 12{,}5 \quad ,, \end{aligned}$$

Allein die 5ᵗᵉ Harmonische, für die Resonanz besteht, wird in Primär- und Sekundärstrom von Bedeutung werden. Wir beschränken uns deshalb darauf, nur die 5ᵗᵉ Harmonische des Differenzstromes Δi zu berechnen. Berücksichtigen wir noch die 11ᵗᵉⁿ Fourierglieder von Δe und nehmen an, ohne an Allgemeinheit einzubüßen, daß Δe_1 und Δe_{-1} null seien, so ist nach (24)

$$\begin{aligned} \Delta i_5 = \frac{1}{\Delta_2 (C_5 - \alpha_7 - \beta_3)} \Big[& K_{-11} \beta_3 \beta_1 \ldots\ldots \beta_{-9} \beta_{-11} \frac{\Delta e_{-11}}{Z^I_{-11}} \\ & + K_{-9} \beta_3 \beta_1 \ldots\ldots \beta_{-9} \frac{\Delta e_{-9}}{Z^I_{-9}} + \\ & + K_{-3} \beta_3 \beta_1 \beta_{-1} \beta_{-3} \frac{\Delta e_{-3}}{Z^I_{-3}} \\ & + K_3 \beta_3 \frac{\Delta e_3}{Z^I_3} \\ & + K_5 \frac{\Delta e_5}{Z^I_5} \\ & + K_7 \alpha_7 \frac{\Delta e_7}{Z^I_7} \end{aligned}$$

¹) Demnächst werde ich über ein rechnerisches Verfahren zur harmonischen Analyse empirisch gegebene Funktionen berichten, das bei kleinem Zeitaufwand eine wesentliche Verschärfung der Methode von **Runge**, (siehe **Hütte**, Ing.-Taschenbuch Bd. I, Seite 131) darstellt.

$$+ K_9 \alpha_7 \alpha_9 \frac{\Delta e_9}{Z_9^I}$$
$$+ K_{11} \alpha_7 \alpha_9 \alpha_{11} \frac{\Delta e_{11}}{Z_{11}^I} \Big].$$

Es genügt also die Kettenbrüche α_7 bis α_{11} und β_3 bis β_{-11} nach (20) und (23) zu berechnen.

Sehr angenähert sind:

$$\alpha_7 \text{ bis } \alpha_\infty = \beta_{-7} \text{ bis } \beta_{-\infty} = 0{,}73$$
$$\beta_{-5} = 0{,}26 - j\,0{,}17$$
$$\beta_{-3} = 0{,}53 - j\,0{,}05$$
$$\beta_{-1} = 0{,}63 - j\,0{,}02$$
$$\beta_{+1} = 0{,}67 - j\,0{,}01$$
$$\beta_{+3} = 0{,}69$$

und

$$\Delta i_5 = \left(0{,}97 + j\,1{,}23\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_3}{Z_3^I} + \left(0{,}22 + j\,0{,}26\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_{-3}}{Z_{-3}^I}$$
$$+ \left(0{,}64 - j\,0{,}48\right) \frac{\Delta e_5}{Z_5^I} + \left(-0{,}24 + j\,0{,}21\right) \frac{\Delta e_{-5}}{Z_{-5}^I}$$
$$- \left(0{,}27 + j\,0{,}37\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_7}{Z_7^{II}} - \left(0{,}13 + j\,0{,}13\right) 10^{-2} \frac{\Delta e_{-7}}{Z_{-7}^I}$$
$$- \left(0{,}91 + j\,1{,}22\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_9}{Z_9^I} - \left(0{,}32 + j\,0{,}44\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_{-9}}{Z_{-9}^I}$$
$$+ \left(3{,}6 + j\,4{,}8\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_{11}}{Z_{11}^I} + \left(1{,}51 + j\,1{,}77\right) 10^{-4} \frac{\Delta e_{-11}}{Z_{11}^I}.$$

Der Einfluß der 3ten, der 7ten, der 9ten etc. Oberwelle von Δe tritt gegenüber dem Einfluß der 5ten zurück. Wir erkennen, solange die Δe klein sind, können in der Tat mit genügender Annäherung die Δi gegenüber der Grundwelle von i als unendlich kleine Größen betrachtet werden, was diese unserer Berechnung zugrunde liegende Annahme bestätigt.

Erzeugt der Generator eine rein sinusförmige EMK, so haben wir für die Δe die entgegengesetzten Spannungsabfälle $-e^{(0)}$ des Magnetisierungsstromes $i^{(0)}$ einzusetzen, also bei alleiniger Berücksichtigung der Glieder 5facher Frequenz

$$\Delta e_5 = - e_5^{(0)} = - i_5^{(0)} Z_5^I, \qquad \Delta e_{-5} = - e_{-5}^{(0)} = - i_{-5}^{(0)} Z_{-5}^I.$$

Es wird dann

$$\Delta i_5 = -(7{,}8 + j\,3{,}6) \qquad \text{und} \qquad i_5 = i_5^{(0)} + \Delta i_5 = -2{,}8 + j\,0{,}5.$$

Aus den Gleichungen (6a) und (b) folgen damit die auf die Sättigung des Eisens zurückzuführenden primären und sekundären Resonanzüberströme 5facher Frequenz zu

$$i_5^I = -10\, i_5^{II} = -(28 + j\,158).$$

Also Ströme, deren Amplituden ungefähr 35% der Amplituden der Grundwelle betragen. i_5^{II} erzeugt an der Kapazität eine Spannung der halben Amplitude $\frac{i_5^{II}}{j\,5\,\omega C}$ Volt, also eine Überspannung an der Freileitung von ca. 45%.

Diese Werte sind quantitativ nicht allzu streng zu nehmen. Sie hängen wesentlich ab von den Koeffizienten von Δe_5 und Δe_{-5} im Ausdruck für Δi_5. Diese Koeffizienten, die die Rückwirkung der 5ten Oberwelle im Fluß auf die 5te Oberwelle im Magnetisierungsstrom bestimmen, ändern sich stark mit dem Charakter der Magnetisierungskurve. Bei der speziellen Annahme, die wir für diese gemacht haben, bietet es wenig Interesse, die Abhängigkeit dieser Rückwirkungsfaktoren von Sättigung und Belastung genauer zu untersuchen. Ferner haben wir die Dämpfung durch die Ableitung der Freileitung nicht berücksichtigt und sind die Untersuchung schuldig geblieben, ob die Ankerreaktion der Resonanzströme in dem Generator EMK nicht eine fünfte Harmonische erzeugt, die die berechneten Werte weiter herabsetzt.

Über das Ziehen des Zwischenkreisröhrensenders bei kapazitiver Kopplung.

Von

Walter Grösser.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Die bekannten Erscheinungen des Ziehens von Zwischenkreisröhrensendern stehen heute für die Praxis der drahtlosen Telegraphie im Vordergrunde des Interesses. Für den Konstrukteur von Röhrensendern ist es eine der wichtigsten Aufgaben, Mittel und Wege zur Beseitigung des höchst lästigen Ziehens zu finden. Dazu benötigt er eine übersichtliche Theorie, die ihm die Abhängigkeit der Erscheinungen von den jeweiligen Bedingungen klar vor Augen führt und die ihm alle gewünschten quantitativen Aufschlüsse zu liefern vermag.

Für induktiv gekoppelte Schwingungskreise hat die Theorie des Ziehens ihre bisher wohl einfachste und am leichtesten zu durchschauende Gestalt gewonnen durch eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn Prof. Rogowski[1]). Ihr liegen die Ergebnisse einer früheren Abhandlung über die Dämpfungen der Koppelschwingungen zweier induktiv gekoppelter Schwingungskreise[2]) zugrunde. Für den Konstrukteur von Zwischenkreisröhrensendern kommt es darauf an, die bestmöglichen Bedingungen herauszufinden, unter denen er das Ziehen vermeiden kann. Dazu ist u. a. notwendig, nicht nur induktive Kopplung, sondern auch andere Kopplungsarten beider Schwingungskreise in den Bereich der Betrachtung hineinzuziehen. In vorliegender Arbeit soll darum — auf Veranlassung von Herrn Prof. Rogowski — das Ziehen von Zwischenkreisröhrensendern bei rein kapazitiver Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis rechnerisch untersucht werden, und zwar nach einer der Rogowskischen vollständig entsprechenden Methode. Auch hier müssen die Ergebnisse einer früheren Arbeit[3]) über die Dämpfungen der Koppelschwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise als bekannt vorausgesetzt werden.

Es wird sich zeigen, daß auch bei kapazitiver Kopplung Zieherscheinungen auftreten. Die Stellen, an denen die Frequenzsprünge stattfinden bzw. diejenigen, an denen ein Aussetzen der Schwingungen erfolgt, werden sich formelmäßig leicht bestimmen lassen. Wenn sich auch im allgemeinen die Erscheinungen bei kapazitiver und induktiver Kopplung als ziemlich analog erweisen werden, so werden doch immerhin einige nicht unbeträchtliche Unterschiede zutage treten.

I. Berechnung der Zusatzdämpfungen.

Wir legen unseren Rechnungen zwei kapazitiv gekoppelte Schwingungskreise allgemeinster Art zugrunde. Diese bestehen aus einem System von beliebig gestalteten und angeordneten Leitern, von denen zwei mal zwei durch eine Selbstinduktion L und einen Widerstand R miteinander verbunden sind. Die Enden der Selbstinduktion L_1 (einschließlich des Widerstandes R_1) des Primärkreises legen wir auf bekannte Weise an die Elektronenröhre an und koppeln das Gitter der Röhre induktiv mit dem Primärkreise. (Bild 1).

Mit $\left\{ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \right\}$ bezeichnen wir — wie früher — die Potentialdifferenz, die, bei geöffneten Schwingungskreisen, zwischen den beiden Leitern des $\left\{ \begin{matrix} \text{Primär-} \\ \text{Sekundär-} \end{matrix} \right\}$kreises

[1]) W. Rogowski, Arch. f. Elektr. X, S. 1—14.

[2]) Derselbe, Arch. f. Elektr. IX, S. 427—438

[3]) Grösser, Arch. f. Elektrotechnik X, S. 257—276.

entstehen, wenn sie selbst mit den Elektrizitätsmengen + 1 und — 1 geladen werden. P sei dagegen diejenige Potentialdifferenz, die zwischen den Leitern des einen Kreises entsteht, wenn die des andern mit den Elektrizitätsmengen + 1 und — 1 geladen werden. Als Beispiel diene die spezielle Schaltung des Bildes 2. Hier haben P_1, P_2 und P die Werte

$$P_1 = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}, \quad P_2 = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \text{ und } P = \frac{1}{C}. \tag{1}$$

Mit den in Bild 1 und 2 eingetragenen Bezeichnungen gelten die folgenden, den bekannten Vallaurischen Ansatz enthaltenden Beziehungen:

$$i_a = i_1 - i = S e_g + \frac{1}{R_i} e_a \tag{2}$$

$$e_g = Mg \frac{di_1}{dt} \tag{3}$$

$$e_a = - i_1 R_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{4}$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + P_1 \int i\, dt + P \int i_2\, dt = 0 \tag{5}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + P_2 \int i_2\, dt + P \int i\, dt = 0. \tag{6}$$

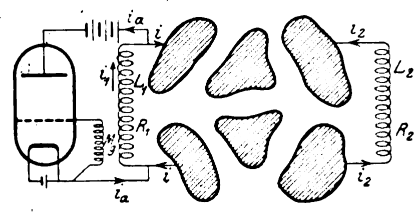


Bild 1. Allgemeines Schema eines Zwischenkreisröhrensenders mit kapazitiver Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis.

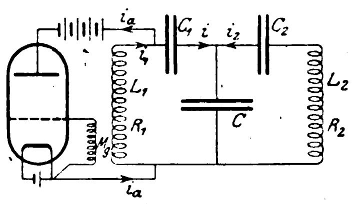


Bild 2. Zwischenkreisröhrensender mit kapazitiver Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis.

Dabei bedeuten S und R_i die Steilheit und den inneren Widerstand der Röhre, Mg den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zwischen Primärkreis und Gitterspule. Aus (2), (3) und (4) folgt

$$i = i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_i}\right) + \frac{di_1}{dt} \left[\frac{L_1}{R_i} - SMg\right]. \tag{7}$$

Einmalige Differentiation von (5) und (6) nach t und Elimination von i mittels (7) ergibt die beiden Differentialgleichungen für i_1 und i_2:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left\{R_1 - P_1 \left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right]\right\} \frac{di_1}{dt} + P_1 \left[1 + \frac{R_1}{R_i}\right] i_1 + P i_2 = 0, \tag{8}$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + P_2 i_2 - P \left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right] \frac{di_1}{dt} + P \left[1 + \frac{R_1}{R_i}\right] i_1 = 0. \tag{9}$$

$\frac{R_1}{R_i}$ ist unter den tatsächlich in der Praxis vorhandenen Umständen immer so klein gegen 1, daß wir es unbedenklich vernachlässigen können. Unsere Differentialgleichungen erhalten dadurch die einfachere Gestalt:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left\{R_1 - P_1 \left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right]\right\} \frac{di_1}{dt} + P_1 i_1 + P i_2 = 0, \tag{10}$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + P_2 i_2 - P \left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right] \frac{di_1}{dt} + P i_1 = 0. \tag{11}$$

Aus (10) läßt sich i_2 ausrechnen; setzen wir das Ergebnis ein in (11), so erhalten wir für i_1 allein die folgende lineare Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{d^3 i_1}{dt^3}\left\{\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} - \left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right]\frac{P_1}{L_1}\right\} + \frac{d^2 i_1}{dt^2}\left\{\frac{P_1}{L_1} + \frac{P_2}{L_2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} - \frac{P_1}{L_1}\left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right]\frac{R_2}{L_2}\right\}$$
$$+ \frac{di_1}{dt}\left\{\frac{R_2}{L_2}\frac{P_1}{L_1} + \frac{R_1 P_2}{L_1 L_2} - \frac{P_1 P_2}{L_1 L_2}\left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right]\left(1 - \frac{P^2}{P_1 P_2}\right)\right\}$$
$$+ i_1 \frac{P_1 P_2}{L_1 L_2}\left(1 - \frac{P^2}{P_1 P_2}\right) = 0. \tag{12}$$

Sind die Widerstände R_1 und R_2 der beiden Schwingungskreise nicht zu groß, so sind $\omega_1 = \sqrt{\frac{P_1}{L_1}}$ und $\omega_2 = \sqrt{\frac{P_2}{L_2}}$ die Eigenkreisfrequenzen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise; $h_1 = \frac{R_1}{2 L_1}$ und $h_2 = \frac{R_2}{2 L_2}$ sind ihre Dämpfungsexponenten. Die in der Differentialgleichung noch vorkommende Größe $\frac{1}{2}\left[SMg - \frac{L_1}{R_i}\right]$ hat dieselbe Dimension wie h_1 und h_2, wir bezeichnen sie mit h_3. Die Größe $\frac{P}{\sqrt{P_1 P_2}}$ stellt den Kopplungskoeffizienten k und $\sigma = 1 - k^2$ den elektrischen Streuungskoeffizienten der beiden Schwingungskreise dar. Führen wir diese Bezeichnungen in unsere Differentialgleichung (12) ein und schreiben wir für i_1 der Einfachheit halber immer i, so erhalten wir:

$$\frac{d^4 i}{dt^4} + \frac{d^3 i}{dt^3}\{h_1 + h_2 - h_3\} 2 + \frac{d^2 i}{dt^2}\{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4 h_1 h_2 - 4 h_3 h_2\}$$
$$+ \frac{di}{dt} 2\{h_1 \omega_2^2 + h_2 \omega_1^2 - \omega_2^2 \sigma h_3\} + i\,\omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0. \tag{13}$$

Wenn die Glieder, welche h_1, h_2 und h_3 enthalten, nicht vorhanden wären, so hätten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 i}{dt^4} + \frac{d^2 i}{dt^2}[\omega_1^2 + \omega_2^2] + i\,\omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0 \tag{14}$$

zweier ungedämpfter kapazitiv gekoppelter elektrischer Schwingungskreise vor uns, und der Ansatz $i = e^{j\Omega t}$, $j = \sqrt{-1}$, lieferte uns die beiden Koppelkreisfrequenzen:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}}\right]}$$

und

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}}\right]}, \tag{15}$$

welche beide der Gleichung

$$\Omega^4 - \Omega^2[\omega_1^2 + \omega_2^2] + \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0 \tag{16}$$

genügen.

Die Lösung von (13) hat ebenfalls die Form $i = e^{j\overline{\Omega} t}$, $j = \sqrt{-1}$; $\overline{\Omega}$ muß dabei der Gleichung genügen:

$$\overline{\Omega}^4 - j\overline{\Omega}^3 2\{h_1 + h_2 - h_3\} - \overline{\Omega}^2\{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4 h_1 h_2 - 4 h_3 h_2\}$$
$$+ j\overline{\Omega} 2\{h_1 \omega_2^2 + h_2 \omega_1^2 - \omega_2^2 \sigma h_3\} + \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0. \tag{17}$$

Da wir nun den praktischen Verhältnissen entsprechend voraussetzen wollen, h_1, h_2 und h_3 seien klein gegen ω_1 und ω_2, so wird sich $\overline{\Omega}$ nur wenig von Ω unterscheiden. Setzen wir wie früher mit Prof. Rogowski an: $\overline{\Omega} = \Omega(1 + \xi)$, so wird also ξ eine gegen 1 kleine Größe sein. Führen wir das ξ in (17) ein, entwickeln nach Potenzen von ξ und vernachlässigen alle von höherer als der ersten Ordnung kleinen Glieder, so erhalten wir für ξ die Bestimmungsgleichung:

$$\Omega^4 (1 + 4\xi) - j\,\Omega^3\, 2\{h_1 + h_2 - h_3\} - \Omega^2 \{\omega_1^2 + \omega_2^2\}(1 + 2\xi) + j\,\Omega\, 2\{h_1 \omega_2^2 + h_2 \omega_1^2 - h_3 \omega_2^2 \sigma\} + \omega_1^2 \omega_2^2 \sigma = 0 \tag{18}$$

und damit für $j\xi\Omega$ den Ausdruck:

$$j\xi\Omega = -\alpha = -h_1 \frac{\Omega^2 - \omega_2^2}{2\,\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} - h_2 \frac{\Omega^2 - \omega_1^2}{2\,\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_3 \frac{\Omega^2 - \omega_2^2 \sigma}{2\,\Omega^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]}. \tag{19}$$

Wir sehen, $j\xi\Omega$ ist reell. Dies bedeutet: die Frequenzen der auftretenden Schwingungen sind ganz dieselben, wie wenn die Röhre überhaupt nicht vorhanden wäre; die beiden Kreise können nur mit ihren normalen Koppelfrequenzen schwingen. Uns interessieren von nun an nur die Dämpfungen der auftretenden Schwingungen. Je nachdem ob wir in (19) für Ω den Wert Ω_1 der raschen oder den Wert Ω_2 der langsamen Koppelschwingung einsetzen, erhalten wir den Dämpfungsexponenten α_1 der raschen oder α_2 der langsamen Koppelschwingung:

$$\alpha_1 = h_1 \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2}{2\,\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega_1^2 - \omega_1^2}{2\,\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} - h_3 \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2 \sigma}{2\,\Omega_1^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]}, \tag{20}$$

$$\alpha_2 = h_1 \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2}{2\,\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} + h_2 \frac{\Omega_2^2 - \omega_1^2}{2\,\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]} - h_3 \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2 \sigma}{2\,\Omega_2^2 - [\omega_1^2 + \omega_2^2]}. \tag{21}$$

Messen wir wie früher alle Frequenzen in Frequenzen des Primärkreises, setzen wir also $\frac{\omega_2}{\omega_1} = x$, $\frac{\Omega_1}{\omega_1} = O_1$ und $\frac{\Omega_2}{\omega_1} = O_2$, berücksichtigen wir ferner, daß die Beziehung gilt $O_1^2 + O_2^2 = 1 + x^2$, so können wir einfacher schreiben:

$$\alpha_1 = h_1 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} - h_3 \frac{O_1^2 - \sigma x^2}{O_1^2 - O_2^2}, \tag{22}$$

$$\alpha_2 = h_1 \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} + h_2 \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} - h_3 \frac{\sigma x^2 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2}. \tag{23}$$

Wir erinnern nun daran, daß die Dämpfungsexponenten der Koppelschwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise

$$h_1 U_1 + h_2 U_2$$

für die rasche und

$$h_1 U_2 + h_2 U_1$$

für die langsame Koppelschwingung betragen, wobei die Funktionen U_1 und U_2 sich nach den folgenden Formeln aus den Koppelfrequenzen bzw. aus der Verstimmung x und dem Streuungskoeffizienten σ beider Kreise berechnen:

$$U_1 = \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right], \tag{24}$$

$$U_2 = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - O_2^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}{\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}\right]. \tag{25}$$

Vergleichen wir dies mit unseren eben abgeleiteten Formeln, so erkennen wir: die Dämpfungen α_1 und α_2 der raschen und der langsamen Koppelschwingung eines Zwischenkreisröhrensenders sind nicht einfach gleich den Dämpfungen der Koppelschwingungen zweier kapazitiv gekoppelter Schwingungskreise, sondern es tritt zu diesen noch eine Zusatzdämpfung hinzu. Für die rasche Schwingung hat diese Zusatzdämpfung den Wert

$$-h_3 \frac{O_1^2 - \sigma x^2}{O_1^2 - O_2^2} = -h_3 u_1, \tag{26}$$

für die langsame den Wert



$$-h_3 \frac{\sigma x^2 - O_2^2}{O_1^2 - O_2^2} = -h_3 u_2. \tag{27}$$

Führen wir in (26) und (27) für O_1 und O_2 die Werte

$$O_1 = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]} \text{ u. } O_2 = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]} \tag{28}$$

ein, so erhalten wir die Gewichte u_1 und u_2 als Funktionen von x und σ:

$$u_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1 + x^2(1-2\sigma)}{(1+x^2)\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right] \text{u. } u_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1 + x^2(1-2\sigma)}{(1+x^2)\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}}\right]. \tag{29}$$

Die Dämpfungsexponenten α_1 und α_2 der Schwingungen eines Zwischenkreisröhrensenders erhalten somit endgültig die Werte

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= h_1 U_1 + h_2 U_2 - h_3 u_1 \\ \alpha_2 &= h_1 U_2 + h_2 U_1 - h_3 u_2, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

worin die U und u als Funktionen von x und σ durch (25) und (29) bestimmt sind.

Wie sich leicht zeigen läßt, sind die Gewichte u_1 und u_2 immer positiv. Je nach dem Vorzeichen von

$$h_3 = \frac{1}{2}\omega_1^2\left[S\,Mg - \frac{L_1}{R_i}\right]$$

werden also durch die Röhre die Dämpfungen der beiden Koppelschwingungen entweder beide verstärkt oder beide geschwächt. Die Wahl des Vorzeichens von Mg haben wir nach Belieben in der Hand. Wollen wir das Zeichen wechseln, so brauchen wir bloß die beiden Enden der Gitterrückkopplungsspule, welche an Gitter und Glühdraht liegen, miteinander zu vertauschen.

Von Interesse ist für uns nur der Fall, daß h_3 positiv ist; denn nur dann werden durch die Röhre die Dämpfungen verringert. Wird für irgend eine der beiden Koppelschwingungen der Betrag des Gliedes mit h_3 so groß, daß α Null oder gar negativ wird, dann bedeutet dies, daß die Schwingung ungedämpft bestehen kann. Die Bedingungen für die Möglichkeit des Bestehens der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung lauten mithin:

$$h_3 u_1 \geqq h_1 U_1 + h_2 U_2 \tag{31}$$

bzw.

$$h_3 u_2 \geqq h_1 U_2 + h_2 U_1. \tag{32}$$

Ist nur eine dieser Bedingungen erfüllt, so wird die betreffende Koppelschwingung erregt werden. Sind jedoch für irgendwelche Werte von x und σ beide Bedingungen zugleich erfüllt, so vermag unsere Theorie nicht zu entscheiden, welche der beiden Koppelschwingungen — die rasche oder die langsame oder etwa beide zugleich — in Erscheinung tritt. Wir müssen uns bei dieser Frage an die experimentellen Erfahrungen bei Beobachtung der Zieherscheinungen halten; diese legen es nahe, unserer Theorie die folgenden Annahmen zugrunde zu legen:

Es kann immer nur die eine der beiden Koppelschwingungen auftreten. Ist einmal eine Koppelschwingung erregt und verändern wir dann stetig die Verstimmung x und die Streuung σ der beiden Schwingungskreise, so bleibt sie, indem die Frequenz sich stetig mit ändert, solange bestehen, als die Bedingung (31) bzw. (32) befriedigt bleibt. Dann aber reißt sie plötzlich ab; genügt unter den gegebenen Verhältnissen dann die andere Koppelschwingung der Bedingung (31) bzw. (32), so wird sie dann erregt und dauert ihrerseits so lange an, als für sie die genannte Bedingung erfüllt bleibt.



II. Diskussion der Zusatzdämpfungen.

Wir wenden uns nun den beiden Zusatzdämpfungen $-h_3 u_1$ und $-h_3 u_2$ für die rasche und die langsame Koppelschwingung zu. Da h_3 bei gegebener Gitterrückkopplung und gegebenen Werten von x und σ proportional ω_1^2 ist, so wird eine jede der beiden Koppelschwingungen um so leichter bestehen können, je größer ω_1 ist; weiter wird h_3 dem Betrage nach im allgemeinen um so größer, je enger die Gitterkopplung gewählt wird. Je fester also Gitter und Primärkreis (im richtigen Sinne) miteinander gekoppelt sind, desto leichter werden die Bedingungen (31) und (32) befriedigt werden. Ist $S\,Mg = \frac{L_1}{R_i}$, so ist $h_3 = 0$. Es sind also dann die Dämpfungen der beiden Koppelschwingungen genau so groß, als wenn die Röhre gar nicht vorhanden wäre.

Um über die Abhängigkeit der Zusatzdämpfungen von x und σ Aufschluß zu erhalten, müssen wir die Gewichte u_1 und u_2 näher betrachten. Zunächst ist leicht zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\frac{1 + x^2(1 - 2\sigma)}{(1 + x^2)\sqrt{1 - \frac{4\sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}}$$

wegen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ für jeden Wert von x zwischen -1 und $+1$ liegt. Daraus folgt für die Gewichte, daß sowohl u_1 als auch u_2 immer zwischen 0 und $+1$ liegen. Weiter ergibt sich aus (29) sofort die Beziehung

$$u_1 + u_2 = 1. \tag{33}$$

Bild 3. Die Gewichte u_1 und u_2 der Zusatzdämpfungen. ——— u_1, - - - u_2.

Entwickeln wir u_1 und u_2 für kleine und große x nach Potenzen von x und $\frac{1}{x}$ und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle nach Potenzen vou $x - 1 = \varepsilon$, so bekommen wir unter Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung

1. für kleine x: $(0 < x \ll 1)$

$$u_1 = 1 - \sigma k^2 x^4 \quad \text{und} \quad u_2 = \sigma k^2 x^4; \tag{34}$$

2. für große x: $(1 \ll x < \infty)$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 1 - \sigma + \frac{1}{x^2} 2\sigma(1 - \sigma) & \qquad u_2 &= \sigma - \frac{1}{x^2} 2\sigma(1 - \sigma) \\ &= k^2 + \frac{1}{x^2} 2\sigma k^2 & \text{und} \qquad &= \sigma - \frac{1}{x^2} 2\sigma k^2; \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

3. für $x = 1 + \varepsilon$ $(0 < |\varepsilon| \ll 1)$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 + k - \varepsilon \frac{\sigma}{k}\right) \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{1}{2}\left(1 - k + \varepsilon \frac{\sigma}{k}\right). \tag{36}$$

In Bild 3 sind die Gewichte u_1 (ausgezogen) und u_2 (gestrichelt) als Funktionen von x aufgetragen für die Werte $\sigma = 0$; 0,5; 0,8 und 1. Für kleine x sind u_1 und u_2 sehr nahe (bis auf kleine Glieder 4. Ordnung) gleich 1 bzw. gleich 0. Für große x

streben sie den Werten $1-\sigma$ bzw. σ zu. In der Nachbarschaft der Resonanzstelle $x = 1$ verlaufen die Kurven um so steiler, je loser die Kopplung ist. Für $x = 1$ selbst haben u_1 und u_2 die Werte $\frac{1+k}{2}$ und $\frac{1-k}{2}$. Sie liegen also dort um so näher an 1 und 0, je enger die Kopplung ist.

Von Interesse sind die Grenzfälle vollkommen loser und vollkommen fester Kopplung.

Für vollkommen lose Kopplung haben wir $\sigma = 1$, also

$$\frac{1 + x^2(1-2\sigma)}{\sqrt{1 + x^2(1-2\sigma) + x^4}} = \frac{1-x^2}{\pm\sqrt{(1-x^2)^2}}.$$

Das gibt für

$$x < 1 \quad : \quad u_1 = 1 \text{ und } u_2 = 0$$

und für

$$x > 1 \quad : \quad u_1 = 0 \text{ und } u_2 = 1.$$

Da im Falle vollkommen loser Kopplung U_1 und U_2 für $x < 1$ die Werte $+1$ und 0, für $x > 1$ dagegen die Werte 0 und $+1$ besitzen, so lauten die Bedingungen dafür, daß eine der beiden Koppelschwingungen sich erregen kann,

für x kleiner als 1: $h_3 \geqq h_1$ für die rasche, $0 \geqq h_2$ für die langsame Koppelwelle

und

für x größer als 1: $0 \geqq h_2$ für die rasche, $h_3 \geqq h_1$ für die langsame Koppelwelle.

Dies besagt zunächst: für $x < 1$ kann überhaupt nur die rasche und für $x > 1$ kann nur die langsame Koppelschwingung erregt werden. Da bei vollkommen loser Kopplung die Koppelfrequenzen mit den Eigenfrequenzen der beiden ungekoppelten Schwingungskreise übereinstimmen, so kann also immer nur die Eigenschwingung des Primärkreises erregt werden — ein selbstverständliches Resultat. Die Bedingung dafür, daß die Schwingung erregt wird, lautet

$$h_3 \geqq h_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\omega_1^2}{2}\left[S\,Mg - \frac{L_1}{R_i}\right] \geqq \frac{R_1}{2\,L_1}$$

oder

$$S\,Mg \geqq \frac{L_1}{R_i} + \frac{R_1}{L_1}\frac{1}{\omega_1^2}$$

oder

$$S\,Mg \geqq \frac{L_1}{R_i} + R_1\frac{1}{P_1}. \tag{37}$$

Damit haben wir, wie es sein muß, die Vallaurische Bedingung für das Einsetzen der Schwingungen eines einfachen an eine Röhre gelegten Schwingungskreises erhalten.

Für vollkommen feste Kopplung ist $\sigma = 0$, also $u_1 = 1$ und $u_2 = 0$ für jeden Wert von x. U_1 und U_2 haben die Werte $\frac{1}{1+x^2}$ und $\frac{x^2}{1+x^2}$. Unsere Bedingungen (31) und (32) nehmen also die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} h_3 &\geqq h_1\frac{1}{1+x^2} + h_2\frac{x^2}{1+x^2} \\ &\text{und} \\ 0 \cdot h_3 &\geqq h_1\frac{x^2}{1+x^2} + h_2\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Wir sehen: Ist h_3 von endlicher Größe, so kann überhaupt nur die rasche Koppelschwingung erregt werden. Als Beispiel dafür nehmen wir den in Bild 4 dargestellten Spezialfall von Bild 2. Hier ist $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C}$, $\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C}$, also $x^2 = \frac{L_1}{L_2}$ und

$h_s = \frac{1}{2 L_1 C}\left[S Mg - \frac{L_1}{R_i}\right]$. Die Bedingung für das Einsetzen der raschen Koppelschwingung lautet:

$$\frac{1}{2 L_1 C}\left[S Mg - \frac{L_1}{R_i}\right] \geqq \frac{R_1}{2 L_1} \frac{1}{1 + \frac{L_1}{L_2}} + \frac{R_2}{2 L_2} \frac{\frac{L_1}{L_2}}{1 + \frac{L_1}{L_2}}$$

oder

$$S Mg \geqq \frac{L_1}{R_i} + C L_1 \frac{\frac{R_1}{L_1} L_2 + \frac{R_2}{L_2} L_1}{L_1 + L_2}. \tag{39}$$

Nehmen wir L_2 unendlich groß, so müssen wir die Vallaurische Bedingung $S Mg \geqq \frac{L_1}{R_i} + R_1 C$ für das Einseszen der Schwingungen eines einfachen Schwingungskreises erhalten. Dies ist in der Tat der Fall.

Daß es Fälle vollkommen fester Kopplung gibt, in denen h_s unendlich groß und darum unter Umständen eine Erregung der langsamen Koppelschwingung möglich wird, zeigt uns die in Bild 5 dargestellte Schaltung; sie geht aus dem allgemeineren Kopplungschema von Bild 2 einfach dadurch, hervor, daß die Kapazität C unendlich klein genommen wird. Für den Fall von Bild 2 ist

$$\sigma = \frac{C^2 + C(C_1 + C_2)}{(C + C_1)(C + C_2)}.$$

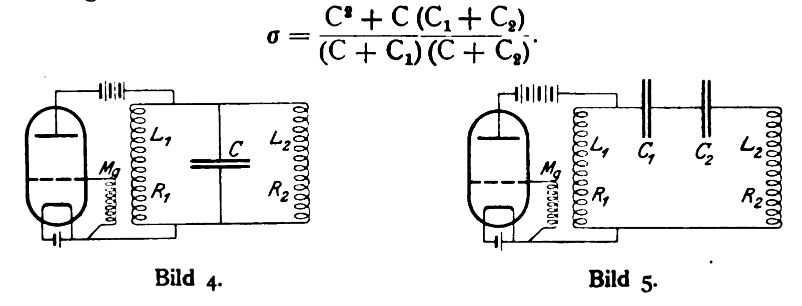


Bild 4. Bild 5.

Es wird in unserem Sonderfall also wirklich $\sigma = 0$. Wir haben zu untersuchen, welche Werte die Funktion u_2 für kleine σ annimmt. Wir entwickeln dazu u_2 nach Potenzen von σ:

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1 + x^2 - 2\sigma x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 - \frac{4 x^2}{(1 + x^2)^2}\sigma}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{1 + x^2}(1 + x^2 - 2\sigma x^2)\left(1 + \frac{2 x^2}{(1 + x^2)^2}\sigma\right)\right] = \sigma \frac{x^4}{(1 + x^2)^2}.$$

Dann wird:

$$h_s u_2 = \lim_{C=0} \frac{S Mg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right)\sigma \frac{x^4}{(1 + x^2)^2} \tag{40}$$

oder wegen $x^2 = \frac{L_1}{L_2}$

$$h_s u_2 = \frac{S Mg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} \lim_{C=0} \frac{\sigma}{C} =$$

$$= \frac{S Mg - \frac{L_1}{R_i}}{2} \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2}\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]. \tag{41}$$

Unsere Bedingung für die Möglichkeit der langsamen Koppelwelle lautet mithin

$$\frac{S\,Mg - \dfrac{L_1}{R_i}}{2}\;\frac{L_1}{(L_1+L_2)^2}\left[\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right] \geqq \frac{R_1}{2\,L_1}\,\frac{L_1}{L_1+L_2}+\frac{R_2}{2\,L_2}\,\frac{L_2}{L_1+L_2}$$

oder

$$S\,Mg \geqq \frac{L_1}{R_i}+\frac{L_1+L_2}{L_1}\,\frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}\,(R_1+R_2). \tag{42}$$

Für $C_2=\infty$ und $L_2=R_2=0$ muß diese Bedingung übergehen in die Vallaurische:

$$S\,Mg \geqq \frac{L_1}{R_i}+R_1\,C_1;$$

das ist in der Tat der Fall.

Der soeben behandelte Fall stellt weiter nichts dar als einen einfachen Schwingungskreis mit der Selbstinduktion $L = L_1 + L_2$, dem Widerstand $R = R_1 + R_2$ und der reziproken Kapazität $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$. Nur ist dieser Schwingungskreis nicht nach der gewöhnlichen Weise mit den Enden seiner gesamten Selbstinduktion an die Röhre gelegt, sondern nur mit einem Bruchteil $\Theta L = L_1$ seiner Selbstinduktion ($\Theta < 1$). Führen wir die Bezeichnungen L, Θ, C und R in (42) ein, so bekommen wir als Bedingung für das Einsetzen der Schwingungen

$$S\,Mg \geqq \frac{\Theta L}{R_i}+\frac{C R}{\Theta}\cdot \quad (\Theta \leqq 1). \tag{43}$$

Betrachtet man die einzelnen Summanden, so sieht man sofort, daß es bei gegebenem L, C, R und R_i einen bestimmten Wert Θ^* von Θ geben muß, für den die zur Erregung der Schwingungen mindestens notwendige Gitterkopplung ein Minimum ist. Θ^* berechnet sich zu

$$\Theta^* = \sqrt{\frac{C R R_i}{L}}. \tag{44}$$

Da unsere Ableitung voraussetzt, daß $\Theta < 1$, so braucht Θ^* kein Minimum der notwendigen Gitterkopplung zu ergeben, wenn es größer ist als 1.

Wir kehren nun zu unseren allgemeinen Bedingungen (31) und (32) für die Möglichkeit des Bestehens der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung zurück. Wie früher[1]) gezeigt, liegen die Werte von $h_1 U_1 + h_2 U_2$ bzw. von $h_1 U_2 + h_2 U_1$ immer zwischen h_1 und h_2, sie überschreiten also jedenfalls nie den größeren der beiden Werte h_1 und h_2. Berücksichtigen wir dies, so können wir ohne weiteres folgendes aussagen: Halten wir ω_1 von endlicher Größe, so können wir für irgendwelche gegebene Werte von x und σ die beiden Koppelschwingungen immer dann erzeugen, wenn die Funktionen u nicht zu kleine Werte annehmen; denn wir brauchen ja dann Mg höchstens so groß zu wählen, daß $h_2\,u = \frac{\omega_1^2}{2}\left[S\,Mg - \frac{L_1}{R_i}\right]u$ gleich dem größeren der beiden Werte h_1 und h_2 wird. Betrachten wir daraufhin Bild 3, so erkennen wir:

1. Die rasche Koppelschwingung können wir im allgemeinen leicht erzeugen, nur nicht in dem einen Falle, daß die Kopplung sehr lose ist und außerdem x große, über 1 liegende Werte besitzt; d. h. nur dann nicht, wenn bei loser Kopplung der Primärkreis eine kleinere ungekoppelte Eigenfrequenz besitzt als der Sekundärkreis. Dieses Verhalten der raschen Koppelwelle bei kapazitiver Kopplung entspricht ganz dem Verhalten der raschen Koppelwelle bei induktiver Kopplung.

[1]) Arch. f. Elektrotechnik X, S. 257—276.

2. Die langsame Koppelschwingung können wir im allgemeinen nicht so leicht erregen. Zunächst überhaupt nicht, d. h. für keinen Wert von σ, sobald x sehr kleine, unterhalb 1 gelegene Werte annimmt; denn in diesem Falle ist u_2 unendlich klein von 4. Ordnung. Weiterhin auch für keinen Wert von x, sobald $\sigma = 0$, die Kopplung also vollkommen fest genommen wird; denn dann hat u_2 den Wert 0. Dagegen können wir die langsame Koppelwelle leicht erregen, sobald σ nahe gleich 1 ist und x große über 1 liegende Werte besitzt, also in dem Falle, daß bei sehr loser Kopplung die ungekoppelte Eigenfrequenz des Primärkreises kleiner ist als die des Sekundärkreises. Für Zwischenwerte von σ benötigen wir eine um so festere Gitterkopplung, je kleiner x und σ sind. Bei induktiver Kopplung ist das Verhalten der langsamen Koppelschwingung etwas anders. Dort ist es auch im Falle fester Kopplung, wenigstens für $x > 1$, leicht möglich, sie durch genügend feste Gitterkopplung zu erregen. Ganz anders als eben besprochen können die Verhältnisse dann liegen, wenn ω_1 nicht von endlicher Größe bleibt, sondern etwa, wie schon in einem Beispiele gezeigt wurde, bei fester werdender Kopplung unendlich großen Werten zustrebt.

III. Die Zieherscheinungen.

Die Betrachtung der Zieherscheinungen läßt sich ohne Schwierigkeit unmittelbar an die Bedingungen (31) und (32) für die Erregung der langsameren und der rascheren Koppelschwingung anknüpfen. Nehmen wir an, wir halten die Streuung konstant,

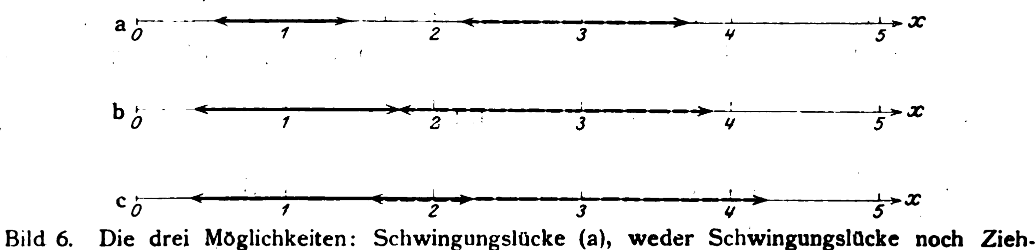


Bild 6. Die drei Möglichkeiten: Schwingungslücke (a), weder Schwingungslücke noch Ziehschleife (b), Ziehschliefe (c).

⟷ Bereich, in dem die eine Koppelschwingung möglich ist,
⟷ (gestrichelt) „ „ „ „ andere „ „ „
⟷ (dick) „ „ „ „ beide Koppelschwingungen möglich sind.

variieren dagegen durch Veränderung der Eigenfrequenz des Sekundärkreises die Verstimmung x der beiden Kreise, so bekommen wir bei gegebenen Werten von h_1, h_2 und h_3 für jede der beiden Schwingungen einen Bereich von x-Werten, in dem sie der Bedingung (31) bzw. (32) genügt. Liegen diese Bereiche so, daß sie einander weder bedecken noch berühren, Bild 6a, so bekommen wir keine Zieherscheinungen; denn zwischen den beiden Bereichen, in denen je eine der beiden Koppelschwingungen erregt wird, befindet sich eine Lücke, in der den Bedingungen (31) und (32) nicht genügt wird, in der also Schwingungsstille herrscht. Liegen die Bereiche so, daß sie einander zwar nicht bedecken, aber doch in einem Punkte berühren (Bild 6b), so bekommen wir ebenfalls keine Zieherscheinungen; aber auch keine Lücke, in der Schwingungsstille herrscht. Lassen wir x von 0 bis ∞ wachsen, so wird zuerst die eine der beiden Koppelschwingungen erregt; schreiten wir dann über den gemeinsamen Punkt der beiden Bereiche hinweg, so erlischt dort die bisherige Koppelschwingung; aber zugleich tritt die andere Koppelschwingung in Erscheinung, die Frequenz springt also auf einen anderen Wert. Gehen wir von

∞ nach 0 zurück, so tritt an derselben ausgezeichneten Stelle wieder ein Sprung auf, diesmal jedoch von der neuen zur alten Frequenz. Liegen endlich die Bereiche so, daß sie einander in einem gewissen gemeinsamen Stück überdecken (Bild 6c), so erhalten wir die bekannte Zieherscheinung; denn wandern wir jetzt mit unsern x-Werten von 0 bis ∞, so erhalten wir gemäß unserer oben gemachten Annahme zunächst die eine Koppelschwingung so lange, bis ihr Bereich überschritten wird. Dann tritt die andere Koppelschwingung in Erscheinung. Gehen wir nun zurück zum Werte $x = 0$, so bleibt ihrerseits jetzt die neue Koppelschwingung so lange bestehen, als wir uns in dem ihr zugehörigen Bereiche befinden, wir bekommen also jetzt den Sprung zurück zur alten Koppelwelle an einer andern Stelle x als vorhin den Sprung von der alten zur neuen Koppelwelle. Die Länge des gemeinsamen Stückes der beiden Bereiche bildet ein Maß für die Breite der sog. Ziehschleife.

Wollen wir uns über die Zieherscheinungen unterrichten, so brauchen wir uns bloß zu überzeugen, welches unter den gegebenen Versuchsbedingungen die Enden der beiden Bereiche sind, in denen die rasche bzw. die langsame Koppelschwingung sich erregen kann.

Bei der Mannigfaltigkeit der unabhängigen Veränderlichen (h_1, h_2, h_3, x und σ) ist es vorteilhaft, die Bedingungen (31) und (32) noch etwas zu vereinfachen. Eine der unabhängigen Veränderlichen können wir sofort unterdrücken, indem wir alle Dämpfungen messen in Dämpfungen des ungekoppelten Primärkreises, indem wir also die Bezeichnungen einführen

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_3}{h_1} &= \frac{\omega_1^2\left[S\,Mg - \frac{L_1}{R_i}\right]L_1}{R_1} = \frac{S\,Mg - \frac{L_1}{R_i}}{C_1 R_1} = H \\ \text{und} \qquad \frac{h_2}{h_1} &= \frac{R_2 L_1}{R_1 L_2} = h. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Dividieren wir außerdem noch durch u_1 bezw. u_2, so erhalten wir als Bedingungen für die Möglichkeit der Erregung der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung einfacher als früher:

$$H - \frac{U_1}{u_1} \geqq h\,\frac{U_2}{u_1} \quad \text{und} \quad H - \frac{U_2}{u_2} \geqq h\,\frac{U_1}{u_2}. \tag{46}$$

$\frac{U_1}{u_1}$, $\frac{U_2}{u_1}$, $\frac{U_2}{u_2}$ und $\frac{U_1}{u_2}$ sind Funktionen von x und σ; wir bezeichnen sie bzw. mit W_1, W_2, w_1 und w_2, schreiben also unsere Bedingungen in der Form:

$$H - W_1 \geqq h\,W_2 \quad \text{und} \quad H - w_1 \geqq h\,w_2. \tag{47}$$

Die erste gilt für die rasche, die zweite für die langsame Koppelschwingung. Wegen (24) bis (27) haben wir:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{U_1}{u_1} = \frac{1 - O_2^2}{O_1^2 - \sigma x^2} = \frac{O_1^2 - x^2}{O_1^2 - \sigma x^2} = 1 - \frac{x^2(1-\sigma)}{O_1^2 - \sigma x^2}, \\ W_2 &= \frac{U_2}{u_1} = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - \sigma x^2} = 1 - \frac{1 - \sigma x^2}{O_1^2 - \sigma x^2}, \\ w_1 &= \frac{U_2}{u_2} = \frac{O_1^2 - 1}{\sigma x^2 - O_2^2} = \frac{x^2 - O_2^2}{\sigma x^2 - O_2^2} = 1 - \frac{x^2(1-\sigma)}{O_2^2 - \sigma x^2}, \\ w_2 &= \frac{U_1}{u_2} = \frac{1 - O_2^2}{\sigma x^2 - O_2^2} = 1 - \frac{1 - \sigma x^2}{O_2^2 - \sigma x^2} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

oder wegen (28)

$$\left.\begin{aligned}
W_1 &= 1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{(1+x^2)\left[1+\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]-2\sigma x^2},\\
W_2 &= 1 - \frac{2(1-\sigma x^2)}{(1+x^2)\left[1+\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]-2\sigma x^2},\\
w_1 &= 1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{(1+x^2)\left[1-\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]-2\sigma x^2},\\
w_2 &= 1 - \frac{2(1-\sigma x^2)}{(1+x^2)\left[1-\sqrt{1-\frac{4\sigma x^2}{(1+x^2)^2}}\right]-2\sigma x^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

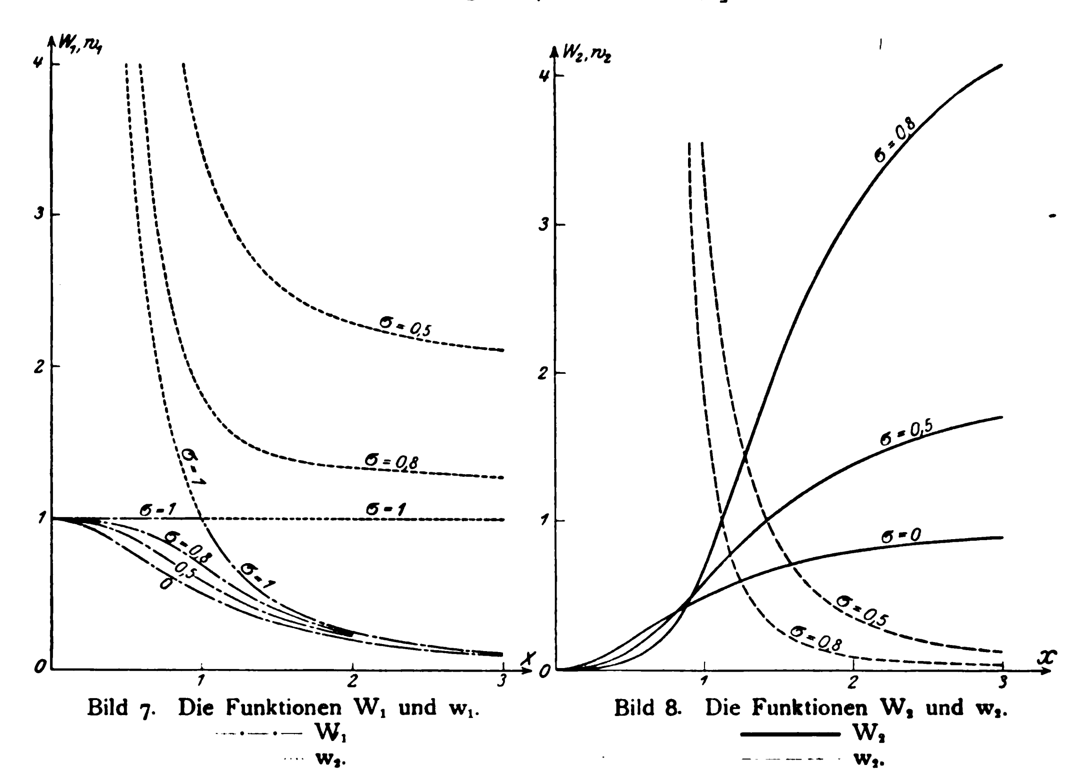


Bild 7. Die Funktionen W_1 und w_1.
—·—·— W_1
····· w_1.

Bild 8. Die Funktionen W_2 und w_2.
——— W_2
– – – – w_2.

Diskutieren wir den Verlauf der Kurven W und w, so haben wir alle zur Beschreibung der Zieherscheinungen notwendigen Unterlagen gewonnen. Wir wollen dazu das Verhalten dieser Funktionen für vollkommen lose und für vollkommen feste Kopplung untersuchen; außerdem ihr Verhalten für kleine und große x und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle. In den Bildern 7 und 8 sind W_1 (strichpunktiert) und w_1 (punktiert) bzw. W_2 (ausgezogen) und w_2 (gestrichelt) als Funktionen der Verstimmung x graphisch aufgetragen für die Streuungen $\sigma = 0$; 0,5; 0,8 und 1.

I. Vollkommen lose Kopplung.

1. Die Funktion W_1. Wir setzen $\sigma = 1 - \eta$, $0 < \eta < 1$, und entwickeln nach Potenzen von η:

$$W_1 = 1 - \frac{2x^2(1-\sigma)}{1 + x^2(1-2\sigma) + \sqrt{(1+x^2)^2 - 4\sigma x^2}}$$

$$= 1 - \frac{2x^2\eta}{1 + x^2(2\eta - 1) + \sqrt{1 - 2x^2 + x^4 + 4\eta x^2}}$$

$$= 1 - \frac{2x^2\eta}{(1-x^2) + 2\eta x^2 + (|1-x^2|)\sqrt{1 + \frac{4\eta x^2}{(1-x^2)^2}}}$$

$$= 1 - \frac{2x^2\eta}{(1-x^2) + 2\eta x^2 + |1-x^2|\left\{1 + \frac{2\eta x^2}{(1-x^2)^2} + ((\eta^2))\right\}};$$

für $x < 1$ wird das:

$$W_1 = 1 - \frac{2\eta x^2}{2(1-x^2) + 2\eta x^2 + 2\eta\frac{x^2}{1-x^2} + ((\eta^2))}$$

und das gibt für $\lim \eta = 0$:

$$W_1 = 1 \text{ für } x < 1. \tag{50}$$

Für $x > 1$ dagegen wird

$$W_1 = 1 - \frac{2\eta x^2}{2\eta x^2 + 2\eta\frac{x^2}{x^2-1} + ((\eta^2))}$$

und damit

$$W_1 = \frac{1}{x^2} \text{ für } x > 1. \tag{51}$$

2. Die Funktion w_1. Setzen wir wieder $\sigma = 1 - \eta$, so bekommen wir ähnlich wie eben

$$w_1 = 1 - \frac{2x^2\eta}{(1-x^2) + 2\eta x^2 - |1-x^2|\left\{1 + 2\eta\frac{x^2}{(1-x^2)^2} + ((\eta^2))\right\}},$$

also

$$w_1 = \frac{1}{x^2} \text{ für } x < 1 \text{ und } w_1 = 1 \text{ für } x > 1. \tag{52, 53}$$

3. Die Funktion W_2. Wir benutzen die Darstellung

$$W_2 = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - \sigma x^2} \text{ oder, für } \sigma = 1, \quad W_2 = \frac{O_1^2 - 1}{O_1^2 - x^2}.$$

Für $x < 1$ ist $O_1^2 = 1$, für $x > 1$ dagegen $O_1^2 = x^2$; im ersten Falle verschwindet somit der Zähler, im letzten der Nenner; wir haben also:

$$W_2 = 0 \text{ für } x < 1 \text{ und } W_2 = \infty \text{ für } x > 1. \tag{54, 55}$$

4. Die Funktion w_2. Es wird $w_2 = \frac{1 - O_2^2}{\sigma x^2 - O_2^2}$ gleich $\frac{1 - O_2^2}{x^2 - O_2^2}$; für $x < 1$ ist $O_2^2 = x^2$, für $x > 1$ dagegen $O_2^2 = 1$; im ersten Falle verschwindet der Nenner, im zweiten der Zähler; wir haben also

$$w_2 = \infty \text{ für } x < 1 \tag{56}$$

und

$$w_2 = 0 \text{ für } x > 1. \tag{57}$$

II. Vollkommen feste Kopplung.

1. Die Funktion W_1. Setzen wir $\sigma = 0$, so bekommen wir sofort

$$W_1 = 1 - \frac{2x^2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}. \tag{58}$$

Wächst x von 0 bis unendlich, so nimmt W_1 vom Werte 1 bis zum Werte 0 allmählich ab. Die beiden Kurven W_1 für vollkommen feste und vollkommen lose Kopplung unterscheiden sich verhältnismäßig wenig, wir können also schließen, daß die W_1-Kurven von der Streuung wenig abhängig sein werden.

2. Die Funktion w_1. Es wird für $\sigma = 0$:

$$w_1 = 1 - \frac{2x^2}{-(1-x^2)+(1+x^2)} = \infty; \tag{59}$$

die Kurve w_1 verläuft also für $\sigma = 0$ ganz im Unendlichen. Die Kurven für vollkommen feste und vollkommen lose Kopplung unterscheiden sich beträchtlich, es wird also der Verlauf der Kurven w_1 stark abhängig von dem jeweiligen Werte der Streuung sein.

3. Die Funktion W_2. Für $\sigma = 0$ wird:

$$W_2 = 1 - \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2}{1+x^2}. \tag{60}$$

Wächst x von 0 bis ∞, so durchläuft W_2 alle Werte von 0 bis 1. Es ist

$$W_{2\,(\sigma=0)} = 1 - W_{1\,(\sigma=0)}.$$

Die Kurven W_2 sind im Gegensatz zu den Kurven W_1 stark abhängig von der Streuung.

4. Die Funktion w_2. Für $\sigma = 0$ wird:

$$w_2 = 1 + \frac{2}{-(1+x^2)[1-1]} = \infty. \tag{61}$$

w_2 wird also unendlich groß für jeden endlichen Wert von x.

Entwickeln wir unsere Funktionen W und w für kleine bzw. große Werte von x nach Potenzen von x und $\frac{1}{x}$ und für die Nachbarschaft der Resonanzstelle nach Potenzen von $\varepsilon = x - 1$, so erhalten wir, wenn wir alle von höherer Ordnung kleinen Glieder vernachlässigen, die folgenden Näherungsausdrücke:

I. Für W_1 und

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ \text{kleine Werte von } x;\ 0 < x \ll 1: && W_1 = 1 - x^2(1-\sigma),\\
&2.\ \text{große Werte von } x;\ 1 \ll x < \infty: && W_1 = \frac{1}{x^2},\\
&3.\ x \text{ nahe gleich } 1;\ x = 1+\varepsilon;\ 0 < |\varepsilon| \ll 1: && W_1 = \frac{1}{1+k} - \varepsilon\frac{1}{1+k};
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

II. Für w_1 und

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ \text{kleine Werte von } x: && w_1 = \frac{1}{x^2\sigma},\\
&2.\ \text{große Werte von } x: && w_1 = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{x^2}\frac{k^2}{\sigma},\\
&3.\ x \text{ nahe gleich } 1: && w_1 = \frac{1}{1-k} - \varepsilon\frac{1}{1-k};
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

III. Für W_2 und

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ \text{kleine Werte von } x: && W_2 = (1-\sigma)x^2,\\
&2.\ \text{große Werte von } x: && W_2 = \frac{1}{1-\sigma} - \frac{1}{x^2}\frac{1+\sigma}{1-\sigma},\\
&3.\ x \text{ nahe gleich } 1: && W_2 = \frac{1}{1+k} + \varepsilon\frac{2+k-k^2}{k(1+k)^2},
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

IV. Für w_2 und

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \text{kleine Werte von } x: && w_2 = \frac{1}{x^4}\frac{1}{k^2\sigma} - \frac{1}{x^2}\frac{3\sigma-1}{k^2\sigma}, \\ &2.\ \text{große Werte von } x: && w_2 = \frac{k^2}{\sigma x^2}, \\ &3.\ x \text{ nahe gleich } 1: && w_2 = \frac{1}{1-k} - \varepsilon\frac{2-k-k^2}{k(1-k)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Aus den angegebenen Näherungsformeln ist ohne weiteres zu erkennen, welche Werte die Funktionen W und w für $x = 0$, ∞ und 1 annehmen und wie sie sich in der Nachbarschaft dieser Stellen verhalten.

Wollen wir nun wissen, für welchen Bereich der Variablen x bei gegebenen Werten von σ, H und h die $\left\{\begin{matrix}\text{rasche}\\ \text{langsame}\end{matrix}\right\}$ Koppelschwingung erregt wird, so brauchen wir nur folgendermaßen zu verfahren:

Wir tragen graphisch die beiden Kurven $\left\{\begin{matrix}H - W_1\\ H - w_1\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}h W_2\\ h w_2\end{matrix}\right\}$ auf und stellen diejenigen Bereiche von x-Werten fest, für die die erste Kurve die zweite unter sich läßt; für diese Bereiche werden die Bedingungen (47) befriedigt. Ihre Grenzen sind diejenigen Stellen, an denen die Gitterkopplung gerade hinreicht, um die Dämpfung 0 hervorzurufen; innerhalb der Bereiche ist die Dämpfung der betreffenden Koppelschwingung negativ. Wollen wir die Abhängigkeit der Erscheinungen vom Grade der Gitterkopplung, also von den H-Werten, untersuchen, so müssen wir die Kurven $\left\{\begin{matrix}H - W_1\\ H - w_1\end{matrix}\right\}$ um den Betrag des Zuwachses von H senkrecht nach oben oder unten verschieben. Lassen wir die Gitterkopplung wachsen, so müssen wir nach oben, lassen wir sie abnehmen, so müssen wir nach unten verschieben. Wollen wir weiter die Abhängigkeit der Verhältnisse von den h-Werten untersuchen, so brauchen wir nur für die verschiedenen in Betracht zu ziehenden Werte von h die Kurven $\left\{\begin{matrix}h W_2\\ h w_2\end{matrix}\right\}$ zu zeichnen.

In Bild 9 ist dies ausgeführt für den Fall, daß σ den Wert 0,8 besitzt. Die Kurven $h W_2$ sind stark ausgezogen, die Kurven $h w_2$ stark gestrichelt, die Kurven $H - W_1$ strichpunktiert, und endlich die Kurven $H - w_1$ punktiert gezeichnet. In Bild 10 und 11 sind dazu gehörig für die verschiedenen Werte von H die Bereiche von x-Werten aufgetragen, für die die Erregung der raschen bzw. der langsamen Koppelschwingung möglich ist, und zwar in den Bildern 10 und 11 bzw. für die Werte $h = 2$ und $h = 1$.

Betrachten wir in Bild 9 den Fall $h = 2$, so sehen wir: Die rasche Koppelwelle kann überhaupt nicht erregt werden, wenn H kleiner ist als 1. Wird jedoch H größer als 1, so werden Schwingungen möglich für kleine Werte von x. Je mehr H wächst, desto weiter dehnt sich der Bereich, für den die rasche Koppelschwingung möglich ist, nach rechts hin aus. Für $H = 8$ erstreckt er sich bereits über die Stelle $x = 4$ hinaus; wird die Gitterkopplung noch fester gewählt, so kann er sich bis ins Unendliche erstrecken. Fassen wir die langsame Koppelschwingung ins Auge, so kann sie erst erregt werden, sobald H größer wird als 1,25: Schwingungen können dann auftreten für unendlich große Werte von x. Lassen wir H wachsen, so dehnt sich der Bereich, für den die langsame Koppelschwingung möglich ist, von unendlich nach links hin aus, und zwar zunächst sehr schnell, dann aber nur langsam; bis zum Werte $x = 0$ kann er nicht gelangen, weil dazu H unendlich große Werte annehmen müßte.

Mit zunehmender Gitterkopplung dehnen sich die Bereiche der raschen bzw. der langsamen Koppelwelle von $x = 0$ bzw. von ∞ her in Richtung auf den Resonanzpunkt aus. Es muß also einen bestimmten Wert H^* von H geben, für den die Bereiche

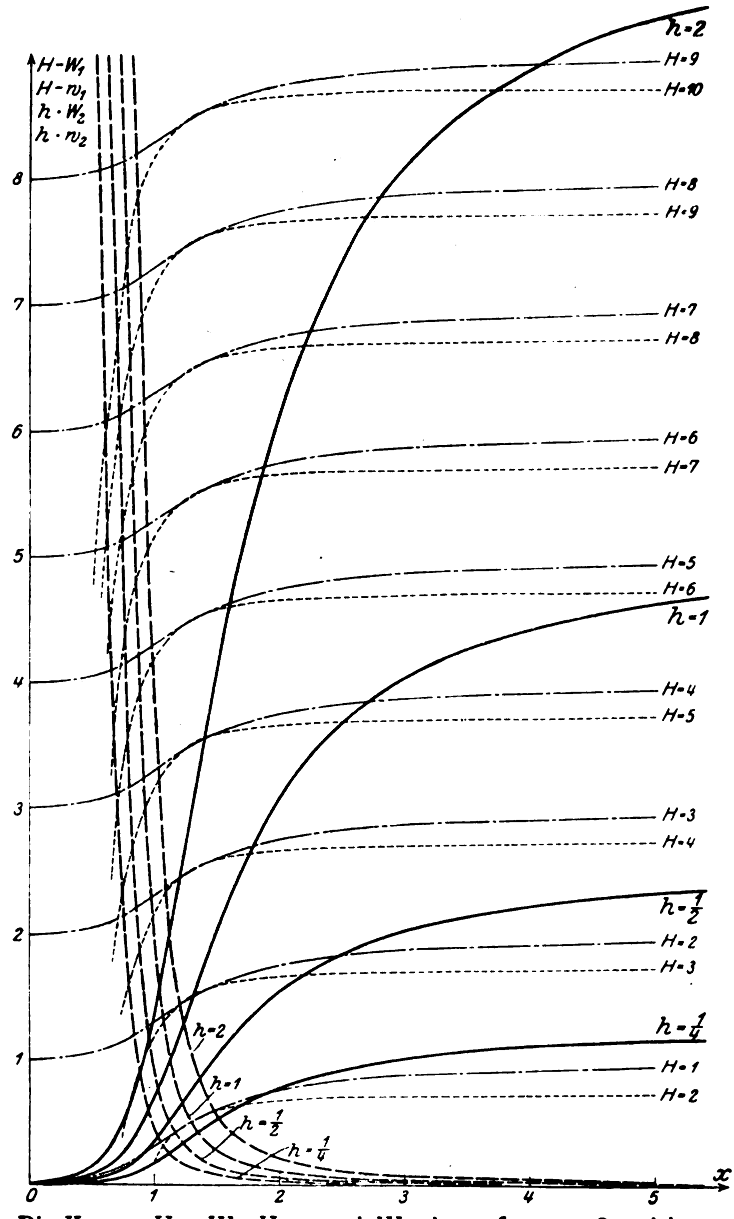


Bild 9. Die Kurven $H - W_1$, $H - w_1$; $h W_2$, $h w_2$; für $\sigma = 0{,}8$ und $h = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
——— $h W_2$, – – – $H - W_1$,
------ $h w_2$, ······ $H - w_1$.

gerade aufeinander stoßen, ohne sich gegenseitig zu überlagern. Dies ist der Fall für den Wert $H^* = 3$; die beiden Bereiche berühren sich an der Stelle $x = 1{,}2$. Für $H < 3$ bekommen wir eine Lücke, in der Schwingungsstille herrscht, für $H > 3$ überdecken sich die beiden Bereiche mit einem gewissen Stücke, wir bekommen die bekannte Zieherscheinung. Je weiter H über den Wert H^* hinauswächst, desto breiter wird die Ziehschleife. Sie dehnt sich nach rechts hin bedeutend rascher aus

als nach links; nach rechts hin kann sie sich bis ins Unendliche erstrecken, nach links jedoch nicht bis zum Punkte x = 0.

Für den Fall h = 1 sind die Erscheinungen ähnlich. Nur dehnt sich der Bereich der raschen Koppelschwingung viel schneller, der der langsamen Koppelschwingung dagegen nur wenig schneller als oben aus.

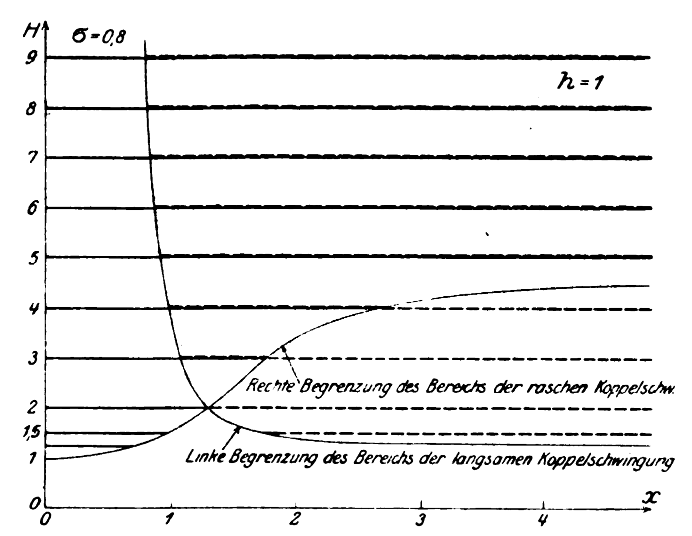


Bild 10. Die Bereiche von x-Werten, in denen die rasche (———) und die langsame (– – –) Koppelschwingung bestehen können, in Abhängigkeit von H.
$\sigma = 0{,}8$; h = 1.

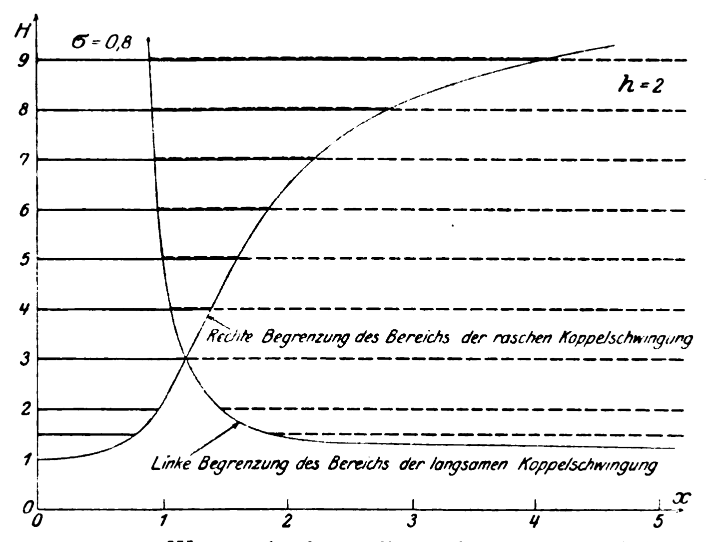


Bild 11. Die Bereiche von x-Werten, in denen die rasche (———) und die langsame (– – –) Koppelschwingung möglich sind; in Abhängigkeit von H.
$\sigma = 0{,}8$; h = 2.

Etwas anders jedoch werden die Erscheinungen, wenn wir es mit noch kleineren Werten von h zu tun haben. Nehmen wir $h = \frac{1}{4}$, so sehen wir (Bild 9), daß die rasche Koppelschwingung schon für Werte von H möglich wird, die kleiner sind als 1. Lassen wir H von 0 aus wachsen, so beginnen die Schwingungen nicht zuerst für unendlich kleine x, sondern in unserm Falle etwa bei x = 1; bei weiterem Wachsen

von H dehnt sich der Bereich dann sehr schnell nach kleinen und großen Werten von x hin aus, und er umfaßt das ganze Intervall von $x = 0$ bis $x = \infty$ bereits in dem Augenblick, wo für unendlich große x auch die langsame Koppelschwingung in Erscheinung tritt. Bei weiter zunehmender Gitterkopplung bleibt die rasche Koppelschwingung für jeden Wert von x möglich, und der Bereich der langsamen Koppelwelle dehnt sich zunächst schnell, dann langsam nach links hin aus.

Im Falle $h = \frac{1}{2}$ ist die Sachlage ähnlich; nur tritt die langsame Koppelschwingung bereits in Erscheinung, bevor der Bereich der raschen Koppelschwingung sich bis ins Unendliche erstreckt hat.

Denken wir uns den Grenzfall $h = 0$, so fällt die Kurve $h W_2$ mit der x-Achse zusammen. Lassen wir nun H wachsen von 0 bis 1, so beginnt die rasche Koppelschwingung zunächst für unendlich große x, ihr Bereich dehnt sich dann nach links hin aus, also gerade umgekehrt wie vorhin. Ähnliches können wir erwarten für sehr kleine Werte von h.

Nehmen wir die Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis fester als im eben behandelten Falle, so wird die rasche Koppelschwingung leichter, die langsame dagegen schwerer erregt als eben (vorausgesetzt, daß ω_1 endlich bleibt, vergleiche oben). Es ist also dann leichter möglich, die Gitterkopplung so fest zu wählen, daß die rasche Koppelwelle für jeden Wert x bestehen kann. Sobald man durch genügend kräftige Gitterrückkopplung erreicht hat, daß die rasche Koppelwelle für jeden Wert von x bestehen kann, erhält man keine Frequenzsprünge mehr, wenn sich einmal die rasche Koppelschwingung erregt hat.

Das Verhalten der Zieherscheinungen bei kapazitiver Kopplung entspricht qualitativ ziemlich genau dem Verhalten bei induktiver Kopplung. Nur für kleine Werte von h zeigen sich qualitative Unterschiede; denn bei induktiver Kopplung beginnt die Erregungsmöglichkeit der langsamen bzw. der raschen Koppelschwingung immer bei unendlich großen bzw. bei unendlich kleinen Werten von x.

IV. Quantitatives.

Im folgenden wollen wir nun noch die quantitativen Verhältnisse etwas näher betrachten.

Zunächst sei ein bestimmter Wert der Verstimmung x gegeben. Wir fragen uns, welches ist die Gitterkopplung, die wir mindestens benötigen, damit an der Stelle x die langsame oder die rasche Koppelschwingung bestehen kann. Die Antwort darauf geben uns sofort die Bedingungen (47) und (48), wenn wir für sie das Gleichheitszeichen gelten lassen. Es muß also H mindestens sein gleich

$$H = W_1 + h W_2 = \left[1 - \frac{2 x^2 (1 - \sigma)}{(1 + x^2)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4 \sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right] - 2 \sigma x^2}\right] + h \left[1 - \frac{2 (1 - \sigma x^2)}{(1 + x^2)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4 \sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right] - 2 \sigma x^2}\right], \quad (65)$$

wenn wir die rasche, und

$$H = w_1 + h w_2 = \left[1 - \frac{2 x^2 (1 - \sigma)}{(1 + x^2)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right] - 2 \sigma x^2}\right] + h \left[1 - \frac{2 (1 - \sigma x^2)}{(1 + x^2)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \sigma x^2}{(1 + x^2)^2}}\right] - 2 \sigma x^2}\right], \quad (66)$$

wenn wir die langsame Koppelwelle erzeugen wollen. Wir betrachten die folgenden Beispiele:

1. Den Fall der Resonanz ($x = 1$). Wir bekommen für die rasche Koppelschwingung

$$H = \frac{1 + h}{1 + \sqrt{1 - \sigma}} \tag{67}$$

und für die langsame

$$H = \frac{1 + h}{1 - \sqrt{1 - \sigma}}; \tag{68}$$

2. $x = 0$. Wir bekommen für die rasche Koppelwelle

$$H = 1, \text{ also } h_3 = h_1, \tag{69}$$

für die langsame

$$H = \infty. \tag{70}$$

Für nicht zu große Werte von h gibt (69) nach obigem die Gitterkopplung, die wir mindestens benötigen, damit überhaupt für irgendwelche Werte von x die rasche Koppelschwingung einsetzen kann.

3. Unendlich große x. Wir bekommen für die rasche Koppelschwingung:

$$H = h \frac{1}{1 - \sigma}, \tag{71}$$

für die langsame

$$H = \frac{1}{\sigma}. \tag{72}$$

Für nicht zu kleine Werte von h gibt (71) diejenige Gitterkopplung, welche wir mindestens aufbringen müssen, damit die rasche Koppelschwingung im ganzen Bereiche von $x = 0$ bis $x = \infty$ sich erregen kann. (72) gibt die Gitterkopplung, die wir mindestens benötigen, um überhaupt (für irgendwelche Werte von x) die langsame Koppelschwingung erregen zu können.

Nun sei umgekehrt der Wert von H gegeben. Wir fragen nach denjenigen Stellen x, an denen H gerade hinreicht zur Aufrechterhaltung der Schwingungen. Wir haben dazu die Gleichungen (65) und (66) nach x aufzulösen. Wir bekommen aus ihnen zunächst

$$\sqrt{1 + 2x^2(1 - 2\sigma) + x^4}\,[H - 1 - h] = x^2[h - 1 - H(1 - 2\sigma)] + [1 - h - H] \tag{73}$$

für die rasche und

$$-\sqrt{1 + 2x^2(1 - 2\sigma) + x^4}\,[H - 1 - h] = x^2[h - 1 - H(1 - 2\sigma)] + [1 - h - H] \tag{74}$$

für die langsame Koppelschwingung. Quadrieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir ein und dieselbe biquadratische Gleichung für x. Führen wir der Kürze halber die Bezeichnungen ein:

$$h - 1 - H(1 - 2\sigma) = \alpha; \quad 1 - h - H = \beta \text{ und } H - 1 - h = \gamma, \tag{75}$$

so lautet diese biquadratische Gleichung:

$$x^4(\gamma^2 - \alpha^2) + 2x^2[\gamma^2(1 - 2\sigma) - \alpha\beta] + (\gamma^2 - \beta^2) = 0. \tag{76}$$

Für x^2 ergibt sie die beiden Werte:

$$x^2 = \frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2}\left\{\gamma^2(2\sigma - 1) + \alpha\beta \pm \gamma\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\sigma\alpha\beta - 4\sigma(1 - \sigma)\gamma^2}\right\}. \tag{77}$$

Wollen wir für jeden dieser x-Werte wissen, ob er für die rasche oder für die langsame Koppelschwingung gilt, so brauchen wir nur zu sehen, welche der beiden Gleichungen (73) und (74) er befriedigt. Liefert uns (77) einen positiven und einen negativen Wert von x^2, also nur einen reellen positiven Wert von x, dann können folgende Fälle vorliegen:



1. H ist kleiner als der durch (72) bestimmte Wert $\frac{1}{\sigma}$. Die langsame Koppelschwingung kann dann noch nirgends bestehen, unser positiver Wert von x gibt also dann an, bis zu welcher Stelle die rasche Koppelschwingung bestehen kann. Der Bereich der raschen Koppelschwingung reicht dann von diesem Punkte x bis nach 0 oder bis nach ∞, je nachdem ob H größer oder kleiner ist als der durch (69) bestimmte Wert.

2. H ist größer als $\frac{1}{\sigma}$. Unser positiver Wurzelwert gibt dann an, bis zu welchem Punkte sich der Bereich der langsamen Koppelschwingung von ∞ her erstreckt. Die rasche Koppelschwingung ist für $H > \frac{1}{\sigma}$ sicher möglich für kleine Werte von x; denn dazu braucht ja wegen (69) nur H größer als 1 zu sein. Erstreckte sich der Bereich der raschen Koppelschwingung nur bis zu einem endlichen Werte x, so müßte unsere Gleichung (77) zwei positive Werte von x ergeben, was wir ausgeschlossen haben. Es muß also die rasche Koppelschwingung in unserem Falle für jeden Wert von x bestehen können.

Für den Fall, daß Gleichung (77) uns zwei positive Werte von x liefert, müssen wir wieder die Fälle $H > \frac{1}{\sigma}$ und $H < \frac{1}{\sigma}$ unterscheiden. Ist zunächst H kleiner als $\frac{1}{\sigma}$, so begrenzen die beiden positiven Werte von x den Bereich der raschen Koppelschwingung; denn die langsame Koppelschwingung ist dann noch nicht möglich. Ist jedoch H größer als $\frac{1}{\sigma}$, so gehört einer der beiden X-Werte der raschen, der andere der langsamen Koppelschwingung an; je nachdem ob die beiden Bereiche, in denen die rasche bzw. die langsame Koppelschwingung möglich ist, sich überlagern oder nicht, bekommen wir eine Ziehschleife oder eine Lücke, in der Schwingungsstille herrscht. Zur Entscheidung, ob das eine oder das andere vorliegt, läßt sich ein einfaches Kriterium angeben. Wie oben gezeigt, gibt es einen bestimmten Wert H*, für den die beiden Bereiche gerade aneinander stoßen. Ist nun unser H größer als H*, so greifen die Bereiche übereinander, ist dagegen H kleiner als H*, so sind sie durch eine Lücke voneinander getrennt. Im ersten Falle bekommen wir eine Ziehschleife, im zweiten Schwingungsstille. Wir brauchen also bloß H zu berechnen, um übersehen zu können, ob wir es bei einer gewissen Gitterkopplung mit einer Ziehschleife zu tun haben.

Für H* muß unsere Gleichung (77) offenbar 2 gleiche Werte von x liefern, es muß also entweder $\gamma = 0$ oder $\sqrt{(\alpha - \rho)^2 + 4\sigma\alpha\beta - 4\sigma(1-\sigma)\gamma^2} = 0$ sein. Für uns kommt nur das erstere in Betracht; ändern wir nämlich H* etwas ab, so wird im allgemeinen je nach der Richtung, in der wir es abändern, der Radikand der Wurzel positive oder negative Werte annehmen, er wird also jedenfalls bei geeigneter Abänderung von H negativ werden können. Das würde bedeuten, daß wir dann zwei komplexe Werte von x bekämen. Tatsächlich dürfen wir natürlich nur reelle Werte von x erhalten, die uns entweder die Breite der Ziehschleife oder die der Schwingungslücke geben. Wir bekommen also H*, indem wir $\gamma = 0$ setzen, d. h. es wird:

$$H^* = 1 + h. \tag{78}$$

Es sei bemerkt, daß der Wert von H* unabhängig ist von der Stärke der Gitterkopplung. Für den oben eingehend besprochenen Fall h = 2 wird H* = 3, in Übereinstimmung mit Bild 9 und 11.

Von Interesse ist es nun noch festzustellen, welche Gitterkopplung im allgemeinsten Falle mindestens erforderlich ist, damit die eine oder die andere Koppelschwingung möglich wird. Für die langsame Koppelschwingung gibt uns bereits (72) den Wert $H = \frac{1}{\sigma}$. Für die rasche Koppelschwingung liegen die Verhältnisse dagegen nicht so einfach. Wir sahen ja früher, daß sie u. U. für größere Werte von x leichter zu erregen war als für unendlich kleine x. Für den Mindestwert von H muß uns Gleichung (77) offenbar eine Doppelwurzel liefern, und bei etwas kleineren Werten von H dürfen wir keine reellen Werte von x mehr bekommen. Wir werden also den Mindestwert von H erhalten, indem wir den Wurzelausdruck gleich Null setzen. Das gibt die Beziehung:

$$(\alpha - \beta)^2 + 4\sigma\alpha\beta - 4\sigma(1-\sigma)\gamma^2 = 0. \tag{79}$$

Wir können hierfür schreiben

$$\sigma\gamma^2 = \frac{1}{1-\sigma}\left\{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \sigma\alpha\beta\right\}. \tag{80}$$

Die Gleichungen (75) ergeben durch einfache Ausrechnung

$$\left.\begin{aligned} \sigma\gamma^2 &= H^2\sigma - 2hH\sigma - 2H\sigma + 2h\sigma + h^2\sigma + \sigma \\ \text{und} \quad \frac{1}{1-\sigma}\left\{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \sigma\alpha\beta\right\} &= H^2\sigma + 2hH\sigma - 2H\sigma - 2h + h^2 + 1 \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

und daraus berechnet sich H zu:

$$H = \frac{1+\sigma}{2\sigma} - \frac{1-\sigma}{4\sigma}\cdot\frac{h^2+1}{h}. \tag{82}$$

(Für $\sigma = 0{,}8$ und $h = \frac{1}{2}$ ergibt das z. B. $H = \frac{31}{32}$.)

Wollen wir die Stelle x bestimmen, für die die erste Schwingungserregung möglich ist, so müssen wir (82) in Gleichung (77) einsetzen. Da die Wurzel verschwindet, haben wir einfach

$$x^2 = \frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2}\left[\gamma^2(2\sigma - 1) + \alpha\beta\right] \tag{83}$$

oder wegen (80)

$$x^2 = \frac{1}{\sigma(\gamma^2 - \alpha^2)}\left[\sigma^2\gamma^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]. \tag{84}$$

Aus (75) folgt durch Ausrechnung

$$\sigma^2\gamma^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = -2\sigma hH(1-\sigma) + 2\sigma H(1-\sigma) + 2h(1-\sigma) - h^2(1-\sigma) - (1-\sigma)$$

und

$$\gamma^2 - \alpha^2 = 4\sigma H^2(1-\sigma) - 4\sigma hH - 4H(1-\sigma) + 4h;$$

und damit ergibt sich

$$x^2 = \frac{1}{\sigma}\,\frac{-2\sigma hH(1-\sigma) + 2\sigma H(1-\sigma) + 2h(1-\sigma) - h^2(1-\sigma) - (1-\sigma)}{4\sigma H^2(1-\sigma) - 4\sigma hH - 4H(1-\sigma) + 4h}. \tag{85}$$

Das läßt sich durch Einführen von (82), Wegheben von gemeinsamen Faktoren aus Zähler und Nenner und durch geeignete Zusammenfassungen vereinfachen zu

$$x^2 = \frac{2}{1+\sigma}\,\frac{h(1-h)}{(1+h)\left(h - \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)}. \tag{86}$$

Man sieht leicht, daß dies nur dann einen reellen Wert von x ergibt, wenn h der Bedingung genügt:

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \leqq h \leqq 1. \tag{87}$$

Für $h = 1$ ist $x = 0$, für $h = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$ ist $x = \infty$. Ist h größer als 1, so beginnen die Schwingungen der raschen Koppelwelle bei unendlich kleinen Werten von x; ist h kleiner als $\frac{1-\sigma}{1+\sigma}$, so beginnen sie bei unendlich großen Werten von x. Liegt h jedoch zwischen $\frac{1-\sigma}{1+\sigma}$ und 1, so setzen die Schwingungen zuerst ein für den durch (86) bestimmten Wert von x. (Für den Fall $\sigma = 0{,}8$ und $h = \frac{1}{2}$ liefert (86) den Wert $x = 0{,}69$, vergl. Bild 9.)

Archiv für Elektrotechnik

X. Band. 10. u. 11. Heft. 1922.

Eigenfrequenzen von Spulen

von

Curt Ridder.

(Mitteilung aus dem technisch-physikalischen Institut der Universität Jena.)

I. Einleitung und Untersuchungsmethoden.

a) Einleitung.

Das Verhalten der Spule bei Hochfrequenz ist in den letzten Jahren wiederholt theoretisch[1][2][3][4] wie experimentell[3][6–8] untersucht worden, weil in der Hochspannungstechnik[2–5] Überspannungserscheinungen, die bei nicht stationären Vorgängen (Wanderwellen) auftreten, bislang noch keine befriedigende Erklärung gefunden haben, zum andern die Spule in der drahtlosen Telegraphie[9][10] durch die Elektronenröhren als Verstärker- oder Senderröhren verwandt, weitere Bedeutung gewonnen hat.

b) Ziel der Arbeit.

Im folgenden sollen die Eigenschwingungen zunächst von einlagigen Spulen (Teil IV) ermittelt, dann zwei- (Teil V), drei- (Teil VI) und viellagigen Spulen (Flachspulen Teil VII) untersucht, schließlich die Eigenschwingungen von ein- und zweilagigen Spulen in Öl (Teil VIII) mit Hilfe der Braunschen Röhre mit Elektroden bestimmt werden. Ferner sollen die Eigenschwingungen durch das äußere elektrische und magnetische Feld bei ein-, zwei- und dreilagigen Spulen mit der Braunschen Röhre ohne Elektroden untersucht werden (Teil IV, V, VI).

c) Kurzer Überblick über das Spulenproblem.

Lenz[1]) und Rogowski[2]) haben auf theoretischem Wege zwei Arten von Eigenschwingungen bei einlagigen Spulen gefunden. Lenz geht von Spulen mit vielen Windungen aus, während Rogowski seine Untersuchungen nur auf Spulen von wenig Windungen beschränkt. Die Identität der Lenzschen ungradzahligen Eigenschwingungen einer Spule mit den Rogowskischen Eigenschwingungen erster Art und den Lenzschen gradzahligen Eigenschwingungen mit denen zweiter Art von Rogowski hat letzterer nachgewiesen[2]).

Es soll in den folgenden Ausführungen die Rogowskische Benennung der Eigenschwingung einer Spule zur Anwendung gelangen, und es soll mit ihm eine Eigenschwingung erster Art als eine solche definiert werden, bei der die Spule in

---

[1]) Lenz, Ann. d. Physik 43, 1914, S. 749.
[2]) Rogowski, Arch. f. Elektrotech. VII, 1918, S. 17 u. 240.
[3]) Böhm, Arch. f. Elektrotech. V, 1916, S. 408; IX, 1920, S. 341.
[4]) Rüdenberg, E. u. M., 1914, S. 731.
[5]) Wagner, Arch. f. Elektrotech. VI, 1917, S. 301.
[6]) Drude, Ann. d. Physik, IX, 1902, S. 293.
[7]) Seibt, ETZ. 1903, S. 105.
[8]) Gothe, Arch. f. Elektrotech. IX, 1920, S. 1.
[9]) Mühlbrett, Arch. f. Elektrotech. IX, 1920, S. 365.
[10]) Glage u. Edler, Arch. f. Elektrotech. X. 1921, S. 56.

„Stromresonanz" schwingt[1]), eine Eigenschwingung zweiter Art als eine solche, bei der die Spule in „Spannungsresonanz" schwingt[2]).

Den verschiedenen Charakter dieser beiden Arten von Eigenschwingungen konnte Gothe[3]) bei einlagigen Spulen bereits nachweisen. Gothe tastete mit einer Probespule das magnetische Feld der zu untersuchenden Spule ab und fand, daß die Ausschläge an seinem Indikator (Galvanometer) bei den Eigenschwingungen erster Art bei Kurzschluß der Spule verschwanden. Bei den Eigenschwingungen zweiter Art blieben die Ablenkungen des Galvanometers unverändert erhalten. Für alle Eigenschwingungen erster Art fand Gothe in der Spulenmitte einen Strombauch, an den Enden Stromknoten, dagegen für sämtliche Eigenschwingungen zweiter Art in der Mitte einen Stromknoten, an den Enden Strombäuche.

Aus den Kurzschlußversuchen folgerte Gothe, daß für die Eigenschwingungen erster Art eine Spannung zwischen den Spulenenden bestehen müßte, bei den Eigenschwingungen zweiter Art dagegen keine.

Über die räumliche Verteilung der Spannung geben die Gotheschen Versuche keinen Aufschluß. Es sollen deshalb die beiden Grundschwingungen (erster und zweiter Art) hinsichtlich der Verteilung untersucht werden. Für die Oberschwingungen lassen sich die gewonnenen Resultate für jede Klasse von Eigenschwingungen übertragen. Außerdem soll zunächst die einlagige Spule daraufhin geprüft werden, weil sie am leichtesten zugänglich ist und theoretische[4]) und experimentelle[3]) Unterlagen bereits vorliegen.

d) Untersuchungsmethoden.

I. Methode.

In seinem mathematischen Beitrag zu den Abhandlungen über Eigenschwingungen einlagiger Spulen von Lenz hat Szasz[5]) den Potentialverlauf längs der Spule für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung berechnet[6]). Er findet für die Grundschwingung einen Potentialverlauf, der in Bild 1 wiedergegeben ist. Für die erste Oberschwingung zeigte Bild 2 den Potentialverlauf, wie ihn Szasz auf Grund seiner Rechnung angibt. Vergleicht man Bild 1 mit Bild 3, das Gothe experimentell festgestellt hat (die Unsymmetrie rührt von der einseitigen kapazitiven Anregung her), so ist ersichtlich, daß zwischen Strom und Spannung eine räumliche Verschiebung von nahezu 90° besteht.

Das äußere magnetische und elektrische[7]) Feld einer Spule läßt sich bei einer Resonanzlage durch die Braunsche Röhre ohne irgendwelche Elektroden unmittelbar nachweisen (elektrische Ablenkung in der Feldrichtung, die magnetische senkrecht dazu), wenn die Röhre senkrecht an die vertikal stehende Spule gebracht wird

[1]) Die Spule kann durch eine Selbstinduktion, der eine Kapazität parallel geschaltet ist, ersetzt gedacht werden. Diese Schaltung wirkt bei Resonanz wie ein unendlich großer Widerstand. Der einziehende Strom ist an den Enden Null (s. Bild 3) (Stromknoten an den Enden der Spule, ein Strombauch in der Spulenmitte).

[2]) Für diesen Resonanzfall verhält sich die Spule wie hinter einander geschaltete Selbstinduktion und Kapazität. Die Schaltung wirkt als Kurzschluß. Der einziehende Strom wird theoretisch unendlich groß. (Strombäuche an den Enden der Spule, in der Mitte ein Knoten, vgl. Gothe 3.)

[3]) Gothe, Arch. f. Elektrotech. IX, 1920, S. 1.

[4]) S. Lenz und Rogowski.

[5]) Szasz, Ann. d. Physik 43, 1914, S. 798.

[6]) Nach Lenz kann das elektrische Feld einer Spule als Überlagerung eines wirbellosen Potentialfeldes und eines quellenfreien Wirbelfeldes dargestellt werden. Das Potentialfeld rührt von den am Draht der Spule entstehenden Ladungen, das Wirbelfeld von der Induktionswirkung des veränderlichen magnetischen Feldes her.

[7]) Es kommt nur das Potentialfeld in Frage. Das Wirbelfeld übt auf den Kathodenstrahl nur einen beschleunigten oder verzögernden Einfluß zu seiner Längsrichtung aus.



(s. Versuchsanordnung Teil II und Bild 16). Es wird nur dann keine Ellipse auf dem Schirm der Braunschen Röhre entstehen können, wenn die Felder senkrecht aufeinander stehen. Je nach der Stellung der Röhre zur Spule muß die entstehende Ellipse eine andere Lage haben.

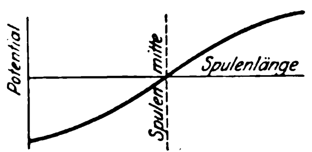


Bild 1. Potentialverlauf für λ_1 bei einer einlagigen Spule nach Szasz.

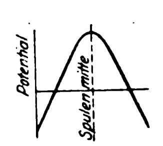


Bild 2. Potentialverlauf für λ_2 einer einlagigen Spule nach Szasz.

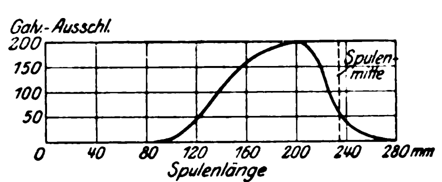


Bild 3. Stromverteilung für λ_1 bei einer einlagigen Spule bei einseitig kapazitiver Anregung.

Bild 4		Bild 5
46,8 cm		46,8 cm
43,0 cm		42,0 cm
33,0 cm		28,5 cm
24,4 cm	< Spulenmitte >	23,4 cm
15,0 cm		18,0 cm
2 cm		6,0 cm
0 cm		0,0 cm

Bild 4. λ_1. Bild 5. λ_2.

Räumliche Verteilung von Strom und Spannung einer einlagigen Spule für λ_1 und λ_2.

Die Aufnahmenreihen Bild 4 und Bild 5 veranschaulichen die Verhältnisse für die Grundschwingungen erster und zweiter Art für eine lange Spule (Tabelle I),

wenn die Spule (vgl. Bild 16) senkrecht zur Richtung des Kathodenstrahls zu ihrer Achse an der Röhre vorbeibewegt wurde.

Bei der Grundschwingung erster Art ist das elektrische Feld an den Spulenenden am stärksten, in der Mitte klein. Die Grundschwingung zweiter Art zeigt in der Mitte das stärkste elektrische Feld. Die Ablenkungen der beiden Aufnahmereihen, Bild 4 und 5, sind hier wesentlich durch die elektrischen Felder bestimmt. Für die Oberschwingungen blieben die charakteristischen Merkmale an den Spulenenden und in der Mitte bestehen. Immer hatte für Eigenschwingungen erster Art die Ellipse an den Spulenenden bzw. in der Mitte die Stellung, wie sie die Aufnahmereihe Bild 4 zeigt. Das gleiche wurde für die Eigenschwingungen zweiter

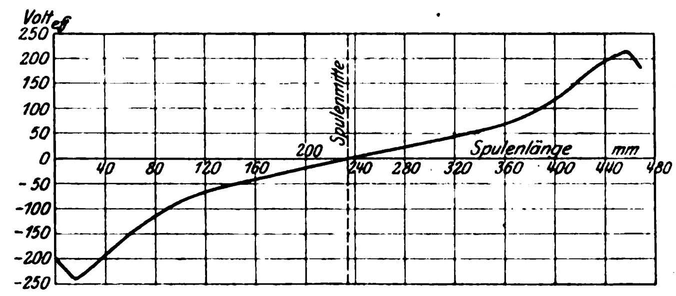


Bild 6. Spannungsverteilung einer langen einlagigen Spule für λ_1.

Art festgestellt hinsichtlich der entstehenden Lage der Ellipse an den Enden und der Spulenmitte. Die gefundenen Resultate lassen sich durch die Kurven von Szasz und Gothe zwanglos erklären und gestatten auch Schlüsse auf die angreifenden Felder. In der Spulenmitte kann mit guter Annäherung angenommen werden, daß die beiden Felder parallel gerichtet sind für beide Eigenwellen (Bild 4 und 5). Für die Spulenenden trifft dies nicht mehr zu. Bei kurzen, weiten Spulen wurden die gleichen Verhältnisse beobachtet.

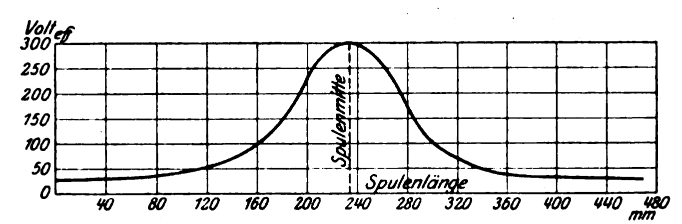


Bild 7. Spannungsverteilung einer langen einlagigen Spule für λ_2.

Der Potentialverlauf bei einlagigen Spulen wurde weiter durch direkte Messung (s. Versuchsanordnung, vgl. Bild 17) bestätigt gefunden. Für die Grundschwingung erster Art und die zweiter Art zeigen die Bilder 6 und 7 bei symmetrischer Anregung der Spule den Potentialverlauf für eine lange Spule (Tabelle I). Die Spulenform (das Verhältnis des Spulenradius zur halben Spulenlänge) war ohne Einfluß. Es wurden ähnliche Kurven für kurze, weite Spulen gefunden. Die Bilder 8 und 9 geben den Potentialverlauf bei symmetrischer Anregung einer kurzen, weiten Spule wieder. Daß die erhaltenen Kurven den berechneten Szaszschen in den charakteristischen Punkten (Spulenmitte und Enden) nur ähnlich sind, hat seinen Grund darin, daß Szasz seiner Berechnung eine Spule ohne Kapazität gegen Erde[1]) zu-

[1]) Der Begriff Kapazität gegen Erde ist hier weiter gefaßt. Es ist nicht nur der Einfluß der Erde gemeint, sondern jeden Leiters mit einem anderen Potential als das der Spule. In der Literatur findet er sich mit dieser erweiterten Bedeutung bereits vor (vgl. Rogowski Wagner, Gothe u. a.).



grunde legt. Die Kurven haben nur für die vorgelegenen Versuchsbedingungen Gültigkeit. Sie bedingen auch die Abweichungen an den Enden der Spule. Das Spannungsmaximum für die Grundschwingung zweiter Art und die Spannungsmaxima an den Enden für die Grundschwingung erster Art kommen in den mitgeteilten Kurven deutlich zum Ausdruck. Der äußere Potentialverlauf bei einlagigen Spulen (Bild 6—9) erklärt auch die Kapazitätsempfindlichkeit dieser Spulen (s. Versuchsanordnung Teil II).

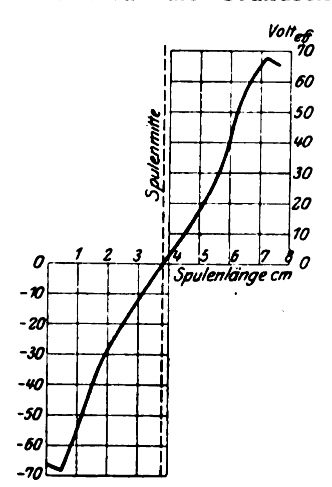


Bild 8. Spannungsverteilung einer kurzen weiten einlagigen Spule für λ_1.

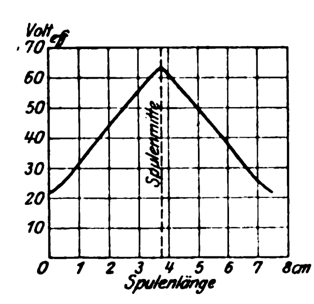


Bild 9. Spannungsverteilung einer kurzen weiten einlagigen Spule für λ_2.

II. Methode.

Aus den Bildern 6—9 ist ersichtlich, daß für Spannungs- und Stromresonanz eine Spannung an den Enden der Spule gegen Erde vorhanden ist. Dieser Umstand bietet eine Handhabe, die beiden Klassen von Eigenschwingungen zu erkennen und zu analysieren.

Greifen an einen Kathodenstrahl einer Braunschen Röhre zwei elektrische Felder an, die einen rechten Winkel miteinander bilden und von denen ein Feld lotrecht ausgerichtet ist (s. Bild 10 und 11), so wird eine Resultante auf dem Schirm

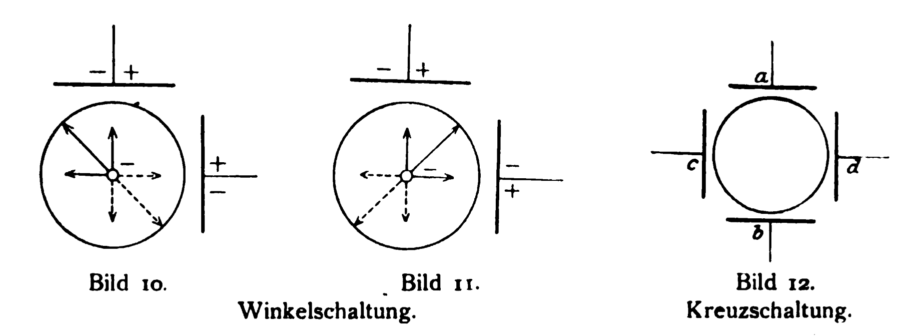


Bild 10. Bild 11. Winkelschaltung. Bild 12. Kreuzschaltung.

entstehen, die eine Neigung von $+45^0$ oder -45^0 gegen die Senkrechte hat, je nachdem die Ladungen der Ablenkungselektroden verschieden oder gleich sind. Die Bilder 10 und 11 veranschaulichen die möglichen Fälle. Diese Schaltung sei als Winkelschaltung benannt.

Schwingt also die Spule in der Grundschwingung erster Art, und werden die Spulenenden in der angegebenen Weise mit den Ablenkungselektroden einer Braunschen Röhre verbunden, so liegt der Fall von Bild 10 vor[1]). Da die Ladungen

[1]) Über den Einfluß der angehängten Kapazitäten auf die Eigenschwingungen einer Spule s. Gothe.

entgegengesetzt sind, muß die Resultante bei Kurzschluß der Spule verschwinden. Bei Spannungsresonanz (Grundschwingung zweiter Art) der Spule tritt die Resultante des Bildes 11 auf. In diesem Fall kann die Ablenkung durch Kurzschließen wegen der symmetrischen Potentialverteilung nicht zum Verschwinden gebracht werden. Für die Oberschwingungen der beiden Klassen von Eigenschwingungen wird dasjenige Bild auf dem Schirm der Braunschen Röhre entstehen, welches durch das der zugehörigen Grundschwingung gegeben ist. Mit steigender Ordnungszahl werden für beide Arten von Eigenschwingungen die zugeordneten Ablenkungen kleiner werden, da auf der Spule mehr Spannungsknoten entstehen, und somit die Teile, die die Ladungen an den Spulenenden tragen, kleiner werden.

III. Methode.

Für die Resonanzstellen erster Art bietet sich noch eine weitere Möglichkeit, die Braunsche Röhre als Indikator zu verwenden. Wird die zu untersuchende Spule mit den vertikalen Ablenkungselektroden a—b (Bild 12), die Senderkapazität mit den horizontalen c—d verbunden, so entsteht bei Resonanz infolge der Phasenverschiebung von 90° zwischen Sender- und Spulenspannung eine Ellipse, da die angreifenden Felder verschiedene Stärke aufweisen. Die Phasenverschiebung der beiden Kreise (Spule und Sender) von 0° bis 180° ist deutlich erkennbar.

An den Elektroden c—d liegt die Spannung des Sendekondensators. Sie ist groß gegen die Spannung, die an den Platten der Kopplungskondensatoren (Spulenseite) auftritt und die mit den Elektroden a—b verbunden sind. Der Phasenwinkel zwischen Sender- und Spulenspannung beträgt bei Verstimmung 0° bzw. 180°. Es zeigt sich daher auf dem Schirm der Braunschen Röhre nur ein Strich. Wird die Frequenz des Senders verändert und nähert sich diese einer Eigenfrequenz erster Art der Spule, so wächst die Spannung an den Spulenenden und damit auch an den Elektroden a—b. Gleichzeitig tritt eine Phasenverschiebung zwischen Sender- und Spulenspannung ein, die eine Ellipse auf dem Schirm der Braunschen Röhre zustande kommen läßt. Die Achsen der Ellipse fallen nicht mit dem rechtwinkligen Kreuz zusammen, das durch die Elektroden a—b, c—d gedacht gelegt werden kann. Die Ellipse wächst bis zur Resonanz. Der Phasenwinkel beträgt in diesem Falle 90°, und die Ellipsenachsen fallen mit dem rechtwinkligen Kreuz a—b, c—d zusammen. Die Ellipse verflacht sich bei weiterer Verstimmung der Frequenz, und zwar auf der anderen Seite der Lotrechten a—b, um schließlich in den ursprünglichen Ablenkungsstreifen überzugehen. Diese Schaltung wird weiterhin als Kreuzschaltung bezeichnet.

Weitere Methode.

An den Stellen, wo bei der Spule Stromresonanz vorliegt, ist dies auch noch in einer weiteren Schaltung mit Hilfe der Braunschen Röhre zu erkennen. Wenn die Spule mit den Ablenkungselektroden a—b oder c—d (Bild 12) verbunden wird, so zeigt sich bei den Eigenschwingungen erster Art eine vertikale bzw. horizontale Ablenkung. Diese war bei den einlagigen Spulen, den Spulen Tabelle VIII, XII, XV, XVI um das 3—4fache bei der Grundschwingung größer als die Ablenkung, die nach Abschalten der Spule an den Kopplungskondensatoren allein entstand.

Diese Schaltung wurde bei der Aufnahme der Stromcharakteristik (s. Anhang) verwandt.

II. Versuchsanordnungen.

a) Methode II und III.

Die zu untersuchende Spule hing an einem Glasstab 150 cm über der Erde, um Kapazität gegen Erde möglichst auszuschalten. Die Anregung der Spule ist aus



Bild 13 ersichtlich. Bei dem Aufbau wurde auf symmetrische Verhältnisse besonders Wert gelegt. Bild 14 zeigt einen Kopplungskondensator.

Bei der Kreuzschaltung lag die Spule an den vertikalen Ablenkungselektroden der Braunschen Röhre, während der Sendekreiskondensator an den horizontalen angeschlossen wurde. Sonst blieb alles ungeändert.

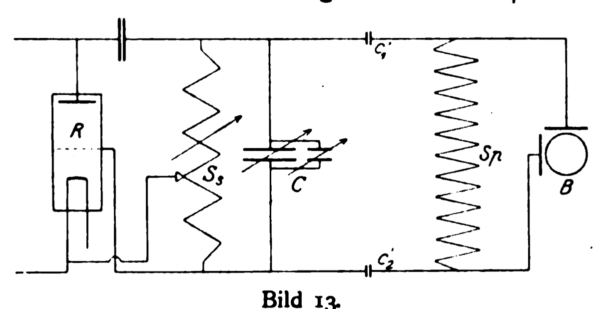


Bild 13.

B = Braunsche Röhre, Sp = untersuchte Spule, c_1' u. c_2' = Kopplungskondensatoren, C = Sendekreiskondensator, S_s = Spule des Senders, R = Elektronenröhre.

b) Die Braunsche Röhre.

Die zur Anwendung gelangte Braunsche Röhre war von gewöhnlicher Bauart. Sie stand dauernd mit einer Quecksilberrotation in Verbindung. Die Gleichspannung lieferte eine Influenzmaschine von Wehrsen. Die Röhre hatte keine inneren Ablenkungselektroden, sondern diese mußten von außen herangebracht werden (vgl. Bild 15). Die Platten hatten die gleichen Abmessungen wie die der Kopplungskondensatoren. Die Anordnung von Bild 15 gestattete es, die Felder bequem senkrecht zueinander einzustellen. Die Empfindlichkeit der Röhre ließ eine Beobachtung von 40—700 Volt zu.

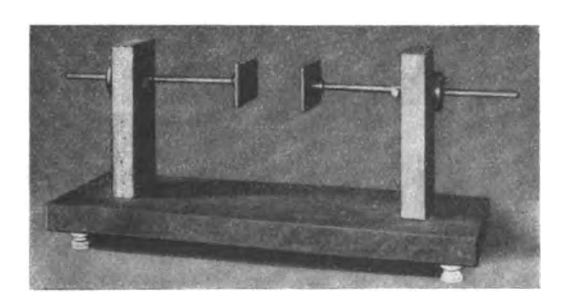
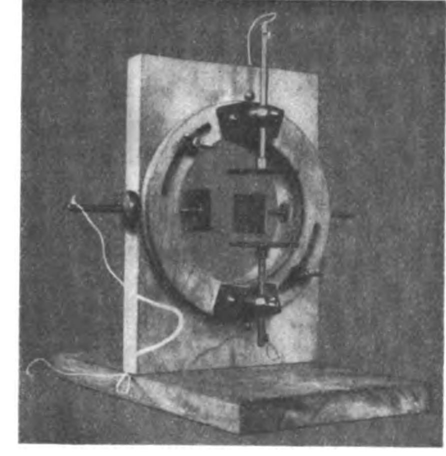



Bild 14. Kopplungskondensator.


Bild 15. Ablenkungselektroden der Braunschen Röhre.

Die Verbindung mit der Quecksilberrotationspumpe läßt aber Quecksilberdampf in die Röhre gelangen, und dieser amalgamiert allmählich die Aluminiumkathode, die in diesem Zustande sprüht und ein Wandern des Kathodenstrahls hervorruft. Ein sicheres Beobachten wird durch diesen Zustand unmöglich. Die Röhre mußte aufgeschnitten, die Kathode poliert bzw. erneuert werden. Die Aluminiumkathode wurde schließlich durch eine eiserne Kathode ersetzt. Die Elektrode hat sich gut bewährt. Störungen durch die schnellere Zerstäubung wurden nicht beobachtet.

Kleinere Spannungen als 40 Volt wurden mit einer Glühkathodenröhre mit Wehneltkathode der Firma Gundelach beobachtet. Die Empfindlichkeit der Röhre

betrug 1 Volt. Ein unangenehmer Nachteil stellte sich bei den Spannungsmessungen heraus. Das glühende Platinblech sandte Licht durch die Öffnung der Anode und erhellte den Schirm. Durch Ausprobieren der passenden Glühstärke konnte die Spannung mit dem Spannungsmesser (siehe unten) festgestellt werden.

c) Methode I.

Zum Nachweis der räumlichen Verteilung von Strom und Spannung längs der Spule wurde diese auf einem mit verstellbarer Platte versehenen Dreifuß senkrecht aufgestellt. Hier sind die Symmetrieverhältnisse nicht aufrecht zu erhalten, doch konnte für eine bestimmte Lage der Spule wiederholt die gleichen Werte für die Eigenschwingungen gemessen werden. Horizontal wurde eine ausgepumpte Braunsche Röhre ohne irgendwelche Elektroden in geeigneter Höhe an eine Spulenkante gebracht (vgl. Bild 16). Abgestimmt wurde für die Eigenschwingungen erster Art an einem Spulenende, in der Mitte für die zweiter Art.

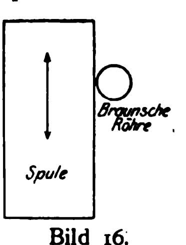


Bild 16.

Bei der Aufnahme der Spannungsverteilung längs der Spule wurde parallel zur Spulenachse ein Glasstab mit Skala angebracht, auf dem ein kleiner Glaszylinder glitt, der den Probekondensator trug. Bei langen Spulen ist auf richtige Lage der Litze zu achten, hier werden sonst große Abweichungen erhalten. Je größer die Spulenkapazität ist, desto mehr treten die Veränderungen, die durch die Litze geschaffen werden, zurück. Bild 17 zeigt die Versuchsanordnung.

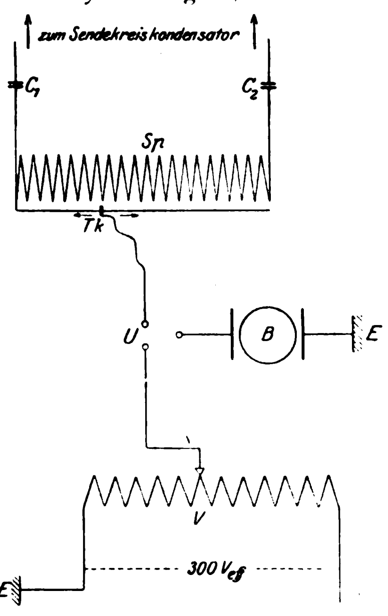


Bild 17.

C_1 u. C_2 = Kopplungskondensatoren,
Sp = untersuchte Spule,
Tk = Tastkondensator,
U = Umschalter,
B = Braunsche Röhre,
V = Vergleichsspannung zur Eichung,
E = Erde.

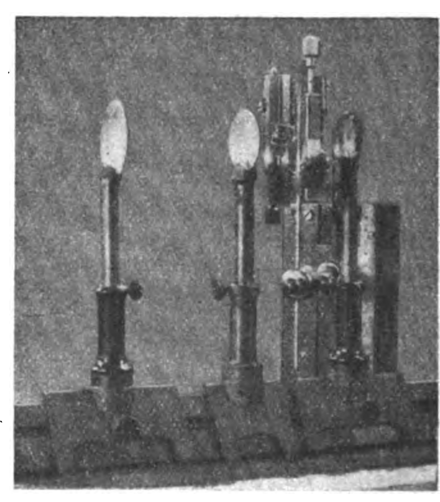


Bild 18.
Spannungsmesser.

Die Spannung durch Anzapfen direkt zu messen, scheiterte daran, daß durch Veränderung des Anzapfdrahtes zu grobe Verstimmungen eintraten. Selbst das Anlegen einer gleich großen Kapazität wie die des Braunschen Röhrenkondensators an symmetrischen Stellen der Spule befriedigte nicht.

Die vertikalen Ablenkungselektroden wurden bei dieser Versuchsanordnung benutzt. Die obere Platte stand mit dem Umschalter in Verbindung, die untere mit der Erde.

d) Spannungsmesser.

Zur Bestimmung der Größe des Ablenkungsstreifens wurde ein behelfsmäßiges Fernrohr als das geeignetste Hilfsmittel gefunden. Die Größe dieses Streifens wurde durch Drahtbügel, die mittels Millimeterschrauben verstellbar waren, eingestellt. Die Bügel befanden sich in der Bildebene des Fernrohrs. Verzeichnungen, die durch die Form der Röhrenwandungen entstehen, fallen heraus, da es sich um eine Nullmethode handelt. Bild 18 zeigt den Spannungsmesser[1]).

Die Vergleichungsspannung lieferte eine 500-Periodenmaschine.

e) Bau der Spulen.

Die untersuchten Spulen waren auf Glaszylinder[2]) gewickelt, auf die 8 Hartholzleisten geleimt waren. Die Leisten hatten eine Höhe von 0,9 oder 1 cm. Sie trugen die Windungen. Der Draht lag außer den 8 Auflagepunkten völlig in der Luft. Es gelangte blanker, baumwoll- und seidenisolierter Kupferdraht zur Verwendung. Beim Wickeln wurde auf gleichmäßigen Zug und gleichmäßige Ganghöhe geachtet. Die Lagen wurden mit einer Schellacklösung bestrichen, um einer Veränderung vorzubeugen. Bei mehrlagigen Spulen diente zugeschnittener Preßspan (0,2 mm stark) als Trennungsschicht der einzelnen Lagen.

III. Gang der Messung.

Die Spule wurde in der beschriebenen Weise angeregt und zunächst mit der Kreuzschaltung nach den Eigenschwingungen erster Art abgesucht. Gewöhnlich sind die zweiter Art nicht so zu erhalten. Bei manchen Spulen zeigte sich bei der Grundschwingung letzterer Art eine Verzerrung der Ablenkung (gleiche Ladung an den Spulenenden Bild 7 und 9).

Spule und Sender bilden zwei gekoppelte Systeme. Bei zu fester Kopplung ist der Phasendurchgang durch 90^0 nicht einstellbar; denn die Ellipse springt[3]). Die Kopplung wurde in dem Falle so lose gemacht, daß ein kontinuierlicher Phasendurchgang beobachtet werden konnte. Eingestellt wurde auf Symmetrie der entstehenden Figur. Die Größe der Eigenschwingung wurde mit einem von der Technichen Reichsanstalt geeichten Wellenmesser festgestellt. Die Grundschwingung der einlagigen Spulen konnte ohne weiteres bestimmt werden, die der zweilagigen nicht, weil der Wellenmesser für die zu diesen Spulen gehörigen Grundwellen nicht ausreichte (Tabelle XIII). Es wurde daher in der Weise verfahren, daß unter Zuhilfenahme eines zweiten kleinen Senders Lissajousche Bilder erzeugt wurden. Die Welle des kleinen Senders konnte dann gemessen werden. Sie wurde mit der entsprechenden Verhältniszahl multipliziert.

Die Spule wurde dann in der Winkelschaltung untersucht. Abgestimmt wurde auf maximalen Ausschlag der betreffenden Resultante. Waren die Symmetrieverhältnisse gewahrt, so erschien nur in der Nähe der Resonanzstellen bei einer Kopplung $c' > 1,5$ cm die zugeordnete Resultante. Sonst blieb der Kathodenstrahl unverändert. Zu feste Kopplung verrät sich auch hier durch ein Springen der Resultante. War die Kopplung fest, ohne daß Ziehen eintrat, so zeigten die Resultanten der Eigenschwingungen zweiter Art elliptische Form. Durch Kurzschließen der Spule verblieb nur die dieser Eigenschwingung zukommende Ablenkung, die elliptische Form verschwand und alle Eigenschwingungen erster Art verschwanden.

[1]) Die Einzelteile zu dem Spannungsmesser sind von der Firma C. Zeiß entgegenkommenderweise zur Verfügung gestellt worden.

[2]) Die verwandten Glaszylinder wurden in dankenswerter Weise von Schott u. Gen., Jena, für die Untersuchungen geliehen.

[3]) M. Wien, Ann. d. Physik 61, 1897, S. 151. — Vogel, Ann. d. Physik 4. Folge, 62, 1920, S. 248 — Glage und Edler, Arch. f. Elektrotech. IX. 1920, S. 20 u. a.

Unsymmetrien im Aufbau machten sich durch eine dauernde Ablenkung in der Richtung bemerkbar, die den Eigenschwingungen zweiter Art zukam. Durch Zuschalten einer kleinen Kapazität in eine der Zuleitungen oder durch Verändern der Rückkopplung ließ sich diese beseitigen. Bei mehrlagigen Spulen trat dies häufiger auf, weil hier die Kopplungskapazität gewöhnlich c' gleich 0,5 cm betrug.

Daß die als Grundschwingung angenommene Welle auch wirklich diese war, ließ sich für einlagige Spulen durch die Gothesche Methode sowie durch Abtasten des elektrischen Feldes mit dem Probekondensator sowie durch Rechnung[1]), wenigstens der Größenordnung nach kontrollieren. Die zwei- und dreilagigen Spulen boten dadurch eine Handhabe, daß sie senkrecht an der Braunschen Röhre vorbeibewegt wurden. Bei den Flachspulen blieb nichts anderes übrig, als kontinuierlich zu großen Wellen überzugehen.

Die Dämpfung der Spulen wurde nach der Bjerknesschen Resonanzmethode bestimmt.

IV. Eigenschwingungen einlagiger Spulen.

a) In Luft.

Die Art der gewählten Anregung der Spulen (symmetrisch-kapazitiv) ließ erwarten, daß eine Vergrößerung der Wellenlänge eintreten müßte. Um diese Verschiebung des Spektrums möglichst klein zu halten, wurden die Kopplungskondensatoren und die Ablenkungselektroden der Braunschen Röhre möglichst klein gewählt. Es wurden Spulen verschiedener Form untersucht und bei allen die gleichen Feststellungen gefunden. Mitgeteilt sei die Meßreihe einer langen und einer kurzen Spule. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle I für die lange Spule zusammengestellt. Zum Vergleich wurde die Spule bei einseitiger kapazitiver Anregung mit der Probespule nach Gothe untersucht. Die angegebenen Werte sind die Mittel von 5—6 Meßreihen unter den gleichen Versuchsbedingungen. Die Abweichung betrug 1—2%.

Die Spulenmaße sind folgend:

Aufgewundene Drahtlänge	$L = 359$ m	Spulenlänge	$2l = 46,8$ cm
Windungszahl	$n = 580$	Ganghöhe	$g = 0,8$ mm
Länge einer Windung	$2\pi R = 62$ cm	Drahtdurchmesser	$2r = 0,3$ „
Mittlerer Spulendurchmesser	$2R = 19,75$ cm.		

Die Spule war aus blankem Draht gewickelt.

Tabelle I.

	Einseitige kapazitive Anregung nach Gothe 2,75 m Draht		Symmetrische Anregung Kreuz- | Winkel- Schaltung c' = 4			Bei Kurzschluß erhalten + nicht —
	λ	ɓ	λ	λ	ɓ	
λ 1	857	0,015	1020	1020	0,0162	—
λ 2	388	0,016	404	404	0,0167	+
λ 3	265,5	—	270	270	—	—
λ 4	204,3	—	204,5	205	—	+
λ 5	163	—	165	164,5	—	—
λ 6	137,5	—	137	137	—	+
λ 7	120	—	120	120	—	—
λ 8	103,5	—	103,5	103,5	—	+
λ 9	91	—	91	91	—	—
λ 10	82	—	—	82	—	+
λ 11	74	—	74	74	--	—

[1]) Vgl. Gothe.

Wie aus der Tabelle II ersichtlich, ist für die Grundschwingung der Einfluß der Kopplungskapazitäten am stärksten. Mit zunehmender Ordnungszahl der Eigenschwingungen wird der Einfluß geringer, und zwar bei den Eigenschwingungen zweiter Art im stärkerem Maße als bei denen ersterer. Über den Einfluß der Kopplungskapazitäten wurden folgende Fessstellungen gemacht:

Tabelle II.

	Symmetrische Anregung			Winkelschaltung		
c' = cm	1	2	4	6	8	10
λ 1	1026	1023	1020	1018,5	1017	1017
λ 2	406	405	404	402	401	401
λ 3	269	268,5	267	266	266	265
λ 4	206	205	205	205	205	205
λ 5	166,5	166	164,5	164	164	—
λ 6	137,5	137,5	137	137	—	—
λ 7	120	120	120	120	—	—

Die Bilder 4 und 5 zeigen die räumliche Verteilung von Strom und Spannung für die Grundschwingung und Oberschwingung dieser Spule. In Bild 19 und 20 sind für λ_4 und λ_5 die Verhältnisse wiedergegeben. Auch hier verschwinden die Ellipsen bei Kurzschluß der Spule für alle Eigenschwingungen erster Art, während die zweiter Art unverändert bestehen blieben Bis λ_{11} ließen sich die Eigenwellen auf diese Weise erkennen.

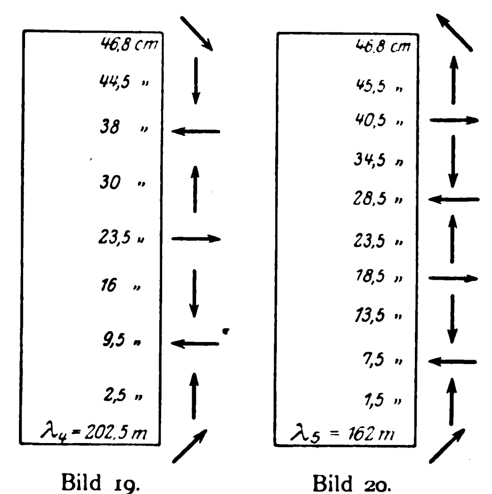


Bild 19. Bild 20.
Räumliche Verteilung von Strom und Spannung bei einer einlagigen Spule. Der Pfeil deutet die große Achse der entstandenen Ellipse an.

Daß die Werte der angegebenen Wellenlängen der Bilder 19 und 20 von denen abweichen, die durch die Winkelschaltung ermittelt wurden, erklärt sich dadurch, daß die Kapazität der Röhrenelektroden in Fortfall gekommen ist.

Die Bilder 6 und 7 beziehen sich auf die Grundschwingung und die erste Oberwelle dieser Spule. Die Abszisse ist die Spulenlänge, die Ordinaten die gemessenen Werte der Spannung. Der Probekondensator hatte eine Entfernung von 2 mm von der Spulenkante, c' = 2 cm.

In Tabelle III sind die Werte einer kurzen, weiten Spule enthalten. Die Versuchsbedingungen waren die gleichen wie bei der langen Spule. Die Daten sind folgende:

$L = 201$ m $2\,l = 7{,}45$ cm
$n = 175$ $g = 0{,}433$ mm
$2\pi R = 116{,}9$ cm $2r = 0{,}25$ mm
$2R = 37{,}25$ cm.

Die Bilder 8 und 9 geben den Potentialverlauf für λ_1 und λ_2 der Spule wieder. Der Abstand des Probekondensators war wieder 0,2 cm, c' = 1,5 cm.

Tabelle III.

	Berechnet nach Lenz	Einseitige kapazitive Anregung nach Gothe 2,75 m Draht		Symmetrische Anregung			Bei Kurzschluß erhalten + nicht —
				Kreuz-Schaltung	Winkel- c' = 3,5		
	λ	λ	b	λ	λ	b	
λ 1	723	884	0,0387	1045	1045	0,040	—
λ 2	263	286,5	0,051	—	289	0,052	+
λ 3	165	175,5	—	177	176,5	—	—
λ 4	114	125,5	—	—	125	—	+
λ 5	90	101	—	101	101	-	—

Der Einfluß der Kopplungskapazitäten geht aus Tabelle IV hervor.

Tabelle IV.

	Symmetrische Anregung			Winkelschaltung		
c' = cm	1	2,5	4	6	8	10
λ 1	1049	1045	1042	1040	1039	1039
λ 2	289,5	289	289	289	—	—
λ 3	177	176,5	176	—	—	—
λ 4	125	125	125	—	—	—
λ 5	101	101	—	—	—	—

Die gleichen Feststellungen, wie die angegebenen wurden bei weiteren einlagigen Spulen gemacht. Die Spulenform, die aufgefundene Drahtlänge und die Ganghöhe änderten nichts. Neue Gesichtspunkte zeigten sich nicht.

b) Mit erhöhter Kapazität gegen Erde.

Die Erdkapazität der Spulen wurde dadurch erhöht, daß in sie Kupferblechzylinder gebracht wurden, die geschlitzt waren, um die Wirbelstrombildung zu unterdrücken. Der mittlere Abstand von der Lage betrug 1,2 cm. Die erhaltenen Werte sind für die lange Spule (Tabelle I) in Tabelle V, für die kurze (Tabelle III) in

Tabelle V.

c' = 4 cm Winkelschaltung Symmetrische Anregung

	Ohne Erdkapazität 1		Offner Kupferzylinder ungeerdet 2		Offner Kupferzylinder geerdet 3		Überbrückter Kupferzylinder ungeerdet 4		Überbrückter Kupferzylinder geerdet 5	
	λ	b	λ	b	λ	b	λ	b	λ	b
λ 1	1020	0,0162	1710	0,048	1710	0,0486	1005	0,057	1005	0,0573
λ 2	404	0,0167	610	0,026	636	0,0254	450	0,0386	465	0,038
λ 3	270	—	365	—	365	—	303	—	303	—
λ 4	205	—	237	—	246,5	—	214	—	219,5	—
λ 5	164,5	—	187	—	187	—	172	—	172	—
λ 6	137	—	148,5	—	152	—	139	—	142	—
λ 7	120	—	129,5	—	129,5	—	122	—	122	—
λ 8	103,5	—	110	—	112	—	104	—	106,5	—
λ 9	91	—	99	—	99	—	91	—	91	—
λ 10	82	—	82	—	83	—	82	—	82	—
λ 11	74	—	74	—	74	—	74	—	74	—

Tabelle VI zusammengestellt. Die Kupferzylinder wurden geerdet, die Schlitze durch Kupferstreifen überbrückt, die mit Schrauben an die Zylinder befestigt wurden. Der Einfluß ist aus Tabelle V und VI ersichtlich. Auffallend ist das Anwachsen der Eigenwellen zweiter Art bei Erdung. Die zweilagigen Spulen zeigten die gleiche Erscheinung. Die Verstimmung war an den Ablenkungsstreifen deutlich erkennbar beim An- bzw. Ablegen der Erdleitung.

Tabelle VI.

c' = 2,5 cm Winkelschaltung Symmetrische Anregung

	Ohne Erdkapazität		Offner Kupferzylinder				Überbrückter Kupferzylinder			
			ungeerdet		geerdet		ungeerdet		geerdet	
	1		2		3		4		5	
	λ	b	λ	b	λ	b	λ	b	λ	b
λ 1	1045	0,040	1080	0,0567	1080	0,0565	812	0,062	812	0,063
λ 2	289	0,052	276,5	0,0602	285	0,0592	272	0,0689	283	0,0684
λ 3	176,5		178	—	178	—	175	—	175	—
λ 4	125	—	125	—	128	—	122	—	125	—
λ 5	101	—	102		102		99	—	99	—

c) Zusammenfassung.

Die doppelseitige kapazitive Anregung sowie die Braunschen Röhrenelektroden ziehen eine Vergrößerung der Eigenwellen nach sich gegenüber der Gotheschen einseitigen kapazitiven Anregung mit 2,75 m Draht (Tabelle I und III). Für die Grundwelle erster Art ist die Verschiebung zu langen Wellen am größten (19% für Spule Tabelle I, 18,2% für Spule Tabelle III). Bei der Grundwelle zweiter Art macht die Vergrößerung nur 4% für die Spule Tabelle I, 1,68% für die Spule Tabelle III aus. Mit wachsender Ordnungszahl nähern sich die durch doppelseitige, kapazitive Anregung gefundenen Werte mit der Braunschen Röhre denen, die durch einseitige kapazitive Anregung erlangten (Probespule). Die Identität der unter den beiden verschiedenen Versuchsbedingungen erlangten Eigenschwingungen tritt bei den Eigenwellen zweiter Art früher ein (vgl. Tabelle I und III) als bei den Oberwellen erster Art.

Die Veränderung der Kopplungskondensatoren c' (Bild 13) macht sich bei der Grundwelle am deutlichsten bemerkbar (Tabelle II und IV). Bei den Oberwellen geht der Einfluß mit Größerwerden der Ordnungszahl zurück (Tabelle II und IV).

Für die Grundschwingung beider Arten wurden bei doppelseitiger kapazitiver Anregung längs der Spule eine Potentialverteilung gefunden, die in der Spulenmitte für die Grundwelle erster Art ein Minimum (Bild 6 und 8), dagegen ein Maximum für die Grundwelle zweiter Art aufweist (Bild 7 und 9).

Die räumliche Verteilung von Strom und Spannung läßt bei unmittelbarer Beeinflußung auf den Kathodenstrahl (s. Versuchsanordnung Teil II) bei einer Vorbeibewegung der Spule Ellipsen entstehen (Bild 4 und 5), die für die beiden Arten von Eigenschwingungen charakteristisch sind.

Die Erhöhung der Kapazität der Spule gegen Erde (ungeerdeter, geschlitzter Kupferzylinder) verschiebt den unteren Teil des Spektrums zu größeren Wellen. Der Einfluß geht bei den höheren Oberwellen zurück (s. Tabelle V und VI). Die Erdung des Kupferzylinders läßt die Eigenwellen erster Art unbeeinflußt, während die zweiter Art eine weitere Vergrößerung erfahren (Kapazitätsempfindlichkeit s. Tabelle V und VI, Spalte 3).

Wirbelströme (geschlossener Kupferzylinder) verursachen eine Verkleinerung der Eigenwellen (Tabelle V und VI, Spalte 4) gegenüber dem offenen Kupferzylinder (Tabelle V und VI, Spalte 2). Bei Erdung des Kupferzylinders zeigen auch hier die Eigenwellen zweiter Art eine Vergrößerung (Tabelle V und VI, Spalte 5). Bei der Spule (Tabelle VI) macht sich bei λ_2 bereits der Einfluß der Wirbelströme bei offenem Kupferzylinder bemerkbar (Tabelle VI, Spalte 2 und 3).

Die einlagigen Spulen sind für beide Arten von Eigenschwingung sehr empfindlich gegen Kapazität und gegen Erde (äußeres elektrisches Feld).

V. Eigenschwingungen zweilagiger Spulen.

1. Gleichsinnig gewickelt.

a) In Luft.

Durch das Hinzutreten einer weiteren Lage einer einlagigen Spule wird die Kapazität einer solchen Spule (zweilagigen Spule) beträchtlich gesteigert werden und damit eine Vergrößerung der Eigenwellen eintreten. Um diese Steigerung der Kapazität nicht gleich zu groß zu machen, wurde zunächst eine Spule gebaut, bei der die zweite Lage nicht fest auf der ersten lag, sondern einen Luftzwischenraum besaß. Die Holzleisten, die die unterste Lage (Index 1) trugen, wurden verstärkt und mit Nuten versehen. In sie wurden passende Leisten geschoben, die in die Nuten der oberen Leisten griffen. Die untere Lage wurde nach Fertigstellung auf ihre Eigenschwingungen hin untersucht, die in Tabelle VII wiedergegeben sind. Die Spulenmaße für die untere Lage sind folgende:

$L_1 = 194{,}6$ m $2\,l_1 = 30{,}75$ cm
$n_1 = 334$ $g_1 = 0{,}8$ mm
$2\pi R_1 = 58{,}0$ cm $2\,r_1 = 0{,}6$ „
$2\,R_1 = 18{,}6$ „

Tabelle VII.

Symmetrische Anregung $c' = 2$ cm

	Winkelschaltung λ
λ 1	675
λ 2	245
λ 3	168
λ 4	128
λ 5	103,5
λ 6	81
λ 7	70

Danach wurden die Leisten, die die zweite Lage (Index 2) tragen sollten, aufgeleimt. Letztere wurden im gleichen Drehungssinn der ersten gewickelt. Der mittlere Abstand von der Lage 1 war 0,9 cm. Die Spulenmaße sind wie folgt:

$L_2 = 207{,}2$ m $2\,l_2 = 30{,}75$ cm
$n_2 = 325$ $g_2 = 0{,}85$ mm
$2\pi R_2 = 64{,}2$ cm $2\,r_2 = 0{,}5$ „
$2\,R_2 = 20{,}56$ „

Die Kapazität der beiden Lagen gegeneinander wurde in der Brücke zu 225 cm bestimmt.

Die beiden Spulen wurden an einem Ende verbunden, und die Spule in der üblichen Weise angeregt. Die erhaltenen Eigenschwingungen sind in der Tabelle VIII zusammengestellt. Die Art der gewählten Anregung wird hier die Eigenschwingungen

nicht in dem Maße beeinflußen wie bei einlagigen Spulen, da die Kopplungskapazität klein gegen die Spulenkapazität ist. Wurden die Abstände der Kopplungskondensatoren von 1 cm auf 10 cm erweitert, so änderte sich nur λ_2 merklich (1,6%). Die übrigen Eigenwellen blieben unverändert.

Die Spule zeigt ein ähnliches Frequenzspektrum wie das einer einlagigen. Bei der Winkelschaltung traten die den Eigenwellen zukommenden Resultanten deutlich hervor.

Tabelle VIII.
c' = 1 cm. Symmetrische Anregung.

	Kreuz- Schaltung λ	Winkel- Schaltung λ	Bei Kurzschluß erhalten + nicht —
λ 1	880	880	—
λ 2	536	536	+
λ 3	294	294	—
λ 4	—	246,5	+
λ 5	176	176	—
λ 6	—	169	+
λ 7	128,5	128,5	—
λ 8	—	—	
λ 9	101	101	—
λ 11	79	79	—
λ 13	66	66	—
λ 15	60	60	—

Die Untersuchungen von Gothe und die vorstehenden Ausführungen (s. Einleitung und Untersuchungsmethoden) haben den Verlauf von Strom und Spannung längs der Spule bei den verschiedenen Eigenschwingungen geklärt. Für die Grundschwingung erster Art hat die einlagige Spule in der Mitte einen Strombauch (s. Bild 3), einen Knoten dagegen für die Grundschwingung zweiter Art. Die vor-

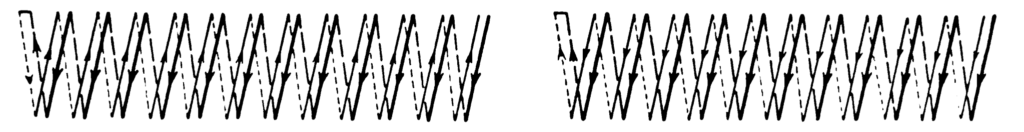


Bild 21. Bild 22.
Gleichsinnig gewickelte Spule.

liegende zweilagige Spule besteht nun aus zwei einlagigen, gleichsinnig gewickelten Spulen, die so ineinander geschoben sind, daß der Anfang der Spulen bzw. die Enden übereinander liegen. Die Spulenmitte ist die Verbindungsstelle der beiden Lagen.

Für die Grundschwingung kann in erster Annäherung angenommen werden, daß gegenüberliegende Windungen der zweilagigen Spule gleichgerichteten Strom führen (vgl. Bild 21). Die entstehenden magnetischen Felder arbeiten sich im vorliegenden Fall entgegen und heben sich auf, genau so, wie es bei bifilargewickelten Drähten der Fall ist. Deshalb fällt auch die Grundwelle im Verhältnis zu der gesamten aufgewickelten Drahtlänge (399,9 m) so klein aus. Würde der Draht zu einer einlagigen Spule auf einen Spulenkörper verarbeitet, der den gleichen Durchmesser hätte, so würde eine Grundwelle von über 1000 m vorliegen; denn die An-

regungskapazitäten verursachen eine Vergrößerung (s. Tabelle I und III). Die gemessene Grundwelle von 880 m erhält diese Größe durch die Kapazität der beiden Lagen, der Windungskapazität jeder einzelnen Lage und der Rest-Selbstinduktion.

Bei der Grundschwingung zweiter Art sind die Verhältnisse umgekehrt. Die äußere Spule führt entgegengesetzt gerichteten Strom wie die innere, an der Verbindungsstelle (Spulenmitte) ist er Null in der Annahme, daß symmetrische Verteilung vorliegt. Die magnetischen Felder werden sich hier also verstärken (vgl. Bild 22) und diese Welle größer ausfallen lassen (536 m) als die einlagige aus der verarbeiteten Drahtlänge (415 m). Daß die Art der gewählten Anregung keine derartige Erhöhung der Grundwelle zweiter Art hervorrufen kann, geht aus den Tabellen I und III hervor.

Der Potentialverlauf bei der Grundschwingung einer einlagigen Spule ist derart, daß die beiden Spulenhälften entgegengesetzte Ladung führen (vgl. Bild 6 and 8). Für die zweilagige Spule wird in erster Annäherung jede Lage die entgegengesetzte Ladung der anderen haben; an der Verbindungsstelle (Spulenmitte) liegt der Knoten. Das elektrische Feld wird also zwischen den Lagen stärker ausgebildet sein als außen. Anders bei der Grundschwingung zweiter Art. In der Spulenmitte ist bei der einlagigen Spule ein Spannungsbauch vorhanden (s. Bild 7 und 9). Der Spannungsbauch wird bei der zweilagigen Spule an der Verbindungsstelle zu suchen sein. In der Annahme, daß symmetrische Verteilung des Potentials vorliegt, besteht keine Spannung zwischen gegenüberliegenden Windungen der Lagen. Das elektrische Feld ist also zwischen den Lagen Null und hat außen seinen Sitz. Die Eigenschwingung muß demnach sehr empfindlich gegen Kapazität gegen Erde sein. Dies wurde auch bestätigt gefunden. Lageveränderungen von Körpern in der Nähe der Spule riefen sofort bei diesen Eigenschwingungen Verstimmungen hervor, dagegen nicht bei denen erster Art.

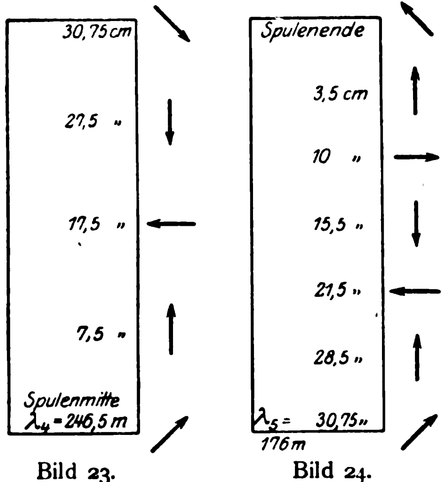


Bild 23. Bild 24.
Räumliche Verteilung von Strom und Spannung bei einer gleichsinnig gewickelten zweilagigen Spule.

Für die Oberschwingungen ergeben sich keine neuen Gesichtspunkte. Die Verhältnisse bleiben genau so, wie sie sich bei den beiden Grundwellen abspielen, nur daß sich die einzelnen Lagen teilen.

Daß sich die äußere Lage einer zweilagigen Spule so verhält wie eine halbe einlagige, konnte mit der Braunschen Röhre sichtbar gemacht werden, indem der Kathodenstrahl dem elektrischen und magnetischen Felde der Spule ausgesetzt wurde. Das Heben bzw. Senken der Spule ließ die Ellipsen in der gleichen Weise erscheinen, wie dies bei den einlagigen Spulen der Fall war, allerdings fehlte die eine Hälfte für die betreffende Eigenschwingung. Abgestimmt wurde bei den Eigenschwingungen erster Art an dem Spulenende, für die zweiter Art geschah dies an der Verbindungsstelle der beiden Lagen (Spulenmitte). Die Bilder 23 und 24 geben schematisch die erhaltenen Ellipsen für λ_4 und λ_5 wieder. Ein Vergleich mit den Bildern 19 und 20, die die gleichen Verhältnisse einer einlagigen Spule veranschaulichen, zeigt, daß die Bilder 23 und 24 dem oberen Teil der Bilder 19 und 20 entsprechen. Durch Kurzschließen der Spulen verschwanden auch hier die Bilder erster Art, die zweiter Art blieben erhalten. Ein Berühren bzw. Erden war für die Eigenwellen erster Art ohne Einfluß. Die Eigenfrequenzen zweiter Art verschwanden. Es werden durch die Erdung andere Verhältnisse geschaffen.

b) Mit erhöhter Kapazität gegen Erde.

Der angenommene Sitz des elektrischen Feldes bei den Eigenschwingungen erster Art vorzugsweise zwischen den Lagen und vorzugsweise außen bei den Eigenschwingungen zweiter Art wurde durch Einführen eines Kupferzylinders in den Spulenkörper bestätigt gefunden. Wie aus den Spalten 2 und 3 der Tabelle IX zu ersehen ist, ruht das Spektrum der Eigenschwingungen erster Art, da die innere Lage den Einfluß der Erdkapazität abschirmt. Die Eigenschwingungen zweiter Art dagegen schieben sich über die erster Art und erfahren durchweg einen Zuwachs, der mit zunehmender Ordnungszahl der Oberschwingungen abnimmt. Die Erdung des Kupferzylinders vergrößert die Eigenschwingungen zweiter Art weiter, eine Beobachtung, die bei einlagigen Spulen bereits zu erkennen war (vgl. Tabelle V und VI). Der Kupferzylinder hatte einen mittleren Abstand von 1,4 cm von der inneren Lage, die Schlitzbreite betrug 2 cm.

Der Einfluß der Wirbelströme auf die Eigenschwingungen wurde dadurch hergestellt, daß der Schlitz des Kupferzylinders überbrückt wurde. Der geschlossene, zusammengeschraubte Zylinder hatte einen mittleren Abstand von 1,4 cm von der inneren Lage.

Die Wirkung der Wirbelströme wird vermutlich die sein, daß die Phase des Spulenstromes geändert wird. Für die Eigenschwingungen erster Art wird durch diese Änderung eine größere Selbstinduktion entstehen, bei denen zweiter Art wird die entgegengesetzte Wirkung eintreten. Wie aus Tabelle IX, Spalte 4, zu ersehen ist, steigen die Eigenwellen erster Art bis λ_7, während die zweiter Art erheblich fallen in bezug auf Spalte 2 der gleichen Tabelle.

Der geerdete, kurzgeschlossene Kupferzylinder vergrößert die Eigenwellen beider Gattungen (Tabelle IX, Spalte 5).

Tabelle IX.

c' = 2 cm. Symmetrische Anregung. **Winkelschaltung.**

	1	2	3	4	5
	Ohne Erdkapazität	Offener Kupferzylinder		Geschlossener Kupferzylinder	
		ungeerdet	geerdet	ungeerdet	geerdet
	λ	λ	λ	λ	λ
λ 1	880	880	879,5	918	950
λ 2	536	910	960	550	581
λ 3	294	294	294	300	310
λ 4	246	319	338	270	277,5
λ 5	176	176	176	182	182,5
λ 6	169	194	196	177,5	177,5
λ 7	128,5	128	128	129,5	129,5
λ 8	—	135	137	110	110
λ 9	101	100	100	101	101
λ 10	—	107	107	—	—
λ 11	79	79	79	79	79
λ 12	—	85	85	—	—
λ 13	66	67	67	—	—
λ 14	—	72,5	72,5	—	—
λ 15	60	60	60	—	—

c) Mit Eisen.

In die Spule wurden Epsteinbündel von 50 cm Länge, 3 cm Breite und 2,5 cm Höhe gebracht. Der Energieverbrauch machte sich besonders bei den Eigenschwingungen zweiter Art geltend. Acht Bündel, die in den Spulenkörper so ein-



gelegt waren, daß jedes die Glaswand berührte, ließen selbst λ_2 nicht mehr erkennen, trotzdem die Kopplung fester gemacht wurde. λ_1 wuchs von 880 auf 925 m. In der Tabelle X ist eine Meßreihe für ein Epsteinbündel wiedergegeben, das in die Spulenachse durch Aufhängen an Hanfschlaufen gebracht wurde.

Tabelle X.
c' = 1 cm. Symmetrische Anregung. Winkelschaltung.

	Ohne Eisen λ	Mit Eisen λ
λ 1	880	903
λ 2	540	590
λ 3	294	300
λ 4	246	256
λ 5	176	180
λ 6	169,5	—
λ 7	128,5	128,5

d) Mit Dielektrikum zwischen den Lagen.

Zwischen den beiden Lagen wurden 8 Pappstreifen von 31 cm Länge und 4 cm Dicke geschoben. In der Tabelle XI sind die Eigenschwingungen der gewöhnlichen Spule mit denen zusammengestellt, die durch das eingebrachte Dielektrikum entstehen. Das Anwachsen der Eigenschwingungen erster Art steht im Einklang mit den Vorstellungen, die über die Verteilung des elektrischen Feldes bei diesen Schwingungszuständen der Spule entwickelt wurden. Dagegen widerspricht die Vergrößerung der Eigenschwingungen zweiter Art den gemachten Voraussetzungen. Das elektrische Feld ist nicht Null zwischen den Lagen. Das Anwachsen der Eigenschwingungen zweiter Art ist aber klein im Verhältnis zu dem, das die Eigenschwingungen erster Art erfahren.

Tabelle XI.
c' = 1 cm. Symmetrische Anregung. Winkelschaltung.

	Dielektrikum	
	ohne λ	mit λ
λ 1	880	978
λ 2	540	557
λ 3	294	325
λ 4	246	252
λ 5	176	193
λ 6	169,5	174
λ 7	128,5	138,5
λ 9	101	110
λ 11	79	85,5
λ 13	66	71
λ 15	60	62

e) Zusammenfassung.

Die gleichsinnig gewickelte, zweilagige Spule zeigt ein ähnliches Spektrum (Tabelle VIII) wie die einlagigen Spulen (Tabelle I und III).

Bei den Eigenschwingungen erster Art arbeiten sich die magnetischen Felder der beiden Lagen entgegen, für die zweiter Art verstärken sie sich.

Der Sitz des elektrischen Feldes ist für die Eigenwellen erster Art innerhalb der Lagen (geringe Kapazitätsempfindlichkeit gegen Erde), für die zweiter Art vorzugsweise außerhalb (große Kapazitätsempfindlichkeit gegen Erde) (siehe Tabelle IX und XI).

Wie bei einlagigen Spulen trat durch die Erdung des eingeschobenen ungeschlitzten Kupferzylinders ein weiteres Anwachsen der Eigenwellen zweiter Art ein (Tabelle IX, Spalte 3). Die Eigenwellen erster Art werden durch den Kupferzylinder (ob geerdet oder nicht) nicht beeinflußt (Tabelle IX, Spalte 1, 2, 3).

Eisen läßt die Eigenwellen beider Klassen anwachsen (Tabelle X).

Die Ellipsen, die bei einer Vorbeibewegung der Spule an einem Kathodenstrahl durch die räumliche Verteilung von Strom und Spannung auf dem Schirm der Braunschen Röhre entstehen, machen annähernd die Hälfte aus (Bild 23 und 24), die eine einlagige Spule für die gleichen Wellen liefert (Bild 19 und 20).

Ein Einfluß der Kopplungskondensatoren wurde nicht festgestellt.

2. Fortlaufend gewickelt.

a) In Luft.

Da das verschiedene Schalten der beiden Lagen das Spektrum nicht in dem Maße veränderte, wie zu erwarten war, wurde die obere Lage abgewickelt und im gleichen Drehungssinn der untersten Lage zurückgewickelt. Die Spulenmaße der neuen Lage sind folgende:

$$L_2 = 194{,}5 \text{ m} \qquad 2\,l_2 = 30{,}75 \text{ cm}$$
$$N_2 = 303 \qquad g_2 = 0{,}85 \text{ mm}$$
$$2\pi R_2 = 64{,}2 \text{ cm} \qquad 2\,r_2 = 0{,}5 \text{ mm}$$
$$2\,R_2 = 20{,}56 \text{ cm.}$$

Die Kapazität der neuen Lage gegen die unterste wurde mit 220 cm bestimmt.

Bei dieser Wicklung und einseitiger Verbindung (Spulenmitte) wird die Spule ein ganz anderes Spektrum liefern müssen. Für die Grundschwingung erster Art muß die entgegengesetzte Wirkung wie bei der früheren Spule eintreten; denn bei angenommener symmetrischer Stromverteilung führen gegenüberliegende Windungen gleichgerichteten, gleichstarken Strom. Die Selbstinduktion wird eine Steigerung erfahren und damit die Grundwelle anwachsen. Für die Oberschwingungen erster Art trifft dies ebenfalls zu.

Die Grundwelle zweiter Art findet bei dieser Spule sehr ungünstige Verhältnisse vor. Da die Spule bei diesem Schwingungszustand in den beiden Lagen entgegengesetzt gerichtete Ströme führt, tritt hier der gleiche Fall ein, der bei der früheren Spule für die Grundwelle erster Art vorgelegen hat. Die entstehenden magnetischen Felder arbeiten einander entgegen, und sie drücken die Selbstinduktion herab. Die Folge davon ist, daß die Grundwelle zweiter Art klein ausfallen muß. Die Grundwelle zweiter Art der vorliegenden Spule hat die Rolle der Grundwelle erster Art der früheren Spule übernommen. In dem verschiedenen Wicklungssinn der oberen Lage ist der Grund zu suchen.

Daß diese Spule kein Spektrum liefern kann, indem auf die Grundwelle erster Art die Grundwelle zweiter Art folgt, ist ersichtlich. Vielmehr werden auf die Grundwelle erster Art mehrere Oberschwingungen dieser Art folgen, dann erst die Grundwelle zweiter Art auftreten. Zwischen der Grundwelle zweiter Art und der nächsten Oberwelle dieser Art werden wieder mehrere Oberwellen erster Art liegen usw. Mit größer werdender Ordnungszahl wird die Anzahl der dazwischen liegenden Eigenwellen erster Art kleiner werden.

In der Tabelle XII sind in der Spalte 1 und 2 die gefundenen Eigenwellen eingetragen. Zur Kontrolle wurde die Spule vertikal an der Braunschen Röhre vorbei-



bewegt. Es traten die gleichen Erscheinungen auf, wie sie früher beobachtet worden waren. Bild 25 und 26 geben schematisch die Ellipsen wieder für λ_4 und λ_5, sie entsprechen den Bildern 23 und 24 für die gleichen Oberwellen der früheren Spule.

Die Eigenwellen zweiter Art zeigten bei der Winkelschaltung viel größere Ablenkungen als die oberhalb bzw. unterhalb liegenden Eigenschwingungen erster Art. Gleichfalls waren die entstehenden Ellipsen bedeutend besser ausgebildet als die umgebenden Eigenwellen erster Art; diese verschwanden bei Kurzschluß, während die zweiter Art erhalten blieben und die Drehung genau so ausführten, wie die nicht kurzgeschlossene Spule.

Ein Einfluß der Kopplungskapazitäten auf die Eigenwellen wurde nicht festgestellt.

Die Bilder 27 und 28 stellen den gemessenen Potentialverlauf der Grundwelle erster Art und den zweiter Art dar. Auch diese Kurven machen die Hälfte der Bilder 6, 7, 8 und 9 aus.

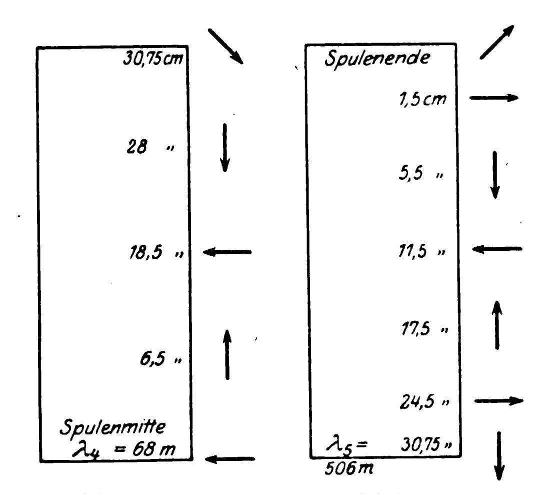


Bild 25. Bild 26.
Räumliche Verteilung von Strom und Spannung bei einer fortlaufend gewickelten zweilagigen Spule.

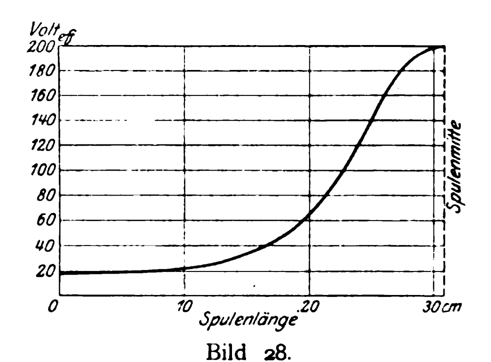


Bild 27. Spannungsverteilung einer fortlaufend gewickelten zweilagigen Spule für λ_1.

Bild 28. Spannungsverteilung einer fortlaufend gewickelten zweilagigen Spule für λ_2.

b) Mit erhöhter Kapazität gegen Erde.

Die umwickelte Spule wurde ebenfalls auf ihr Verhalten hinsichtlich der Kapazität gegen Erde untersucht. Der eingeführte, geschlitzte Kupferzylinder muß wegen der in ihm auftretenden Wirbelströme bei den Eigenfrequenzen erster Art (starkes äußeres Magnetfeld) die Selbstinduktion der Spule herabdrücken. Der Einfluß der Kapazität des Kupferzylinders ist gering, weil das elektrische Feld zwischen den Lagen stärker ausgebildet ist als außen. Die Erdung beeinflußte nur die Grundwelle.

Auf die Eigenschwingungen zweiter Art wird die Kapazität des Kupferzylinders vergrößernd wirken; denn zwischen den Lagen ist das elektrische Feld nur sehr schwach, außen aber stark ausgebildet. Das magnetische Feld hingegen ist für diese Art von Eigenschwingungen außen schwach, das Herabdrücken der Selbstinduktion durch die Wirbelstrombildung ist daher nicht erheblich und kann durch die Vergrößerung der Spulenkapazität nicht kompensiert werden, so daß ein Anwachsen der Eigenwellen statt hat. Die Erdung wird hier ein weiteres Anwachsen bedingen.

In den Spalten 3 und 4 der Tabelle XII sind die gefundenen Werte zusammengestellt. Die Eigenwellen zweiter Art treten an einer ganz anderen Stelle des Spektrums auf. Durch langsames Einführen des Kupferzylinders und gleichzeitiger Verkleinerung der Frequenz des Senders konnte die Verschiebung verfolgt werden.

Der überbrückte Kupferzylinder wird die Wirbelstrombildung bei beiden Arten von Eigenschwingung begünstigen. Die Eigenschwingungen erster Art werden stärker beeinflußt werden als die zweiter Art. Die Werte der Spalte 5 (Tabelle XII) lassen dies deutlich erkennen und stützen die oben entwickelte Auffassung über die Verteilung von den magnetischen und elektrischen Feldern bei den verschiedenen Arten von Eigenschwingungen. Auch hier beeinflußte die Erdung bei den Eigenfrequenzen erster Art nur die Grundschwingung. Die Eigenwellen zweiter Art erfahren wie bei dem ungeschlitzten, geerdeten Kupferzylinder eine Vergrößerung (Tabelle XII, Spalte 6).

c) Mit Eisen.

Über den Einfluß, den ein Epsteinbündel auf die Eigenwellen ausübt, geben die Werte der Spalte 7 (Tabelle XII) Aufschluß. Alle Eigenschwingungen erfahren ein Anwachsen, da die Anwesenheit des Eisens die Selbstinduktion der Spule vergrößert. Nach den Ergebnissen, die aus den Versuchen über erhöhte Kapazität gegen Erde folgen, wird außer der Erhöhung der Selbstinduktion der Spule auch die kapazitive Wirkung des Bündels zur Vergrößerung einen Beitrag liefern, der für die Eigenwellen zweiter Art größer ist als der bei denen erster Art. Die Aufhängung des Epsteinbündels war genau so wie bei der früheren zweilagigen Spule.

d) Mit Dielektrikum.

Spalte 8 (Tabelle XII) gibt die Wellenlängen wieder, die durch Einführen der 8 Pappstreifen (gleiche Abmessungen wie früher) in den Zwischenraum der beiden Lagen entstehen. Bei dieser Spule ist die Zunahme der Grundwelle zweiter Art klein. In bezug auf die frühere Spule (vgl. Tabelle XI) weist λ_4 keinen Zuwachs mehr auf. Die gemachte Voraussetzung, daß das elektrische Feld zwischen den Lagen Null sein soll, wird hier besser erfüllt. Die Eigenwellen erster Art erfahren duchweg eine Zunahme, was mit der entwickelten Auffassung über das elektrische Feld in Einklang steht.

e) Spule über Kondensatoren kurz geschlossen.

Die letzten beiden Spalten (Tabelle XII) enthalten die Werte der Eigenschwingungen, wenn Kondensatoren an die Spule geschaltet worden. Nur die Eigenschwingungen erster Art werden durch die angehängten Kondensatoren beeinflußt, während die zweiter Art unverändert bleiben.

Um die Verhältnisse der gleichsinnig gewickelten Spule wieder zu bekommen, wurde das eine Ende der oberen Lage mit dem anderen Ende der inneren Lage auf der entgegengesetzten Seite verbunden. Es traten die früheren Verhältnisse nicht wieder auf. Der Wicklungssinn und der Verbindungsdraht werden als Ursache für das Nichtzustandekommen anzusprechen sein.

f) Weitere zweilagige Spulen.

Die gleichen Untersuchungen wurden an 6 weiteren zweilagigen Spulen ausgeführt. Sie waren alle so gewickelt, daß sich bei dem Zusammenschalten der beiden Lagen an einer Seite bei Gleichstrom die magnetischen Felder verstärkten. Die Lagen wurden durch eine Preßspanschicht von 0,2 mm getrennt. Ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber der umgewickelten Spule zeigte sich nicht. Durch die Verkleinerung des Abstandes der beiden Lagen und die Gegenwart des Preßspans wächst die Kapazität der Lagen gegeneinander. Außerdem erfährt die Selbstinduktion eine Zunahme. Die Folge davon ist, daß die Grundwelle erster Art große Werte annimmt. Die Grundwelle zweiter Art erhält durch den Spulenbau eine weitere Verkleinerung, da bei kleinem Lagenabstand das Herabdrücken der Selbstinduktion bei entgegengesetzt fließenden Strömen in den Lagen stärker ist. Damit wird sich die Zahl der Oberschwingungen, die zwischen den beiden Grundschwingungen liegen,



vermehren. Die Grundwelle zweiter Art konnte bei einem Teil der untersuchten Spulen nachgewiesen werden (Abhängigkeit von der aufgewundenen Drahtlänge), dagegen weitere Oberschwingungen bei Spannungsresonanz nicht. Bei manchen Spulen wurde die Grundwelle zweiter Art durch Einführung eines Kupferzylinders erst nachweisbar.

Die Ablenkungen an der Braunschen Röhre sind klein im Verhältnis zu denen, die die einlagigen und zweilagigen Spulen mit größerem Lagenabstand (0,9 cm) zeigten. Die Leistung des Senders war die gleiche wie früher. Der magnetische Widerstand ist beträchtlich gewachsen. Ferner sind elektrische Verluste im Preßspan vorhanden. In der Nähe der Grundwelle zweiter Art häuften sich die Eigenschwingungen derart, daß sie nicht mehr zu analysieren waren. Die Tabelle XIII enthält die erhaltenen Meßergebnisse einer Spule, die der Spule Tabelle XII bis auf den Lagenabstand sehr ähnlich ist. Die Bilder 29, 30 und 31 zeigen schematisch die erhaltenen Ellipsen für λ_1, λ_5 und λ_2 der Spule Tabelle XIII.

Tabelle XII.

c' = 1 cm. Symmetrische Anregung. Die Werte der Spalten 3—10 sind in der Winkelschaltung gemessen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Schaltung		offener Kupferzylinder		geschlossener Kupferzylinder		mit Eisen	mit Dielektrikum	Kapazität	
	Kreuz- λ	Winkel- λ	ungeerdet λ	geerdet λ	ungeerdet λ	geerdet λ	λ	λ	19,5 cm λ	250 cm λ
λ 1	3600	3600	3350	3400	2160	2185	4120	4000	3650	6620
λ 3	1000	1000	837	837	687	687	1017	1099	1030	1315
λ 5	506	506	432	432	395	395	517	555	515	580
λ 7	311	311	269	269	261	261	314	346	319	—
λ 9	218,5	218	195	195	189	189	218	238,5	224,5	—
λ11	161,5	161,5	152	152	148,5	148,5	161,5	174,5	163	—
λ13	129,5	129,5	122	122	122	122	128,5	141	129,5	—
λ 2	—	124	215	224,5	214	223	132	127	124	124
λ15	107	107	101,5	101,5	101,5	101,5	107	114	107	—
λ17	82,5	82,5	76	76	76	76	82,5	88	—	—
λ19	73,5	73,5	71	71	71	71	73,5	75	—	—
λ 4	—	68	106	112	112	113	71	68	—	—
λ21	—	64,5	64,5	64,5	64,5	64,5	64,5	66	—	—

Bild 29. Bild 30. Bild 31.

Räumliche Verteilung von Strom und Spannung einer zweilagigen Spule.

Tabelle XIII.

$L_1 = 198{,}4$ m $\qquad 2\,l_1 = 30{,}35$ cm

$N_1 = 342$ $\qquad g_1 = 0{,}78$ mm

$2\pi R_1 = 58$ cm $\qquad 2\,r_1 = 0{,}6$ mm

$2\,R_1 = 18{,}6$ cm.

Eigenschwingungen der unteren Lage.

$c' = 2$ cm. Winkelschaltung. Symmetrische Anregung.

	λ		λ
$\lambda 1$	695	$\lambda 5$	103,5
$\lambda 2$	252,5	$\lambda 6$	81
$\lambda 3$	171,5	$\lambda 7$	72
$\lambda 4$	129,5		

$L_2 = 187{,}2$ m $\qquad 2\,l_2 = 30{,}1$ cm

$N_2 = 317$ $\qquad g_2 = 0{,}8$ mm

$2\pi R_2 = 59{,}05$ cm $\qquad 2\,r_2 = 0{,}5$ mm

$2\,R_2 = 18{,}79$ cm $\qquad \frac{R}{l} = 0{,}618$

Eigenschwingungen der verbundenen Lagen $c' = 0{,}5$ cm.

Symmetrische Anregung.

	1	2	3	4
	Schaltung		Offener Kupferzylinder	
	Kreuz- λ	Winkel- λ	ungeerdet λ	geerdet λ
$\lambda 1$	12 550	12 550	11 180	11 180
$\lambda 3$	3 570	3 580	2 680	2 680
$\lambda 5$	1 740	1 740	1 355	1 355
$\lambda 7$	1 050	1 050	870	870
$\lambda 9$	732	732	618	618
$\lambda 11$	530	530	473	473
$\lambda 45$	62	62	62	62
$\lambda 47$	60	60	60	60
$\lambda 49$	57,5	57,5	57,5	57,5
$\lambda 2$	—	56	101	106

Im Bilde 32 sind als Abszissen die Verhältnisse der Spulenradien zur halben Spulenlänge (die arithmetischen Mittel der äußeren und inneren Lage) als Ordinaten die Verhältnisse $\frac{3\,\lambda_3}{\lambda_1}$ aufgetragen. Wie aus der Kurve zu ersehen ist, nähern sich die langen Spulen dem harmonischen Verhältnis.

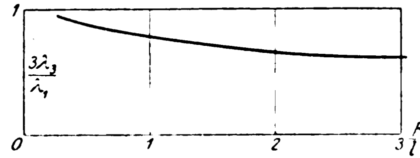


Bild 32. Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{3\,\lambda_3}{\lambda_1}$ zur Spulenform $\frac{R}{l}$.

g) Zusammenfassung.

Das Spektrum dieser Spulen zeigt nicht den regelmäßigen Aufbau, wie dies bei einlagigen und gleichsinnig gewickelten zweilagigen Spulen der Fall ist (vgl. Tabelle I, III, VIII). Zwischen den beiden Grundwellen erster und zweiter Art liegen viele Eigenschwingungen erster Art (vgl. Tabelle XII und XIII).

Die Grundwelle erster Art nimmt sehr große Werte an. Die Größe ist durch die Länge des aufgewundenen Drahtes bestimmt, ferner durch den Abstand der beiden Lagen (Tabelle XII) und dem dazwischen befindlichen Dielektrikum (Tabelle XII, Spalte 8).

Die Eigenwellen erster Art haben ein starkes äußeres magnetisches Feld, die Eigenwellen zweiter Art nicht. In einem in den Spulenkörper eingeschobenen Kupferzylinder entstehen daher bei den Eigenschwingungen erster Art Wirbelströme, die die Selbstinduktion der Spule herabdrücken (Tabelle XII und XIII, Spalte 3).

Das elektrische Feld ist innerhalb der Lagen für die Eigenwellen erster Art am stärksten (geringe Kapazitätsempfindlichkeit gegen Erde), außerhalb für die zweiter Art stark ausgebildet (Tabelle XII, Spalte 3, 6 und 8 und Tabelle XIII). Durch diesen Umstand (große Kapazitätsempfindlichkeit der Eigenschwingungen zweiter Art gegen Erde) ist die Lage der Eigenschwingungen zweiter Art keine feste im Spektrum, sondern hängt von den Versuchsbedingungen ab (vgl. Tabelle XII und XIII, Spalte 3 und 4).

Eisen vergrößert die Eigenwellen beider Gattungen (Tabelle XII, Spalte 7).

Wird die Spule über Kondensatoren kurz geschlossen, so erfahren nur die Eigenwellen erster Art einen Zuwachs (Tabelle XII, Spalte 9 und 10).

Für lange Spulen nähert sich das Verhältnis $\frac{3\lambda_3}{\lambda_1}$ dem harmonischen.

Die durch die räumliche Verteilung von Strom und Spannung bei unmittelbarer Beeinflussung des Kathodenstrahles auf dem Schirm der Braunschen Röhre bei einer Vorbeibewegung der Spule entstehenden Ellipsen machen annähernd die Hälfte einer einlagigen Spule aus (vgl. Bild 29 bis 31).

Die Potentialverteilung längs der Spule ist die Hälfte einer einlagigen für die gleichen Eigenschwingungen (vgl. Bild 27 und 28 mit 6, 7, 8 und 9).

VI. Eigenschwingungen dreilagiger Spulen.

Auf eine zweilagige Spule wurde eine weitere Lage gewickelt. Die Maße der Lagen sind:

$L = 66{,}3\ (64{,}0)\ [64{,}4]$[1] m $2\,l = 8{,}5\ (8{,}2)\ [8{,}15]$ cm
$N = 148\ (141)\ [140]$ $g = 0{,}554$ mm
$2\pi R = 44{,}8\ (45{,}3)\ [46{,}0]$ cm $2\,r = 0{,}5$ mm
$2\,R = 14{,}5\ (14{,}65)\ [14{,}75]$ cm.

Die Eigenschwingungen der Spule waren stark gedämpft. Prinzipiell unterscheidet sich das erhaltene Spektrum nicht von dem einer zweilagigen Spule. Die Spulenmitte liegt in der Mitte der zweiten Lage. Die Grundwelle erster Art findet ähnliche Verhältnisse wie bei der zweilagigen Spule vor. Die äußere und innere Lage führen in erster Annäherung gleich gerichteten und gleich starken Strom. Die mittlere Lage hat gleich gerichteten, aber verschieden starken Strom in bezug auf die beiden äußeren Lagen. Für die erste Oberschwingung erster Art fließt in der mittleren Lage entgegengesetzt gerichteter Strom wie in den beiden umhüllenden Lagen. Das äußere magnetische und elektrische Feld wird durch die Bilder 33a, b, c schematisch wiedergegeben. Die Hauptachse der Ellipse ist durch den magnetischen Teil gegeben. Die Grundwelle zweiter Art wurde nicht erhalten. Doch

[1]) Die Zahlen in den Klammern beziehen sich auf die zweite ( ) bzw. dritte Lage [ ].

wird hier die Anzahl der ungradzahligen Oberschwingungen kleiner sein als bei einer zweilagigen [1]).

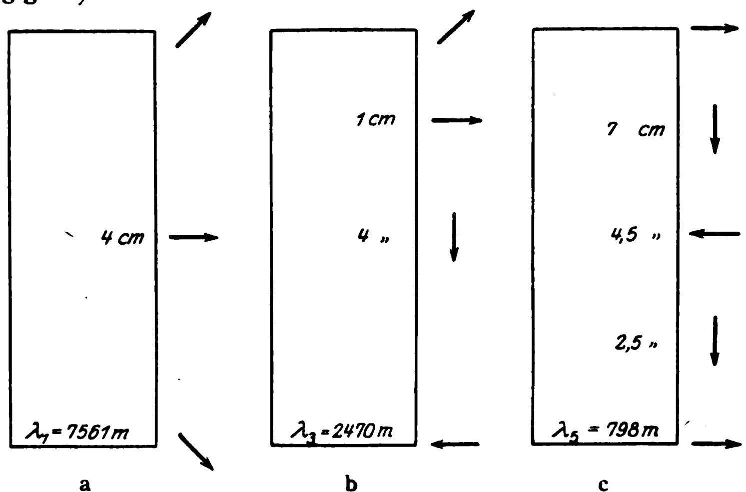


Bild 33. Räumliche Verteilung von Strom und Spannung bei einer dreilagigen Spule.

Die Tabelle XIV enthält die gefundenen Werte.

Tabelle XIV [2]).

$c' = 0{,}5$ cm. Symmetrische Anregung.

	Kreuz-Schaltung 1	Winkel-Schaltung 2	offener Kupferzylinder 3	$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$
	λ	λ	λ	
λ 1	7560	7560	6670	3,06
λ 3	2470	2470	2270	3,09
λ 5	798	798	760	3,0
λ 7	266	266	257	2,15
λ 9	133	133	122	2,05
λ 11	66	66	—	—

Wie bei zweilagigen Spulen verursachte der geschlitzte Kupferzylinder eine Verschiebung der Wellen zu kleineren Werten (starkes äußeres magnetisches Feld und schwaches äußeres elektrisches Feld). Die Erdung des Kupferzylinders verursachte keine Änderung. In der Spalte 3, Tabelle XIX, sind die Werte mit eingeschobenem Kupferzylinder enthalten.

Über den Einfluß der Wicklungsart wurden folgende Feststellungen gemacht:

1. Spule.

Es wurden nacheinander drei Spulen auf dem gleichen achteckigen Holzgestell gewickelt. Die Maße sind wie folgt:

$$L = 42{,}5 \text{ m} \qquad 2l = 1{,}08 \text{ cm}$$
$$N = 27 \qquad g = 1{,}22 \text{ mm}$$
$$2\pi R = 156{,}5 \text{ cm} \qquad 2r = 0{,}6 \text{ mm}$$
$$2R \sim 50 \text{ cm}.$$

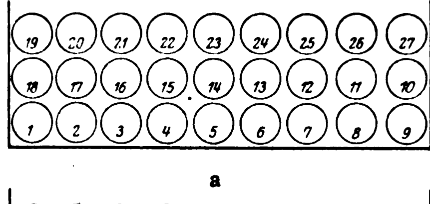
[1]) Vgl. Fußnote a. S. 364.

[2]) Die Eigenschwingungen der unteren Lage für $c' = 1$ cm sind: $\lambda_1 = 377$ m, $\lambda_2 = 106$ m, $\lambda_3 = 72$ m, die der verbundenen 2 Lagen: $\lambda_1 = 4410$ m, $\lambda_3 = 1015$ m, $\lambda_5 = 445$ m, $\lambda_7 = 225$ m, $\lambda_9 = 172$ m, $\lambda_{11} = 123$ m, $\lambda_{13} = 97$ m, $\lambda_{15} = 77$ m, $\lambda_{17} = 65$ m.

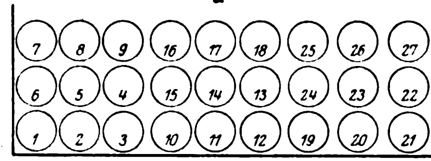
Die Wicklungsart gibt Bild 34a wieder. Die Grundwelle wurde zu

$$\lambda_1 = 585 \text{ m}$$

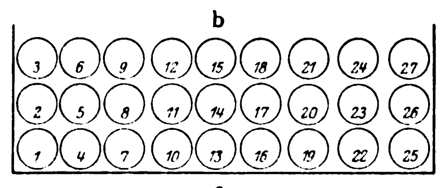
bestimmt.



a



b



c

Bild 34.

2. Spule.

Der Bau der zweiten Spule ist aus Bild 34b ersichtlich. Die Grundwelle dieser Spule betrug:

$$\lambda_1 = 407 \text{ m}.$$

3. Spule.

Bild 34c veranschaulicht die Wicklung.

$$\lambda_1 = 357 \text{ m}.$$

Für alle drei Spulen wurde das gleiche Material verwandt. c' betrug für die angegebenen Wellen der drei Spulen 0,5 cm. Bei der ersten Spule war der Einfluß bei Veränderung der Kopplungskondensatoren nicht nachweisbar, die zweite und dritte Spule wiesen andere Grundwellen auf (Änderung 1,1 %), wenn c' von 0,5 auf 2 cm gebracht wurde.

Oberwellen waren bei allen drei Spulen nicht zu ermitteln.

Zusammenfassung.

Das Spektrum der dreilagigen Spule entspricht dem einer fortlaufend gewickelten zweilagigen (vgl. Tabelle XIV mit XIII).

Das magnetische Feld ist bei diesen Spulen für die Eigenschwingungen erster Art außerhalb der Lagen stark ausgebildet [Wirbelstrombildung im eingeschobenen Kupferzylinder — Herabdrücken der Selbstinduktion und damit Verkleinerung der Eigenwellen (Tabelle XIV, Spalte 3)].

Das elektrische Feld ist außen schwach (geringe Kapazitätsempfindlichkeit gegen Erde).

Der Spulenbau (vgl. Bild 34) beeinflußt die Grundwelle.

VII. Eigenschwingungen von Flachspulen.

Nach den Vorstellungen, die über die Strom- und Spannungsverteilung bei zweilagigen Spulen entwickelt wurden (s. Teil V), ist zu erwarten, daß bei viellagigen Spulen die Eigenschwingungen zweiter Art wieder die Stellen im Frequenzspektrum innehaben, die sie bei einlagigen Spulen einnehmen, d. h. auf eine Eigenwelle erster Art folgt eine zweite Art. Die Lagen der Spulen, die entgegengesetzten Strom führen und die Selbstinduktion herabdrücken, werden im Verhältnis zu den übrigen klein. Der Einfluß der entfernteren Lagen geht zurück[1]).

Die gehegte Erwartung wurde an zwei Flachspulen bestätigt gefunden. Die beiden Spulen sind von der AEG in entgegenkommender Weise zur Verfügung gestellt worden.

1. Flachrunddrahtspule.

Die Spule bestand aus 32 Lagen, 16 Lagen zu sechs und 16 zu fünf Windungen. Der verwandte Kupferdraht war durch Papier isoliert, das mit Lack getränkt war. Die Lagen wurden durch Isolierband gehalten. Bild 35 zeigt die Spule. Die Spulenabmessungen sind folgende:

[1]) In einer besonderen Arbeit soll auf diese Verhältnisse näher eingegangen werden.

$L \sim 258$ m
$N = 176$
$2 R_1 = 25$ cm
$2 R_2 = 51{,}8$ cm

$2 l = 3{,}82$ cm
$g = 5{,}0$ mm
$2 r = 3{,}0$ mm

R_1 = innerer, R_2 = äußerer } Radius.

Die Spule wurde frei in Luft hängend, mit Epsteinbündel, ferner auf dem Tisch liegend und mit untergeschobenem, ungeschlitztem Kupferblech auf ihre Eigenschwingungen hin untersucht. Die Erdung des Bleches war für die Größe der Eigenfrequenzen ohne Einfluß, die Eigenwellen zweiter Art traten jedoch besser hervor. Daß eine Verschiebung des ganzen Spektrums durch die im Kupferblech entstehenden Wirbelströme eintreten muß, und zwar nach größeren Frequenzen, ist erklärlich. Die Tabelle XV enthält die für die verschiedenen Versuchsbedingungen erlangten Werte. Die Epsteinbündel waren so aufgehängt, daß sie parallel und symmetrisch zur Spulenachse waren.

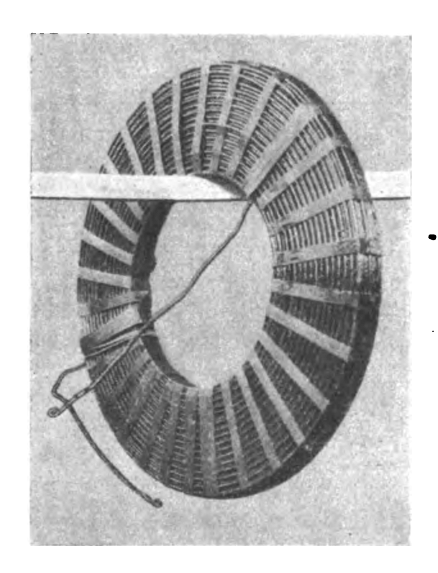




Bild 35. Flachrunddrahtspule der AEG.

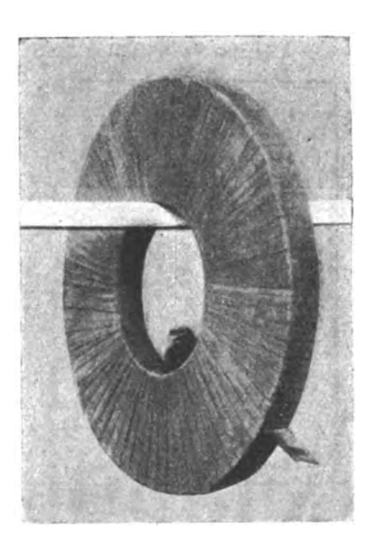


Bild 36. Flachbandspule der AEG.

Tabelle XV.

$c' = 0{,}5$ cm Winkelschaltung. Symmetrische Anregung

	In Luft hängend 1	Mit 4 Epsteinbündel 2	Auf Tisch liegend 3	Mit untergeschobenem Kupferblech ungeerdet 4	Mit untergeschobenem Kupferblech geerdet 5
	λ	λ	λ	λ	λ
λ 1	1410	1565	1480	940	940
λ 2	488	502	510	456	456
λ 3	303	310	319	296	296
λ 4	—	—	—	217	217
λ 5	171	171	172,5	166	166
λ 6	—	—	—	133	133
λ 7	—	—	117	112	112
λ 8	—	—	—	—	102
λ 9	—	—	—	—	92

Oberhalb der angegebenen Grundwelle wurde bis $\lambda = 8000$ m nach weiteren Eigenschwingungen gesucht, doch in der Kreuz- und Winkelschaltung keine mehr gefunden. Als die Senderfrequenz die Hälfte der Grundfrequenz der Spule ausmachte, trat in der Kreuzschaltung die bekannte Lissajousche Figur auf.

2. Flachbandspule.

Die Spule war vollständig mit Isolierband umwickelt (Bild 36). Das Kupferband hatte eine Dicke von 0,15 mm und eine Breite von 25 mm. Die Isolation wurde durch ein Preßspanband von $0,5 \cdot 35$ mm hergestellt. Die Länge des Kupferbandes betrug ~ 213 m. Der innere Spulendurchmesser belief sich auf 19,5 cm, der äußere war 49 cm. Die Länge der Spule maß 4,2 cm. Die Spule wurde genau so untersucht wie die Flachrunddrahtspule. Die Eigenschwingungen waren bei dieser Spule stärker gedämpft. In Tabelle XVI sind die Maßzahlen enthalten. Auch hier wurde das Gebiet bis $\lambda = 8000$ m nach weiteren Eigenschwingungen abgesucht. Die Lissajouschen Figuren zeigten sich bei $2\lambda_1$ und $3\lambda_1$.

Tabelle XVI.

$c' = 0,5$ cm Winkelschaltung. Symmetrische Anregung.

	In Luft hängend	Mit 4 Epsteinbündel	Auf Tisch liegend	Mit untergeschobenem Kupferblech ungeerdet	Mit untergeschobenem Kupferblech geerdet
	1	2	3	4	5
	λ	λ	λ	λ	λ
λ 1	1278	1470	1370	798	798
λ 2	473	486	506	401	402
λ 3	305	312	320	273	273
λ 4	—	—	220	211	211
λ 5	177	177	180	167	167
λ 6	—	—	—	137	137
λ 7	—	—	—	122	122

Zusammenfassung.

Bei Flachspulen folgt wie bei einlagigen Spulen auf eine Eigenwelle erster Art eine solche zweiter Art (vgl. Tabelle I, III mit XV und XVI, Spalte 1).

Die Erhöhung der Kapazität der Spule gegen Erde (auf dem Tisch liegend Tabelle XV und XVI, Spalte 3) läßt alle Eigenschwingungen anwachsen.

Wirbelströme, die in einem untergeschobenen Kupferblech entstehen, verkleinern die Eigenwellen beider Arten (Tabelle XV und XVI, Spalte 4).

Eisen vergrößert die Eigenschwingungen (Tabelle XV und XVI, Spalte 2).

VIII. Eigenschwingungen von ein- und zweilagigen Spulen in Öl.

Um den Einfluß des umgebenden Dielektrikums festzustellen, wurden drei einlagige Spulen und eine zweilagige Spule in ein Ölbad gebracht. Die Wanne war aus Eisen, offen, 60 cm lang, 32,5 cm tief und 30,5 cm hoch. Ein angelöteter Kupferdraht diente zum Anschließen der Erdleitung. Die Eigenschwingungen der Spulen wurden zuerst 1,50 m über dem Fußboden hängend, dann im ungeerdeten Eisenkasten, hierauf im geerdeten Behälter bestimmt. Dann wurde das Öl mittelst einer Pumpe in die Wanne geschafft. Die Spulen hingen an einem passend gebogenen Glasstab so in der Wanne, daß symmetrische Teile des Spulenkörpers gleichen Abstand von den Wandungen hatten. Die Spulen hingen vollständig in Öl. Der

Spiegel des Bades war 1 cm von der oberen Kante entfernt. Die Dielektrizitätskonstante des Öls betrug 2,35. Die Quadratwurzel aus diesem Wert ist 1,532. Wie aus der Tabelle XVII ersichtlich ist (Spalte 5), wächst der gefundene Wert in Öl für die Eigenschwingungen nicht proportional der Quadratwurzel (Spalte 6), wie nach Lenz zu erwarten war. Bei der Grundschwingung wurde die größte Abweichung bei allen einlagigen Spulen festgestellt. Nach dem Auspumpen des Öls bei unverändert gebliebener Lage der Versuchsanordnung der Spule zeigte diese nahezu die alten Werte der Eigenschwingungen (Abweichung 3 %). Die Veränderung trat übrigens nur bei den ersten drei Eigenschwingungen auf. Die geringe Abweichung rührt von den Ölresten her, die an der Spule haften geblieben sind.

Die Erdung des Behälters war für die Eigenschwingungen erster Art ohne Einfluß. Das Bild auf dem Schirm der Braunschen Röhre blieb ungeändert, wenn die Erdleitung an- bzw. abgelegt wurde. Das war der Fall, ob die Spule in Öl oder in Luft im Eisenkasten hing. Bei den Eigenschwingungen zweiter Art zeigte sich auch bei den einlagigen Spulen deutlich eine Verstimmung (s. Tabelle XVII). Die Kapazitätsempfindlichkeit dieser Eigenschwingungen trat ja bei erhöhter Kapazität gegen Erde (Kupferzylinder) bei allen untersuchten Spulen auf, soweit sie Eigenschwingungen zweiter Art aufweisen.

Tabelle XVII.

$c' = 1$ cm. Winkelschaltung. Symmetrische Anregung.

Spulenmasse s. Tabelle I. $\frac{l}{R} = 2{,}3$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	in Luft hängend	Eisenkasten		Ölgefüllter Eisenkasten		$\frac{\lambda_5}{\lambda_1}$ bez. a. 3 u. 5	Vollst. Geschl. Eisenkasten		$\frac{\lambda_5}{\lambda_1}$
		ungeerd.	geerdet	ungeerd.	geerdet		Luft	Öl	
	λ	λ	λ	λ	λ	λ	λ	λ	λ
λ 1	1026	1100	1100	1390	1390	1,265	1050	1392	1,325
λ 2	406	432	437	595	608	1,395	415	595	1,435
λ 3	269	282	282	395	395	1,405	276,5	395	1,430
λ 4	206	206,5	208	290	292	1,405	206,5	293	1,415
λ 5	166,5	167	167	233	233	1,395	166	235	1,415
λ 6	138,5	138,5	139	194	195	1,405	139	195	1,402
λ 7	120	120	120	167	167	1,39	120	167	1,39

Da das elektrische Feld nach oben nicht begrenzt war und da dies für das nicht proportionale Anwachsen der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstanten mit als Grund in betracht zu ziehen war, wurde Spule Tabelle XVII nach sorgfältiger Reinigung erneut in den geerdeten Kasten gebracht. Dieser konnte durch zwei Eisenblechstreifen, die ebenfalls mit der Erdleitung in Verbindung standen, verschlossen werden. Die Schlitzbreite betrug 1,5 cm. Die beiden Zuführungsdrähte wurden durch ihn zur Spule gebracht. Der Einfluß des Verschlusses ist aus Spalte 7 und 8 der Tabelle XVII zu ersehen. Die Eigenwellen bleiben aber auch hier unterhalb der zu erwartenden Werte.

Zusammenfassung.

Die nach Lenz proportional der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstanten des benutzten Öls zu erwartende Vergrößerung der Eigenwellen wurde bei offenem Eisenkasten nicht festgestellt (vgl. Tabelle XVII).

Bei Schließung des ölgefüllten Eisenkastens durch geschlitzte Eisenbleche (alles geerdet) blieben die Eigenwellen auch unterhalb der zu erwartenden Werte.

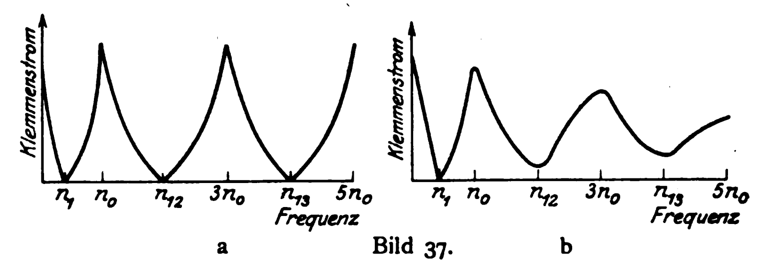
Die Kapazitätsempfindlichkeit der Eigenwellen zweiter Art zeigte sich bei allen Spulen, die untersucht wurden, wenn die Erdleitung an- bzw. abgelegt wurde (vgl. Tabelle XVII und XVIII).

Tabelle XVIII.
c' = 1 cm. Winkelschaltung. Symmetrische Anregung.
Spulenmasse s. Tabelle XII. $\frac{l}{R} = 1{,}57$.

	1	2	3	4	5	6
	In Luft hängend	Eisenkasten		Ölgefüllter Eisenkasten		$\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$
		ungeerdet	geerdet	ungeerdet	geerdet	bez. a. 3 u. 5
	λ	λ	λ	λ	λ	λ
λ 1	3600	3450	3450	4890	4890	1,435
λ 3	1000	981	981	1390	1390	1,415
λ 5	506	502	502	712	712	1,415
λ 7	311	312	312	441	441	1,415
λ 9	218	218	218	307	307	1,41
λ 11	161,5	162	162	228	228	1,41
λ 13	129,5	129,5	129,5	183	183	1,412
λ 2	124	144,5	147,5	184	189	1,285
λ 15	107	107	107	151	151	1,412

IX. Anhang: Stromcharakteristik der Spulen.

In seiner rechnerischen Untersuchung „Die Spule bei Wechselstrom" gibt Rogowski[1]) den Verlauf des Klemmenstromes an, der in der Spule einzieht, wenn die Frequenz kontinuierlich vergrößert wird und dabei das Gebiet der Resonanzlagen (erster und zweiter Art) überstrichen wird (Bild 37a). Der Klemmenstrom setzt sich aus zwei Teilströmen, dem induktiven und kapazitiven Strom, zusammen. Der



a Bild 37. b

n_1, n_{12}, n_{13} = Eigenfrequenzen erster Art,
n_0, $3\,n_0$, $5\,n_0$ = Eigenfrequenzen zweiter Art.
Klemmenstrom in Abhängigkeit von der Frequenz:
a) Für eine ideale Spule aus zwei Windungen.
b) Für eine mit Widerstand behaftete Spule aus zwei Windungen.

kapazitive Strom eilt um 90° der Klemmenspannung voraus und wächst proportional der Frequenz. Der induktive Strom eilt der Klemmenspannung um 90° nach, er sinkt umgekehrt proportional mit steigender Frequenz. Für die Frequenz der Grundschwingung werden beide Teilströme gleich groß und heben sich auf (s. Fußnote 1 S. 340).

Steigt die Frequenz über diese Eigenschwingung dieser Spule hinaus, so wächst der Klemmenstrom wieder und wird für die Grundschwingung zweiter Art unendlich groß (s. Fußnote 2 S. 340).

Bei weiterer Vergrößerung der Frequenz sinkt der Klemmenstrom wieder und wird für die erste Oberschwingung erster Art wieder Null, um bei der ersten Oberschwingung zweiter Art unendlich zu werden. Bild 37 a gibt die Rogowskische

[1]) Rogowski, Archiv f. Elektr. VII, 1918, S. 31.

Kurve für den Klemmenstrom in Abhängigkeit von der Frequenz (gleiche Klemmenspannung vorausgesetzt) wieder für eine ideale Spule aus zwei Windungen. Bild 37b veranschaulicht den Klemmenstrom für eine mit Widerstand behaftete Spule. Die Verkleinerung der Amplituden wird dadurch bedingt, daß der Widerstand mit steigender Frequenz wächst.

Bei Spulen, die durch ihren Bau (ein- und viellagig) ein Spektrum liefern, in dem abwechselnd auf Stromresonanz Spannungsresonanz folgt, hat der Klemmenstrom einen ähnlichen Verlauf, wie ihn Bild 36 wiedergibt. Für solche Spulen aber, bei denen zwischen den beiden Grundschwingungen mehrere Eigenwellen erster Art liegen (s. Tabelle XII bis XIX), werden die scharfen Maxima der Eigenwellen zweiter Art im Anfang der Kurve (vom Nullpunkt des Koordinatensystems gerechnet) verschwinden. An ihre Stelle treten flache Maxima. An der Stelle des Spektrums, wo die Grundschwingung zweiter Art für diese Spule liegt, wird der Klemmenstrom ein scharfes Maximum aufweisen.

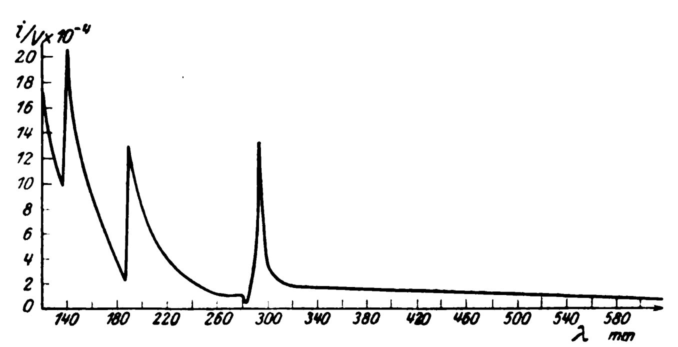


Bild 38. Klemmenstrom einer einlagigen Spule bei fester Kopplung.

Diese Annahme wurde bei der zweilagigen Spule Tabelle XII bestätigt gefunden, als diese vertikal an der Braunschen Röhre vorbeibewegt wurde. Bei $\lambda \sim 780$ und $\lambda \sim 410$ m wurde eine Ablenkung in Form eines Streifens beobachtet. Die Lage der Ablenkung war derart, daß auf einen magnetischen Kraftlinienverlauf parallel der Spulenachse geschlossen wurde. Die Vorbeibewegung ließ die Lage des Streifens in beiden Fällen ungeändert erscheinen, nur an dem Ende und der Spulenmitte (Verbindung der beiden Lagen) war eine schwache Drehung zu erkennen, die durch den Verlauf des magnetischen Feldes für die beiden Stellen diese Erklärung fand.

Daß die Ablenkung nur von einem magnetischen Felde verursacht wurde, zeigte ein Kontrollversuch mit Gleichstromstößen, die in die Spule geleitet wurden. Das frühere Bild blieb gewahrt.

Die unscharfe Abstimmung der beiden Lagen ließ schon vermuten, daß keine Resonanzstelle der Spule vorlag; denn bei allen untersuchten Spulen war diese für beide Arten von Eigenschwingungen scharf ausgebildet. Ferner sprach der Umstand dagegen, daß bei dieser Untersuchungsmethode die Ellipse und ihre Drehung ausblieb. Wenn $\lambda = 410$ m als λ_6 angesprochen werden sollte, so hätte die Drehung sich sicherlich gezeigt. Das stark ausgebildete äußere elektrische Feld bei Spannungsresonanz fehlte. Dieses konnte mit der Kreuz- und Winkelschaltung ebensowenig nachgewiesen werden wie durch das Vorbeiziehen des Probekondensators.

Für die einlagige Spule wurde eine Kurve für den Klemmstrom erhalten, die in Bild 38 wiedergegeben ist. Als Ordinaten sind die Verhältnisse $\frac{i}{v}$[1]), als Abszissen die zugeordneten Wellenlängen aufgetragen. Die Anregung der Spule geschah in der Weise, daß die Spule an einen Kondensator (3000 cm) angeschlossen wurde, der hintereinander geschaltet mit einem Zwischenkreiskondensator lag. Der Zwischenkreis war mit dem in der Versuchsanordnung beschriebenen Sender lose

[1]) Das Verhältnis $\frac{i}{v}$ wurde gewählt, weil durch die Veränderung der Frequenz durch den Drehkondensator des Zwischenkreises die Spannung eine Änderung erfuhr.

gekoppelt. Von den Spulenenden gingen noch zwei Leitungen zu den vertikalen Ablenkungselektroden einer Braunschen Röhre mit Glühkathode. Die Ablenkungen auf dem Schirm wurden in der gleichen Weise mit dem Spannungsmesser bestimmt, wie in der Versuchsanordnung dargetan wurde.

Der in der Spule einziehende Strom wurde mit einem geeichten Thermoelement gemessen, das in einer der beiden Zuführungen — Spulenende — Kondensator 3000 cm — lag. Ein Umlegen des Thermoelements in die andere Zuführung änderte die Verhältnisse nicht.

Als die Ablenkung auf dem Schirm der Braunschen Röhre bei $\lambda = 293$ m ein Minimum zeigte, wurde zur Kontrolle eine Probespule aus einer Windung nach Gothe an der Spule vorbeibewegt und zwei Ausschläge am Galvanometer beobachtet, die auch bei Kurzschluß der Spule erhalten blieben. Bei weiteren Resonanzstellen wurde in der gleichen Weise verfahren.

Aus dem Bilde 38 ist ersichtlich (es wurde von kleinen zu großen Wellen ausgegangen für diese Kurve), daß der Klemmstrom vor $\lambda = 293$ m stark ansteigt und ebenso stark nach der Resonanzlage fällt, um mit größer werdenden Wellen dauernd zu fallen. Die Grundwelle erster Art wurde nicht erhalten, sie mußte sehr hoch liegen, da ja die Spule über den Kondensator 3000 cm kurz geschlossen war (s. Tabelle II, XII, Spalte 10 und Gothe).

Das Minimnm der Kurve bei 186 m wurde als λ_3, das Maximum bei 140 m als λ_4 erwiesen (Gothe).

Durch die Anregung war die Kopplung zwischen Spule und Zwischenkreis so fest, daß ein Springen gleichzeitig an der Röhre und am Galvanometer beobachtet wurde. Dieser Umstand läßt bei $\lambda = 283$ m noch ein Minimum und bei $\lambda = 196$ m ein weiteres Maximum entstehen. Als die Kopplung so lose gemacht wurde, daß das Springen aufhörte, versagte die Anordnung. Die Spannung war nur in der Umgebung der Eigenwellen erster Art meßbar, der Strom nur oberhalb und unterhalb der Eigenschwingungen zweiter Art.

X. Zusammenfassung.

Es wird eine Methode angegeben, mit Hilfe der Braunschen Röhre die Eigenschwingungen von ein- und mehrlagigen Spulen zu finden. Die äußeren magnetischen und elektrischen Felder der ein-, zwei- und dreilagigen Spulen werden mittels der Braunschen Röhre sichtbar gemacht (s. Teil I).

Die zwei- und dreilagigen Spulen zeigen ein Frequenzspektrum, das stark von dem einer einlagigen abweicht (s. Teil IV und VI).

Die Eigenschwingungen zweiter Art haben für diese Spule keine feste Stelle im Spektrum, diese hängt von den Versuchsbedingungen ab (Kapazität der Spule gegen Erde). Die Eigenfrequenzen erster Art haben ein starkes äußeres magnetisches Feld und ein schwaches elektrisches. Bei den Eigenfrequenzen zweiter Art ist es umgekehrt (s. Teil IV bis VI).

Für Flachspulen wurde ein Spektrum gefunden, das dem einer einlagigen Spule entspricht (s. Teil VII).

Ein- und zweilagige Spulen wurden in Öl untersucht, und es wurde festgestellt, daß die zu erwartende Vergrößerung der Eigenwellen nicht proportional der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstanten des benutzten Öles ist, sondern kleiner ausfällt (s. Teil VIII).

Der Klemmenstrom der Spulenarten wird diskutiert (s. Teil IX).

Zum Schluß möchte ich meinen verehrten Lehrern, Herrn Geheimrat Wien und Herrn Professor Rogowski, die die vorstehenden Untersuchungen angeregt und durch ihr stetes Interesse gefördert haben, meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Nachdem Herr Professor Rogowski einem Ruf nach Aachen gefolgt war, hat sein Nachfolger, Herr Professor Schumann, mir bereitwilligst mit seinem Rate zur Seite gestanden, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen besonderen Dank ausspreche.



Über die angenäherte Bestimmung der Kapazität aus dem Kraftlinienbild eines parallelebenen elektrostatischen Feldes.

Von

Jean Spielrein, Moskau.

Bei der Lösung verschiedener Hochspannungsaufgaben hat man zuweilen die Kapazität eines Feldes zu bestimmen, das zwischen zwei Potentialflächen eingeschlossen ist. Haben diese Flächen keine ganz einfache geometrische Form, so bietet die Berechnung der Kapazität große mathematische Schwierigkeiten. Im Falle eines parallelebenen Feldes, dessen Potentialflächen zylindrisch sind, kann die Kapazität aus dem Kraftlinienbild des Feldes angenähert bestimmt werden.

Das Feld sei durch die zylindrischen Flächen F′ und F begrenzt mit den Potentialen φ' und φ. Sind keine elektrischen Ladungen im Felde vorhanden, so geht durch beide Potentialflächen derselbe Fluß des Feldvektors $\mathfrak{E}$, und es gilt die bekannte Beziehung:

$$\int_F \delta\,\mathfrak{E}\,d\mathfrak{f} = \int_{F'} \delta\,\mathfrak{E}'\,d\mathfrak{f}' = Q, \tag{1}$$

wo Q die Ladung und δ die Dielektrizitätskonstante in passenden Einheiten darstellt.

Im statischen Feld gilt aber außerdem die Beziehung:

$$\int_F E \ln E\,df - \int_{F'} E' \ln E'\,df' = 2\pi h(\varphi - \varphi'). \tag{2}$$

Hier bedeutet E den Betrag des Feldvektors und h die zu den Erzeugenden parallele Höhe des betrachteten Feldteiles. Die gestrichelten Größen beziehen sich auf die Fläche F′. (Die Ableitung dieser Formel ist am Ende dieses Aufsatzes gegeben.)

Wir betrachten das Kraftlinienbild des Bildes 1, das einen zu den erzeugenden senkrechten Schnitt des Feldes darstellt. Das Feld sei in n Kraftröhren so eingeteilt, daß alle Kraftröhren an ihren Enden dieselbe Ladung $\frac{Q}{n}$ haben. Ist die Zahl der Kraftröhren so groß gewählt, daß man den Betrag des Feldvektors auf jedem Querschnitt als konstant ansehen darf, so gilt für jede Röhre die Beziehung

Bild 1.

$$\delta E_i' h s_i' = \delta E_i h s_i = \frac{Q}{n}. \tag{3}$$

oder

$$\frac{E_i'}{E_i} = \frac{s_i}{s_i'}. \tag{3a}$$

Die Integralformel (2) kann dann durch eine Summe ersetzt werden, indem man die Flächenelemente df durch entsprechende Röhrenquerschnitte $h s_i$ ersetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q}{n}(\ln E_i - \ln E_i') = 2\pi h \delta(\varphi - \varphi'). \tag{2a}$$

Nun ist

$$\ln E_i - \ln E_i' = \ln \frac{E_i}{E_i'} = \ln \frac{s_i'}{s_i} = \ln \alpha_i,$$

wo

$$\alpha_1 = \frac{s_1'}{s_1}, \quad \alpha_2 = \frac{s_2'}{s_2}, \quad \ldots\ldots \alpha_n = \frac{s_n'}{s_n}$$

gesetzt worden ist. Infolgedessen wird

$$\frac{Q}{n}\sum_i \ln \alpha_i = 2\pi h \delta (\varphi - \varphi').$$

Die Kapazität C des Feldes ist gleich dem Verhältnis der Ladung der Potentialflächen zu ihrer Potentialdifferenz. Man erhält also:

$$C = \frac{Q}{\varphi - \varphi'} = \frac{2\pi h \delta}{\ln \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n}} \tag{4}$$

oder

$$C = \frac{2\pi h \delta}{\ln \alpha_m},$$

wo $\alpha_m = \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n}$ das geometrische Mittel der n Querschnittsverhältnisse α_i darstellt. Diese Formel gilt natürlich nur dann, wenn im ganzen Feld nicht nur $\mathfrak{E}$, sondern auch $\ln E$ endlich und stetig bleibt. Sollte an einigen Stellen des Feldes der Betrag von $\mathfrak{E}$ gleich Null, also $\ln E$ negativ unendlich werden, so würde für einen jeden solchen Fall nachzuprüfen sein, ob man noch die Formel (2) anwenden kann oder nicht.

So ist z. B. für das Feld zweier konaxialer Kreiszylinder mit den Radien r, r' das Verhältnis $\alpha_m = \frac{r'}{r}$, und folglich

$$C = \frac{2\pi h \delta}{\ln \frac{r'}{r}}.$$

Das ist die bekannte Formel für die Kapazität eines Zylinderkondensators. Dagegen würde die Anwendung der Formel (4a) auf das Feld zwischen zwei parallelen und gleichen Kreiszylindern für die Kapazität den Wert Null ergeben. In diesem Falle ist die Formel (4) nicht anwendbar.

Ableitung der Formel (2).

Wir bezeichnen im folgenden das dyadische Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$,

ihr Vektorprodukt mit $\underline{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{b}}$,

den ersten Skalar eines Affinors Φ mit $S_1 \Phi$,

seinen zweiten Skalar mit $S_2 \Phi$.

Das ∇-Zeichen soll nicht über Klammer hinweg wirken.

Der Graduent von $\ln E$ läßt sich bekanntlich durch die mittlere Krümmung H der Potentialfläche und die Feldlinienkrümmung k darstellen,

$$\nabla \ln E = -H\mathfrak{t} + k\mathfrak{n} = (\underline{\nabla \mathfrak{t}})\,\mathfrak{t}, \tag{5}$$

wo die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}$ parallel der Feldlinientangente und ihrer Hauptnormale sind (J. Spielrein, diese Zeitschrift, 1915, 4, S. 78). Wir berechnen die Divergenz dieses Ausdrucks:

$$\nabla^2 \ln E = \nabla (\underline{\nabla \mathfrak{t}})\,\mathfrak{t} = S_1 (\nabla \cdot \mathfrak{t})^2 - (\nabla \mathfrak{t})^2 = -2 S_2 (\nabla \cdot \mathfrak{t}),$$

denn es gilt für einen beliebigen Affinor

$$S_1 \Phi^2 - (S_1 \Phi)^2 = -2 S_2 \Phi$$ [1].

Nun ist aber unschwer zu beweisen, daß

$$\nabla \cdot \mathfrak{t} = k_1 \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} + k_2 \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} + k\,\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{n}, \tag{6}$$

wo die Einheitsvektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ parallel den Krümmungslinientangenten der Potentialfläche sind und k_1, k_2 gleich sind den Krümmungen der zu $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ parallelen Hauptnormalschnitte der Fläche. Aus (6) berechnet man nun ohne weiteres

[1] J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 1916, S. 299, Aufg. 182.



$$S_2(\nabla \cdot t) = k_1 k_2 = K. \tag{7}$$

K heißt die totale Krümmung der Fläche. Folglich wird

$$\underline{\nabla^2 \ln E = -2K.} \tag{8}$$

Durch Formel (5) ist $\nabla \ln E$ durch die Krümmungen $H = k_1 + k_2$ und k ausgedrückt. Man könnte denken, daß in dem Ausdruck für die Divergenz von $\nabla \ln E$ erste Ableitungen dieser Krümmungen auftreten würden. Das ist aber nicht der Fall, so daß sich $\nabla^2 \ln E$, ebenso wie $\nabla \ln E$, durch die Krümmungen ausdrücken läßt.

Wir wollen jetzt den Gaußschen Satz auf die beiden Vektoren $\varphi \nabla \ln E$ und $\ln E \nabla \varphi = -\mathfrak{E} \ln E$ anwenden. Es gilt unter den üblichen Stetigkeitsvoraussetzungen:

$$\oint_{F+F'} \varphi \nabla \ln E \, d\mathfrak{f} = \int_V d\tau \operatorname{div}(\varphi \nabla \ln E) = \int_V d\tau \, \varphi \nabla^2 \ln E + \int_V d\tau (\nabla \varphi) \nabla \ln E,$$

$$-\oint_{F+F} \mathfrak{E} \ln E \, d\mathfrak{f} = \int_V d\tau \operatorname{div}(\ln E \nabla \varphi) = \int_V d\tau \ln E \nabla^2 \varphi + \int_V d\tau (\nabla \varphi) \nabla \ln E.$$

Hier bedeutet $d\mathfrak{f}$ das nach außen gerichtete Element der aus F und F' bestehenden Begrenzungsfläche. Man setzt nun ein:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \qquad \nabla^2 \ln E = -2K$$

und erhält durch Subtraktion

$$\oint_{F+F'} (\varphi \nabla \ln E + \mathfrak{E} \ln E) \, d\mathfrak{f} = -2 \int_V d\tau \, \varphi K.$$

Das Element $d\mathfrak{f}$ ist für die Fläche F' gleichgerichtet mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}' d\mathfrak{f} = E' df'$, und für die Fläche F entgegengerichtet, $\mathfrak{E} d\mathfrak{f} = -E df$. Ebenso wird wegen (5)

$$\nabla \ln E' d\mathfrak{f} = H' df', \qquad \nabla \ln E \, d\mathfrak{f} = +H \, df.$$

Man erhält also:

$$\oint_F (\varphi H - E \ln E) \, df - \int_{F'} (\varphi' H' - - E' \ln E') \, df' = -2 \int_V d\tau \, \varphi K.$$

Haben wir es mit einem parallelebenen Felde zu tun, so ist die totale Krümmung der Potentialflächen gleich Null, $K = 0$. Die mittlere Krümmung H ist gleich der Krümmung des zu den erzeugenden senkrechten Normalschnittes der Potentialfläche,

$$H = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{h \, d\alpha}{df},$$

wo $d\alpha$ der Kontingenzwinkel ist. Es wird in diesem Fall

$$\oint_E \varphi H \, df = \varphi h \int_F d\alpha = 2\pi h \varphi,$$

$$\oint_{F'} \varphi' H' df' = \varphi' h' \int_{F'} d\alpha' = 2\pi h \varphi',$$

so daß

$$2\pi h (\varphi - \varphi') = \oint_{F'} E \ln E \, df - \oint_{E'} E' \ln E' df'.$$

Diese Formel kann übrigens auch ohne Affinorrechnung abgeleitet werden. Bezeichnet in einem ebenen Felde α den Winkel zwischen t und einer beliebigen festen Richtung $\mathfrak{m}$ in der t, n-Ebene, so sieht man durch einfache geometrische Betrachtungen, daß

$$\nabla \alpha = t \frac{\partial \alpha}{\partial t} + n \frac{\partial \alpha}{\partial n} + k t + H n.$$

Folglich ist

$$-H t + k n = \nabla \ln E = \underset{\smile}{\mathfrak{b}} \nabla \alpha, \quad \text{wo } \mathfrak{b} = t \underset{\smile}{n} = \text{const},$$

und

$$\nabla^2 \ln E = \operatorname{div}(\underset{\smile}{\mathfrak{b}} \nabla \alpha) = \mathfrak{b} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \alpha = 0.$$

Zusammenfassung.

Es wird die Bedeutung der totalen Krümmung der Potentialfläche im Laplaceschen Feld abgeleitet. Daraufhin wird ein Verfahren angegeben, um aus dem Kraftlinienbild eines ebenen elektrostatischen Feldes die Kapazität des Feldes zu berechnen.

Berechnung von Integraleffekten mittels der Heaviside-Regel.

Von

K. H. Warfvinge.

Die exakte Berechnung der Integraleffekte zweier gekoppelter Schwingungskreise hat zuerst Macku ausgeführt[1]), und zwar ohne Auflösung der biquadratischen Gleichung, welche die Konstanten der Koppelungsschwingungen als Wurzeln enthält. Eine solche Berechnung ist dadurch möglich, daß die Integraleffekte symmetrische, rationale Funktionen der Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind und sich demnach als rationale Funktionen der Koeffizienten dieser Gleichung ausdrücken lassen, welche die Wurzeln nicht mehr explizite enthalten[2]).

Es soll nun im folgenden, und zwar für induktive Koppelung gezeigt werden, daß die Ausdrücke der Integraleffekte mit Hilfe der Heavisideschen Regel für Ausgleichvorgänge[3]) in besonders einfacher Weise ermittelt werden können. Es macht keine Schwierigkeiten, das Verfahren auf den allgemeinen Fall beliebiger Koppelungsart auszudehnen. In üblicher Schreibweise hat man für die symbolischen Impedanzen oder Widerstandsoperatoren der ungekoppelten Kreise:

$$\mathfrak{Z}_{11} = R_1 + L_1 p + \frac{1}{C_1 p},$$

$$\mathfrak{Z}_{22} = R_2 + L_2 p + \frac{1}{C_2 p},$$

und ferner

$$\mathfrak{Z}_{12} = L_{12} \cdot p = \mathfrak{Z}_{21},$$

wo p für den Operator $\frac{d}{dt}$ gesetzt wird. Dann ist die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \mathfrak{Z}_{11} & \mathfrak{Z}_{12} \\ \mathfrak{Z}_{21} & \mathfrak{Z}_{22} \end{vmatrix} = (L_1 L_2 - L_{12}^2) \cdot \frac{\mathfrak{F}(p)}{p^2} = L_1 L_2 \sigma \cdot \frac{\mathfrak{F}(p)}{p^2}$$

$\mathfrak{F}(p)$ ist eine ganze, rationelle Funktion 4. Grades, und die Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{F}(\gamma) = \gamma^4 + a_1 \gamma^3 + a_2 \gamma^2 + a_3 \gamma + a_4 = 0 \qquad (1)$$

sind die Konstanten (die verallgemeinerten Kreisfrequenzen) der Koppelungsschwingungen. Bei beliebiger elektromotorischer Kraft $\mathfrak{E}$ im Primärkreise gilt symbolisch für die Stromstärken:

$$J_1 = \frac{\mathfrak{E}}{\varDelta : \frac{\partial \varDelta}{\partial \mathfrak{Z}_{11}}} = \frac{\mathfrak{Z}_{22}}{\varDelta} \mathfrak{E} = \frac{1}{L_1 \sigma} \cdot \frac{p\left(p^2 + \frac{R_2}{L_2} p + \frac{1}{C_2 L_2}\right)}{\mathfrak{F}(p)} \mathfrak{E}$$

$$J_2 = \frac{\mathfrak{E}}{\varDelta : \frac{\partial \varDelta}{\partial \mathfrak{Z}_{12}}} = \frac{-\mathfrak{Z}_{21}}{\varDelta} \mathfrak{E} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 \sigma} \cdot \frac{p^3}{\mathfrak{F}(p)} \mathfrak{E}.$$

In dem besonderen Falle, daß zur Zeit $t = 0$ eine konstante elektromotorische Kraft E eingeschaltet wird, oder daß der Primärkondensator mit der Anfangsspannung E entladen wird, gelten nach der Heavisideschen Regel die Beziehungen:

---

1) Macku, Jahrb. f. drahtl. Tel. 2, 251, 1909.

2) Eine andere, auf demselben Prinzip begründete Berechnung zeigte ich im K. Svenska Vetensk. Akad. Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. Bd. 15. 1920.

3) Arch. f. Elektr. 4, 159 u. 305, 1916.

$$J_1 = \sum \mathfrak{A} \cdot e^{\gamma t} = \frac{E}{L_1 \sigma} \cdot \sum \frac{\gamma^2 + \frac{R_2}{L_2}\gamma + \frac{1}{C_2 L_2}}{\mathfrak{F}'(\gamma)} \cdot e^{\gamma t}$$
$$J_2 = \sum \mathfrak{B} \cdot e^{\gamma t} = -\frac{L_{12} E}{L_1 L_2 \sigma} \cdot \sum \frac{\gamma^2}{\mathfrak{F}'(\gamma)} \cdot e^{\gamma t}. \tag{2}$$

Für die Stromeffekte kann man wegen $\int_0^\infty e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t} \cdot dt = -\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2}$ schreiben:

$$\int_0^\infty J_2^2 \cdot dt = -\sum_\mu \mathfrak{B}_\mu \sum_\nu \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\gamma_\mu + \gamma_\nu}$$
$$\int_0^\infty J_1 J_2 \, dt = -\sum_\mu \mathfrak{A}_\mu \sum_\nu \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\gamma_\mu + \gamma_\nu}. \tag{3}$$

Nach der bekannten Formel der Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{F}(x)} = \sum \frac{\mathfrak{C}(\gamma)}{\mathfrak{F}'(\gamma)(x-\gamma)}$$

und also nach (2)

$$\frac{L_1 L_2 \sigma}{L_{12} E} \cdot \sum_\nu \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\gamma_\mu + \gamma_\nu} = \sum_\nu \frac{-\gamma_\nu^2}{\mathfrak{F}'(\gamma_\nu)(\gamma_\mu + \gamma_\nu)} = \frac{\gamma_\nu^2}{\mathfrak{F}(-\gamma_\nu)}.$$

Folglich wird

$$\int_0^\infty J_2^2 \, dt = \left[\frac{L_{12} E}{L_1 L_2 \sigma}\right]^2 \cdot \sum \frac{\gamma^4}{\mathfrak{F}'(\gamma)\,\mathfrak{F}(-\gamma)}.$$

Nun gelten bekanntlich für die Wurzeln γ einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades $\mathfrak{F}(x) = 0$ die n Beziehungen:

$$\sum \frac{1}{\mathfrak{F}'(\gamma)} = 0; \quad \sum \frac{\gamma}{\mathfrak{F}'(\gamma)} = 0; \quad ---- \sum \frac{\gamma^{n-2}}{\mathfrak{F}'(\gamma)} = 0; \quad \sum \frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{F}'(\gamma)} = 1. \tag{4}$$

Dieselben können oft bei der Behandlung einschlägiger Probleme mit Vorteil gebraucht werden. Die Berechnung des Sekundärstromeffektes reduziert sich hiernach auf die Ermittelung des ersten der unbestimmten Koeffizienten α der Wurzelfunktion

$$\frac{\gamma^4}{\mathfrak{F}(-\gamma)} = \frac{-\gamma^3}{2(a_1 \gamma^2 + a_3)} = \alpha_0 \gamma^3 + \alpha_1 \gamma^2 + \dots$$

Aus der letzten Beziehung ergibt sich nach Einführung des Wertes von γ^5 aus (1) die Gleichung

$$a_1(\alpha_1 - a_1 \alpha_0)\gamma^4 + \left(a_1 \alpha_2 + a_3 \alpha_0 - a_1 a_2 \alpha_0 + \frac{1}{2}\right)\gamma^3 + (a_1 \alpha_3 + a_3 \alpha_1 - a_1 a_3 \alpha_0)\gamma^2 +$$
$$+ (a_3 \alpha_2 - a_1 a_4 \alpha_0)\gamma + a_3 \alpha_3 = 0.$$

Dieselbe ist aber weiter nichts als die mit $a_1(\alpha_1 - a_1 \alpha_0)$ multiplizierte Gleichung (1). Durch Vergleichung der Koeffizienten der beiden identischen Gleichungen erhält man zur Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten α vier Gleichungen. Für den vorliegenden Zweck brauchen wir aber nur die beiden folgenden:

$$(a_3 - a_1 a_2 + a_1^3)\alpha_0 - a_1^2 \alpha_1 + a_1 \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$
$$(a_1^2 a_3 - a_1 a_4)\alpha_0' - a_1 a_3 \alpha_1 + a_3 \alpha_2 = 0. \tag{5}$$

Werden diese mit $-a_3$ bzw. a_1 multipliziert und dann addiert, so entnimmt man hieraus sogleich

$$\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2} a_3}{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4} = \frac{a_3}{2 \Delta},$$

wo also zur Abkürzung

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4$$

gesetzt wird. Man findet also nach (4)

$$\int_0^\infty J_2^2 \cdot dt = \left[\frac{L_{12} E}{L_1 L_2 \sigma}\right]^2 \cdot \frac{a_3}{2 \Delta}. \tag{6}$$

Der Ausdruck des Dynamometereffektes kann leicht aus den obigen Überlegungen hergeleitet werden, und zwar ergibt sich nach (2) und (3) für diesen Fall die Wurzelfunktion

$$\frac{\gamma^4 + \frac{R_2}{L_2}\gamma^3 + \frac{\gamma^2}{C_2 L_2}}{\mathfrak{F}(-\gamma)} = -\frac{\gamma^3 + \frac{R_2}{L_2}\gamma^2 + \frac{\gamma}{C_2 L_2}}{2(a_1 \gamma^2 + a_3)} = \beta_0 \gamma^3 + \beta_1 \gamma^2 + \dots$$

β_0 bestimmt sich, wie man gleich sieht, aus fast demselben Gleichungssystem (5) wie α_0, nur mit dem Unterschied, daß die zweite Gleichung anstatt 0 auf der rechten Seite das Glied $\frac{-1}{2 C_2 L_2}$ enthält. Für den Dynamometereffekt folgt somit nach (2):

$$\int_0^\infty J_1 J_2 \, dt = \frac{L_{12}}{L_2} \cdot \left[\frac{E}{L_1 \sigma}\right]^2 \cdot \frac{\frac{a_1}{C_2 L_2} - a_3}{2 \Delta}. \tag{7}$$

Schließlich ergibt sich für die sekundäre Kondensatorspannung nach (2):

$$V_2 = \sum \mathfrak{D} \cdot e^{\gamma t} = \frac{L_{12} E}{L_1 L_2 C_2 \sigma} \cdot \sum \frac{\gamma}{\mathfrak{F}'(\gamma)} \cdot e^{\gamma t}.$$

Es ist

$$\sum_\nu \frac{\mathfrak{D}_\nu}{\gamma_\mu + \gamma_\nu} = \frac{L_{12} E}{L_1 L_2 C_2 \sigma} \cdot \frac{\gamma}{\mathfrak{F}(-\gamma_\mu)}$$

und also, anolog mit (3)

$$\int_0^\infty V_2^2 \cdot dt = -\sum_\mu \mathfrak{D}_\mu \sum_\nu \frac{\mathfrak{D}_\nu}{\gamma_\mu + \gamma_\nu} = -\left[\frac{L_{12} E}{L_1 L_2 C_2 \sigma}\right]^2 \sum \frac{\gamma^2}{\mathfrak{F}'(\gamma)\mathfrak{F}(-\gamma)}.$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung des ersten unbestimmten Koeffizienten der Wurzelfunktion

$$\frac{\gamma^2}{\mathfrak{F}(-\gamma)} = -\frac{\gamma}{2(a_1 \gamma^2 + a_3)}$$

geht offenbar dadurch aus dem System (5) hervor, daß die rechten Seiten bzw. gleich 0 und $-\frac{1}{2}$ gesetzt werden.·.

$$\int_0^\infty V_2^2 \cdot dt = \left[\frac{L_{12} E}{L_1 L_2 C_2 \sigma}\right]^2 \cdot \frac{a_1}{2 \Delta} = (C_1 L_{12} E)^2 \cdot \frac{a_1 a_4^2}{2 \Delta}. \tag{8}$$

Über die Verzerrung der Feld-, Spannungs- und Stromkurve des Dreiphasen-Induktionsmotors[1]).

Von

Hubert Fritze.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Versuchsfelde der Technischen Hochschule Berlin.)

Bezeichnungen.

- a positive ganze Zahl,
- B Feldamplitude,
- c Periodenzahl,
- e EMK in einer Prüfschleife,
- E Spannung einer Wicklung,
- f_w Wicklungsfaktor,
- J Stromstärke,
- m Phasenzahl,
- n Drehzahl,
- p Polpaarzahl,
- q Lochzahl der Wicklung,
- t Zeit in Sek.,
- x positive ganze Zahl oder Winkel oder Strecke,
- Z Zähnezahl,
- λ magnetische Leitfähigkeit,
- ν, μ Feldharmonische bezogen auf die Grundwelle,
- σ_f Faktor der Oberfelder,
- τ Polteilung,
- Φ Kraftfluß,
- ω Winkelgeschwindigkeit.

A. Theoretische Grundlagen.

a) Die höheren Harmonischen infolge der Wicklungsanordnung.

1. Symmetrische Wicklungen. Nach Bragstadt[2]) wird die Kurve der MMK einer Phase einer symmetrischen m-Phasen-Wicklung nach einer Fourierschen Reihe in sinusförmige Harmonische zerlegt, und man erhält bei Proportionalität zwischen MMK und Feld dementsprechend die Kurve der räumlichen Feldverteilung jeder Phase, abhängig von der Wicklungsform, als Summe des sinusförmigen Grundwechselfeldes und sinusförmiger Oberwechselfelder, deren zeitlicher Verlauf sinusförmig ist, sobald die Spannungskurve sich zeitlich sinusförmig verändert. Die geometrische Summe der Felder gleicher Ordnung aller Phasen ergibt das resultierende Feld der Wicklung, dargestellt als Summe von kreisförmigen Drehfeldern. Ihre Ordnung ν ist bei den symmetrischen Wicklungen stets ungerade und gegeben durch

$$\nu_{\text{ungerade}} = (\pm)(2 \cdot m \cdot x \pm 1). \quad (1)$$

Von den ersten Vorzeichen, welche die Drehrichtung bestimmen, entspricht das +-Zeichen dem Drehsinne des Grundfeldes und das —-Zeichen dem diesem entgegen gerichteten. Sie ist im folgenden im Uhrzeigersinne angenommen. Die Drehgeschwindigkeit dieser Oberfelder ist bezogen auf ihre Wicklung allgemein gleich $\frac{1}{\nu}$ von der des Grundfeldes.

Die Oberfelder des Statorgrundstromes induzieren allgemein im Rotor und die des Rotors im Stator Ströme verschiedener Periodenzahlen, deren jeder ein Grundfeld und der Phasenzahl der induzierten Wicklung entsprechende Oberfelder

[1]) Auszug aus der Diss. des Verf. Das Original enthält 107 Abb., davon 69 Oszillogramme. Die praktischen Versuche wurden 1910 im Elektrotechnischen Versuchsfelde der Technischen Hochschule Berlin ausgeführt; die Arbeit wurde im Herbst 1918 der Technischen Hochschule Berlin vorgelegt (Referenten Prof. Dr. Kloß und Prof. Dr. Orlich).

[2]) O. S. Bragstadt, Beitrag zur Theorie und Untersuchung von mehrphasigen Asynchronmotoren. F. Enke. — Arnold, W. T., III und V, 1.

erzeugt, welche wiederum mit verschiedenen Periodenzahlen auf das andere System zurückwirken.

2. Unsymmetrische Wicklungen. Wir bezeichnen eine Wicklung als unsymmetrisch, wenn ihre MMK- und Feldkurve in einem Augenblick nicht unter allen Grundpolen in demselben Sinne, d. h. nicht in bezug auf eine Scheitelachse, periodisch verläuft. Die Unsymmetrie erkennen wir schon daran, daß das Bild der Leiterverteilung in einem Abstande von τ_1 nicht wiederkehrt, wie dies bei allen symmetrischen Wicklungen der Fall ist (τ_1 = Grundpolteilung).

Bei der Urform einer unsymmetrischen Wicklung, einer 1phasigen $\frac{1}{2}$-Loch-Wicklung mit 2 Polen, verläuft die MMK- und Feldkurve nach dem Linienzuge des Bildes 1. Dies trifft jedoch, wie durch Aufnahme der Feldkurven einer solchen Wicklung mit dem ballistischen Galvanometer bei verschiedenen Erregungen festgestellt wurde, nur bei schwacher Sättigung zu, während bei stärkerer eine Zusammendrängung der Kraftlinien in der Nähe der Erregung stattfindet. Für den Augenblickswert F_x im Abstande x von Punkt 1 finden wir

$$F_x = \frac{2}{\pi} F \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \ldots \right).$$

Bild 1.

Zu den ungeraden Harmonischen treten demnach infolge der Unsymmetrie alle geraden Harmonischen.

Bei der 3phasigen $\frac{1}{2}$-Loch-Wicklung mit 2 Polen verläuft die MMK für zwei zeitliche Grenzfälle nach unsymmetrischen Rechtecken (Bild 2), welche die geometrische Summe der 3 Phasenkurven Bild 1 darstellen und aus reinen Drehfeldern aller ungeraden und geraden Ordnungen mit Ausnahme der durch 3 teilbaren zusammengesetzt sind, so daß insgesamt die Drehfelder erzeugt werden

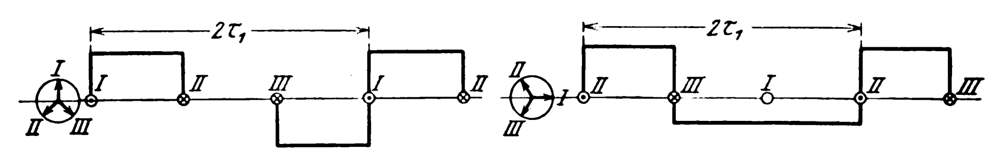


Bild 2.

$$(+)1;\ (-)2;\ (+)4;\ (-)5;\ (+)7;\ (-)8;\ (+)10 \ldots \qquad (2)$$

Ordnung und Drehsinn der geraden Drehfelder ist daher bestimmt durch die Beziehung

$$\nu_{\text{gerade}} = (\pm)(2\,m' \cdot x \mp 2). \qquad (3)$$

Für m in Gleichung (1) und m' in Gleichung (3) ist jetzt eine durch die räumliche Lage und Zahl der Unsymmetriepunkte bestimmte Phasenzahl zu setzen, wobei immer soviel mal $2\tau_1$ einbezogen werden müssen, als zum Einbringen oder Fortnehmen einer Wicklung nötig sind, welche die Symmetrie wiederherstellt. Man bekommt dann die Ordnung bezogen auf diese Zahl von Grundperioden.

Bei mehrpoligen Wicklungen ist, wenn die Periodizität der MMK-Kurve nach $2\tau_1$ wiederkehrt, das Feld geringster Polzahl das Grundfeld mit 2 Polen. Wenn sie erst nach $a \cdot 2\tau_1$ wiederkehrt, haben wir die Zerlegung über a doppelte Polkurven zu erstrecken, und das Feld geringster Polzahl hat dann die afache Polteilung des Grundfeldes, und im Grenzfalle, wo $a = p$ ist, 2 Pole. Beispielsweise bekommen wir bei $m = 3$, $p = 2$, $m = 3$ und $m' = 3$ bezogen auf einen Umgang bei 4 unharmonischen Polkurven die Harmonischen nach (2), von denen die 2te dem Grundfelde entspricht. Da aber m und m' auf die nächst niedere Harmonische der Grundwelle von inverser Drehrichtung bezogen wurde, haben wir den Drehsinn

aller Harmonischen umzukehren und geben dem Grundfelde die Ordnung 1. In bezug auf dieses folgen dann für vorliegende Wicklung die Harmonischen

$$(-)\frac{1}{2};\ (+)1;\ (-)2;\ (+)\frac{5}{2};\ (-)\frac{7}{2};\ (+)4;\ (-)5\ \ldots\ldots \tag{4}$$

Diese 4polige, für alle Phasen gleichwertige Wicklung, die wir eine reine unsymmetrische Wicklung nennen wollen, erzeugt mithin neben den früher abgeleiteten kreisförmigen Drehfeldern ungerader und gerader Ordnung noch solche von gebrochener Ordnung, deren Drehrichtung gerade umgekehrt ist, wie bei den ungeraden Harmonischen, deren Ordnung dem Zähler der gebrochenen Zahl entspricht. Bei ihnen setzen wir stets den Nenner der Ordnung gleich p. Bei den reinen Wicklungen, deren p durch 3 teilbar ist, kann ein Oberfeld $\frac{1}{2}$ nicht auftreten.

Daneben haben wir unreine unsymmetrische Wicklungen zu unterscheiden, bei denen die Phasen ungleichwertig sind. Sie erzeugen immer ein Oberfeld mit 2 Polen.

Die Beziehungen (1) und (3) haben nur eine beschränkte Gültigkeit, weil gewisse unsymmetrische Wicklungen bestimmte Oberfelder gerader und gebrochener Ordnung überhaupt nicht erzeugen können (s. S. 381).

Bei den in der Praxis vorkommenden Wicklungen sind unsymmetrisch:

I. Von Spulenwicklungen: a) solche mit gebrochener Lochzahl je Pol und Phase (z. B. $2\frac{1}{2}$-Loch-Wicklung), b) solche, bei denen bei ungerader Lochzahl die Spulen nicht volle Windungszahl haben, c) gewisse schleichende Wicklungen (Spulenzahl um $1 \gtrless 2\,p$). Hierzu gehören auch Spulenwicklungen, bei denen einzelne am Umfang verteilte Nuten oder Gruppen hiervon unbewickelt sind, wenn deren Abstand von τ_1 abweicht.

Die unter a und b genannten Wicklungen können den Zweck verfolgen, um bei gegebener EMK und Nutenzahl ein passendes Φ zu erreichen, oder um eine Verteilung der Verbindungen der Spulen auf die vordere und hintere Stirnfläche zu ermöglichen.

II. Bei den umlaufenden Wicklungen treten Unsymmetrien ein, a) wenn die unter Ia genannten Verhältnisse vorliegen (z. B. 17 Stäbe je Phase), b) wenn einzelne Nuten, deren Abstand nicht gleich τ_1 ist, aus den unter I genannten Gründen nicht voll oder überhaupt nicht bewickelt sind.

III. Unveränderte Gleichstromwicklungen sind stets unsymmetrisch,

IV. aufgeschnittene Gleichstromwicklungen,

V. abgeänderte Gleichstromwicklungen und

VI. besondere Wicklungen für asynchrone Maschinen werden ganz allgemein immer dann unsymmetrisch, wenn die Verteilung der Stäbe auf die 3 Phasen unter 2 aufeinanderfolgenden Polen verschieden ist.

Die Art und Größe der durch Unsymmetrie hervorgerufenen Verzerrungen der MMK-Kurven wird an einigen Beispielen festgestellt, wobei der Weg der rechnerisch-graphischen Analyse der MMK-Kurven gewählt wurde.

Für das Aufzeichnen der MMK-Kurve hat Kloß folgende Regel angegeben: „Man zeichnet ein geradliniges, d. i. rechteckiges Treppendiagramm, dessen Stufenhöhen jeweils den Durchflutungen der betreffenden Nuten gleich sind, und zieht nach einem vollen Umgange um den Ankerumfang die Schlußlinie und dann zu dieser parallel die Neutrale so durch das Diagramm, daß die Summe der + und — Flächenstücke einander gleich werden. Ist die Summe aller Durchflutungen gleich Null, so ergibt sich eine horizontale Schlußlinie, anderenfalls eine schiefe."

Bei den symmetrischen Kurven schließt sich das Diagramm stets, bei den unsymmetrischen nicht unbedingt. Das auf diese Weise in schiefwinkligen Koordinaten erhaltene Diagramm wird in bezug auf eine horizontale Neutrale in rechtwinklige Koordinaten übergeführt.



Wenn die Unsymmetriepunkte der Wicklung als solche herausgegriffen werden können, wird man eine Vereinfachung erreichen und einen klaren Überblick erhalten, wenn man die unsymmetrische Wicklung durch Einfügen oder Fortnehmen von Stäben symmetrisch macht, für letztere ein Teildiagramm aufzeichnet und dieses mit dem der symmetrischen Wicklung zusammenfaßt.

1. Beispiel. 4polige $2\frac{1}{2}$-Loch-Spulenwicklung (Bild 3). Dies ist eine unreine unsymmetrische Wicklung, bei der m' nicht gleich 3 ist.

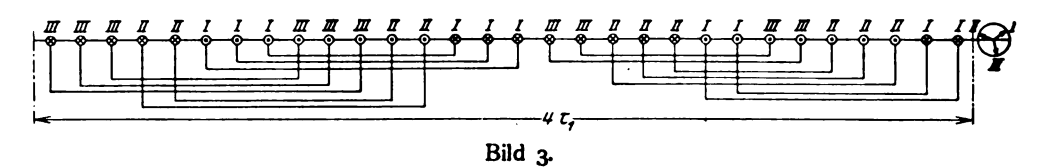


Bild 3.

Die Analyse ergibt, daß die MMK-Kurven der 3 Phasen einmal nicht alle dieselben Harmonischen und dann für Harmonische derselben Ordnung Amplituden von verschiedener Größe und anderem Vorzeichen enthalten. Ihre Zusammensetzung führt zu 2 mit gleicher Winkelgeschwindigkeit gegenläufigen Drehfeldern von verschiedenen Amplituden, deren Summe sinusförmige elliptische Drehfelder von der Drehrichtung der Drehfeldkomponente mit größerer Amplitude ergibt. Es kann also vorkommen, daß die elliptischen Drehfelder eine andere Drehrichtung wie als kreisförmige haben. Die Harmonischen, deren Ordnung bzw. Zähler bei gebrochener Ordnung durch 3 teilbar ist, ergeben 2 gegenläufige Drehfelder mit gleichen Amplituden, denen ein reines Wechselfeld entspricht. Von den Oberfeldern ist das mit 2 Polen am wichtigsten.

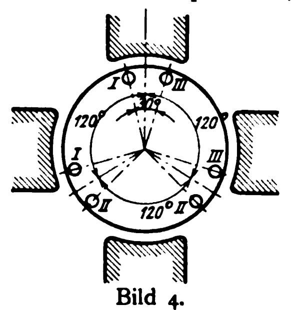


Bild 4.

2. Beispiel. 4polige 5-Loch-Spulenwicklung mit 6 Fehlstäben, vgl. Bild 4. Bei einer solchen Rotorwicklung ist $m = m' = 3$ bezogen auf einen Umgang. Die MMK-Kurve der Fehlstabwicklung setzt sich aus reinen Drehfeldern nach (4) zusammen, mit Ausnahme der geradzahligen, die hier fehlen, weil der Abstand zweier Fehlstäbe einer Phase gleich τ_1 ist (s. S. 381), weshalb Beziehung (3) hier auch nicht anwendbar ist. Von besonderer Bedeutung ist das hier auftretende Oberfeld $\frac{1}{2}$, dessen MMK eine Amplitude von 11,8% von der der Grundwelle hat und starke einseitige magnetische Züge bewirkt. Die Folge dieser bei einigen Motoren angewendeten Wicklungsanordnung waren ernste Betriebsschwierigkeiten, die einen Umbau der Maschinen erforderlich machten[1]).

3. Beispiel. 6polige aufgeschnittene Gleichstrom-Wellenwicklung für 54 Nuten, 3 parallele Zweige (Bild 5). Bei gleicher Stromverteilung auf die 3 Zweige dieser reinen unsymmetrischen Wicklung, bei welcher dieselbe Leiterverteilung immer nach $2\tau_1$ wiederkehrt, bekommen wir MMK-Kurven, deren Periodizität sich 3 mal wiederholt. Innerhalb jeder dieser 3 Teile ist die Kurve unsymmetrisch und für eine Phase aus einer symmetrischen 2-Loch-MMK (Kurve a) mit überlagerter unsymmetrischer MMK der beiden äußeren Nuten der Spulenreihen mit 4 Löchern (Kurve b) zusammengesetzt. Die geometrische Summe der aus der Analyse folgenden Wechselfelder ergibt resultierende Drehfelder von den Ordnungen nach (2), die wir auch mit Hilfe der Beziehung 1 und 3 finden konnten, weil hier $m = m' = 3$ bezogen auf $2\tau_1$ ist. Die 3phasige Zusatzwicklung, durch welche unsere unsymmetrische Wicklung symmetrisch wird, ist unter dieser angedeutet. —

[1]) Vgl. S. 395, Anm. 1.

Da die Sättigung unter 2 aufeinander folgenden Polen bei unsymmetrischen Wicklungen manchmal sehr verschieden ist (vgl. z. B. Bild 2), werden die Kraftlinien der magnetisch stärker belasteten Pole sich zu verbreitern suchen und auf ein Minimum des magnetischen Widerstandes einstellen. Diesem Bestreben entspringt eine Feldverschiebung, welche eine Änderung des theoretischen Kraftlinienverlaufes zur Folge hat und hier unberücksichtigt blieb.

Was die elektrische Wirkung der Oberfelder gerader Ordnung anbetrifft, so können sie in einer Schleife von τ_1 Breite, sowie in symmetrischen Wicklungen und auch unsymmetrischen mit um τ_1 entfernten Fehlstäben oder Zusatzstäben keine EMK induzieren. Bei den Oberfeldern gebrochener Ordnung rechnen wir am besten mit dem Wicklungsfaktor. Bei einer q-Loch-Schleife oder -Wicklung von τ_1 Breite ist dieser für $p = 2$ gleich $f'_{w\nu} = \frac{f_{w\nu}}{\sqrt{2}}$, worin

$$f_{w\nu} = \frac{\sin \frac{\nu}{m} \cdot \frac{\pi}{2}}{q \sin \frac{\nu}{qm} \cdot \frac{\pi}{2}} \tag{5}$$

Bild 5.

ist. Wir können sagen, daß $f_{w\nu}$ noch mit einem zusätzlichen Wicklungsfaktor der zum Oberfeld schmäleren oder breiteren Spule multipliziert werden muß. Bei symmetrischen Wicklungen schließt sich das Vektordiagramm für die EMK der einzelnen Spulenseiten bei einem Umgange, daher bleiben die Oberfelder gebrochener Ordnung auf sie wirkungslos. Dies alles folgt schon aus der Überlegung, daß ein Oberfeld beliebiger Ordnung nur dann eine EMK in einer beliebigen Wicklung induzieren kann, wenn diese das Oberfeld auch selbst erzeugen kann (und umgekehrt).

Der Einfluß der Oberfelder zeigt sich in der Größe der Faktoren σ_f, $\left(1 - \frac{1}{\sigma_f}\right) 100$, $f_w = f_{w_1} \cdot \sigma_f$ (vgl. Seite 396), welche für einige Wicklungen berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

Wicklungsart	f_{w_1}	σ_f	f	$\left(1 - \frac{1}{\sigma_f}\right)100\%$
1½-Loch-Wicklung	0,96	1,057	1,014	5,4
5-Loch-Wicklung mit 6 Fehlstäben (Bild 4)	0,958	1,016	0,972	1,8
Aufgeschn. Gleichstrom-Wellenwicklung (Bild 5)	0,88	1,023	0,9	2,25



Für die $1\frac{1}{2}$-Loch-Wicklung ist der letzte Faktor etwas größer als der Mittelwert einer 1-Loch- und 2-Loch-Wicklung, welcher 5,24% ausmacht; die Spannungserhöhung durch die Oberfelder erfährt hier eine geringe Vermehrung.

Bei der $2\frac{1}{2}$-Loch-Wicklung, Bild 3, müßten Mittelwerte aus den Werten für die ungleichen Phasen genommen werden. Um diese umständlichen Rechnungen zu umgehen, kann man sich in der Praxis mit angenäherten Werten begnügen, die sich durch Einsetzen von $q = 2\frac{1}{2}$ ergeben.

Bei der 5-Loch-Wicklung mit Fehlstäben, Bild 4, ist für gebrochenes $\nu: fw_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2pq} = \frac{\sqrt{2}}{18} = 0{,}0787$, für ungerades ν finden wir den Faktor durch Einsetzen von $q = 4\frac{1}{2}$ in Gleichung (5). Der Faktor der Spannungserhöhung dieser Wicklung liegt zwischen denen einer 2-Loch- und 3-Loch-Wicklung, d. h. die 5-Loch-Wicklung wird durch die Unsymmetrie infolge des Fortlassens der Stäbe in elektrischer Hinsicht verschlechtert, woran das Oberfeld $\frac{1}{2}$ den größten Anteil hat.

Die Wicklungsfaktoren für die aufgeschnittene Gleichstromwicklung, Bild 5, finden wir am einfachsten aus dem Vektordiagramm.

3. Käfigwicklungen. Die Phasenzahl einer reinen Käfigwicklung oder einer kombinierten Kurzschluß- und Phasenwicklung ist gleich der Stabzahl auf einen Pol des betrachteten Feldes, ihre Windungszahl gleich 1. Die Kennzeichen ihrer Symmetrie oder Unsymmetrie sind dieselben wie bei den Spulenwicklungen. Die Ordnungen der erzeugten Oberfelder finden wir, indem wir in Beziehung 1 die jeweilige Phasenzahl einsetzen.

b) Die höheren Harmonischen infolge der Nutung des Stator- und Rotoreisens.

1. Gerade Nuten. Die Nutung bewirkt bei Drehung des Rotors Schwankungen 1. der magnetischen Leitfähigkeit des Luftraumes a) für den Hauptfluß, λ_L, dadurch, daß sich infolge der Schlitzung die Breite des sich gegenüberstehenden Stator- und Rotoreisens verändert, und b) für den Streufluß um die Nutenköpfe, λ_K, ebenfalls als Folge der Schlitzung[1]), ferner 2. solche in der räumlichen und zeitlichen Verteilung des Hauptfeldes. Die Schwankungen unter 1a haben bei gleichbleibendem E_p solche des Magnetisierungsstromes zur Folge, die sich durch Auftragen der reziproken Werte der sich jeweils gegenüberstehenden Eisenbreiten bildlich zeigen lassen, wobei nach Drehung des Rotors um eine Rotornutteilung soviel Schwankungen im Strome auftreten, als die halbe Zahl der während dieser Drehung möglichen Symmetriestellungen der Stator- und Rotornuten beträgt. Sie sind sowohl im Effektivwerte bei allmählicher Drehung (am Stromzeiger) als auch bei rascher Drehung (im Oszillogramm) zu sehen. Wenn wir den Einfluß der pulsierenden Streuspannung, 1b, auf die EMK einer Phase betrachten, müssen wir die Veränderung von $\Sigma \cdot \lambda_K$ für alle Nuten der Phase ins Auge fassen und finden, daß bei Drehung des Rotors die gleiche Anzahl von Pulsationen stattfindet, wie für λ_L. Zuweilen entstehen überlagerte Pulsationen einfacher Zahnfrequenz (vgl. Bild 27). Die pulsierende Streuspannung bewirkt Schwankungen der Phasenspannung und des Stromes, wobei sich diese mit denen unter 1a zusammensetzen.

Die Schwankungen unter 2. lassen sich vorteilhaft durch die Drehfeldtheorie darstellen. Bei einem magnetisierten Zahne tritt zwischen Zahnmitte und Nutmitte bei geschlossenen oder offenen Nuten eine Sättigungsdifferenz, ΔB, auf. Wir erhalten, ähnlich wie bei festen Polen, für jeden Zahn eine „Zahnfeldkurve", deren Amplitude mit wachsender Sättigung zunimmt, weil die dünnen Zahnecken bald gesättigt sind, und der Fluß daher mit zunehmendem Zahnfluß immer mehr in den mittleren, weniger

[1]) Vgl. Arnold, W. T. V 1, S. 52.



gesättigten Teil des Zahnes gedrängt wird. Zur Ermöglichung einer analytischen Behandlung dieser Erscheinungen setzen wir ΔB proportional der örtlichen Luftsättigung und zerlegen die Zahnfeldkurve in Harmonische. Für das Grundfeld der Maschine ergeben sich das Zahngrundfeld $\nu_{Z_1} = \frac{Z}{p}$ von der doppelten Polteilung gleich einer Zahnteilung und Zahnoberfelder $\nu_{Z_\nu} = \frac{Z}{p} z_\nu$ mit $z_\nu = \frac{\nu_{Z_\nu}}{\nu_{Z_1}}$ mal soviel Polen. Hier werden neben Harmonischen ungerader Ordnung auch solche gerader Ordnung auftreten, was von dem Sättigungsgrade und der Zahn- und Nutenform abhängt. Wir setzen ferner voraus, daß die Amplituden aller Zahnharmonischen der örtlichen Luftsättigung proportional sind. Gehen wir nun zum Drehfeld über, und bedeuten B_{Z_1} die max. Amplitude und $B_{Z_{1x}}$ den Augenblickswert im Abstande x von der in eine Zahnmitte fallenden Scheitelachse des Grundfeldes für das Zahngrundfeld, so gilt für das Grundfeld der Wicklung mit ω_1:

$$B_{Z_{1x}} = B_{Z_1} \cdot \sin\left(\omega_1 \cdot t - \frac{x}{\tau}\pi\right) \cdot \cos\frac{Z}{p} \cdot \frac{x}{\tau}\pi \qquad \text{oder}$$

$$B_{Z_{1x}} = \frac{B_{Z_1}}{2} \sin\left[\omega_1 t - \left(\frac{Z}{p} + 1\right)\frac{x}{\tau_1}\pi\right] + \frac{B_{Z_1}}{2} \sin\left[\omega_1 t + \left(\frac{Z}{p} - 1\right)\frac{x}{\tau_1}\pi\right]$$

Bild 6.

Wir können sagen: Das Zahngrundfeld $\nu_Z = \frac{Z}{p}$ des Grunddrehfeldes ist ein Wechselfeld und läßt sich in zwei gegenläufige Drehfelder $\nu'_{Z_1} = (+)\left(\frac{Z}{p} + 1\right) = (+)(2mq + 1)$ und $\nu''_{Z_1} = (-)\left(\frac{Z}{p} - 1\right) = (-)(2mq - 1)$ mit gleichen Amplituden und den Winkelgeschwindigkeiten $+\frac{\omega_1}{\nu'_{Z_1}}$ und $-\frac{\omega_1}{\nu''_{Z_1}}$ zerlegen. Diese Zahndrehfelder sind daher von derselben Art wie die Wicklungsoberfelder des Grundstromes.

Bei $m = 3$ und $q = 1$ ist $\frac{Z}{p} = 6$ und $\nu'_{Z_1} = (-)\,5$, $\nu''_{Z_1} = (+)\,7$; bei $m = 3$ und $q = 2$ ist $\frac{Z}{p} = 12$ und $\nu'_{Z_1} = (-)\,11$, $\nu''_{Z_1} = (+)\,13$. Für letztere Wicklung sind in Bild 6 für einen Augenblick das Zahngrundfeld und seine Ersatzdrehfelder aufgezeichnet. Die Hüllkurve der resultierenden Zahngrundwelle entspricht der Lage nach dem Grunddrehfelde.

In gleicher Weise erhalten wir durch das Grundfeld die Zahnoberfelder ν_{Z_ν} mit den Ersatzdrehfeldern

$$\nu'_{Z_\nu} = (+)\left[\frac{Z}{p} z_\nu + 1\right] \text{ und } \nu''_{Z_\nu} = (-)\left[\frac{Z}{p} z_\nu - 1\right], \qquad (6)$$

und ferner durch ein Oberfeld ν die Zahnfelder

$$(+)\left(\frac{Z}{p}z_\nu \pm \nu\right) \text{ und } (-)\left(\frac{Z}{p}z_\nu \mp \nu\right) \qquad (7)$$

Die Ordnungen der Zahnfelder nach Beziehungen (5 bis 7) sind dieselben wie für die Wicklungsfelder eines Käfigs mit gleicher Stabzahl.

Das Zahngrundfeld des Stators wirkt bei einer synchronen Drehzahl von n_1 und einer Rotordrehzahl von n_0 in der Minute auf den Rotor mit der Frequenz zurück.

$$\frac{60}{p}\left[\pm n_1 - \left(\frac{Z_1}{p} \pm 1\right)n_0\right], \qquad (8)$$

und das des Rotors auf den Stator bei der geschlüpften Drehzahl von n_S mit

$$\frac{60}{p}\left[\pm n_S + \left(\frac{Z_2}{p} \pm 1\right)n_0\right]. \qquad (9)$$

Wir erhalten daher Interferenzwellen im Rotor von $-Z_1 \cdot \frac{n_0}{60}$ Per./Sek. von der Schwebungsfrequenz $2\,c_S$ und im Stator solche von $Z_2 \cdot \frac{n_0}{60}$ von der Schwebungsfrequenz $2\,c_1$, derern Knotenpunkte meist in den Nullwerten der Grundschwingung liegen.

In ähnlicher Weise wirken die Zahnoberfelder z_ν; sie ergeben im anderen Systeme Interferenzoberschwingungen, und zwar im Rotor von

$$-z_\nu \cdot Z_1 \cdot \frac{n_0}{60} \text{ Per./Sek.} \qquad (10)$$

und im Stator von

$$z_\nu \cdot Z_2 \cdot \frac{n_0}{60} \text{ Per./Sek.}, \qquad (11)$$

d. h. sie erscheinen mit z_ν-facher Frequenz des Zahngrundfeldes. —

Setzen wir in Gleichung (5)

$$\nu = z_\nu \cdot \frac{Z}{p} \pm 1 = z_\nu \cdot 2\,mq \pm 1,$$

so ergibt sich

$$f\,w_\nu = \pm\, fw_1,$$

d. h. die Ersatzdrehfelder des Zahngrundfeldes und ihre Harmonischen, sowie die gleichpoligen Feldharmonischen der Wicklung haben den Wicklungsfaktor des Grundfeldes und zeichnen sich vor allen anderen Oberfeldern durch ihre bedeutende Größe aus. Die Kurve $fw_\nu = \text{funct.}(\nu)$ hat Maxima von ± 1 für $\nu = a \cdot \frac{Z}{p}$ (die es jedoch nicht gibt); ihre Minima liegen in der Mitte zwischen den Maximalwerten. Innerhalb zweier Maximaintervalle hat fw_ν immer dieselben relativen Werte (vgl. die Tabelle Seite 387). Diese beiden Felderarten gleicher Polzahlen desselben Teiles der Maschine setzen sich nun zu resultierenden Feldern zusammen, wobei sie sich verstärken oder abschwächen können. Im Stator addieren sich z. B. die beiden Felder $\frac{Z}{p} - 1$, und es subtrahieren sich die der Ordnung $\frac{Z}{p} + 1$ annähernd. Bei der 2. Harmonischen dieses Feldes, $\frac{Z}{p}2 \pm 1$, ist dies gerade umgekehrt, usf.

2. Schräge Nuten. Die Abschrägung einer Nut wirkt wie eine Verteilung einer Wicklung auf gleiche Breite, und es kommt zu dem Wicklungsfaktor bei geraden Spulenseiten noch ein Nutenfaktor hinzu, der wie bei verteilten Wicklungen zu berechnen ist[1]). —

[1]) Vgl. Arnold, W. T. III.

An den Oszillogrammen von Zahnoberschwingungen sieht man, daß die kleineren Zacken (Zahnoberschwingungen) gegenüber den größeren Zacken (Zahngrundschwingung) ihre relative Lage verändern. Im Oszillographen wandern sie scheinbar. Es läßt sich zeigen, daß Punkte gleichen horizontalen Abstandes (z. B. die Amplituden) einer höheren Oberschwingung von bestimmter Ordnung auf ganz bestimmten Kurven — „Markierungslinien" — in bezug auf die niedere Oberschwingung liegen. Beispielsweise sind bei einer reinen Schwingung 30-facher Grundfrequenz die Markierungslinien für Oberschwingungen der Ordnung 61 und 59, 102 und 118 usw., Sinuslinien bestimmter Phase von der doppelten Grundperiodenlänge und gleicher Amplitude wie die der reinen Schwingung. Bei den durch die Zahn- und Wicklungsfelder induzierten Oberschwingungen ist die Welle niederer Frequenz nicht rein, sondern eine Interferenzwelle, die aus jener durch Multiplikation mit dem cos des Abstandswinkels von der durch den Bauch gelegten Achse entsteht. Daher sind auch die Markierungslinien hier Sinuslinien multipliziert mit dem cos dieses Winkels.

c) Die höheren Harmonischen herrührend von den magnetischen Eigenschaften des Eisens.

1. Permeabilität. Die stärkere Sättigung der unter dem Maximum der MMK liegenden Zähne bewirkt bekanntlich, was bei der Drehfeldtheorie vernachlässigt wurde, eine seitliche Verdrängung des Kraftflusses, und auch bei sinusförmig verteilter Wicklung, d. h. bei sinusförmiger MMK eine symmetrische Abflachung der Feldkurve (des Grundfeldes). Die Harmonischen μ der abgeflachten Feldkurve sind von ungerader Ordnung und haben die μfache Frequenz und die Drehrichtung und -Geschwindigkeit des Grundfeldes. Durch die Permeabilität werden auch die Zahnfeldkurven im Scheitel des Drehfeldes abgeflacht; mit der 3. Harmonischen des Grundfeldes führt dies zu weiteren Zahnfeldern, von denen die Ersatzdrehfelder $(\pm)\left(\frac{Z}{p} \pm 3\right)$ am wichtigsten sind.

Ferner bewirkt die Veränderlichkeit der Permeabilität eine symmetrische Zuspitzung des ursprünglich sinusförmigen Magnetisierungsstromes, dessen Kurve daher eine 3. Harmonische enthält.

2. Hysterese. Durch die Hysterese kann die Feldkurve nicht verzerrt werden, vielmehr wird nur der Magnetisierungsstrom beeinflußt, indem dessen Kurvenform auch bei zeitlich und räumlich sinusförmigem Feldverlaufe durch einen Blindstrom 3facher Grundfrequenz unsymmetrisch verzerrt wird. Die Wirkung der Hysterese bleibt somit auf die Statorstromkurve beschränkt.

B. Versuche und Ergebnisse.

Vorwort. Die Kurven von Feld, Spannung und Strom sind bekanntlich im allgemeinen aperiodisch, weil die Frequenz aller im Stator und Rotor induzierten Oberschwingungen verschieden und von der relativen Drehzahl der Oberfelder zum induzierten Systeme und somit von der Rotordrehzahl abhängig ist. Im Oszillographen äußert sich dies durch ein scheinbares Wandern der Oberwellen, falls auf die Bildtrommel keine ganze Zahl derselben entfällt.

Das Grundfeld und die Oberfelder eines Grund- oder Oberstromes haben dessen relative Frequenz; ihre EMKen erscheinen daher z. B. für die Grundströme auf demselben Teile nicht als Oberschwingungen, sondern sie vergrößern nur die Amplitude der Grundwelle. Um diese Oberfelder, zu denen auch die Zahnfelder zu rechnen sind, sichtbar und meßbar abzubilden, müssen wir eine zur betrachteten Wicklung umlaufende Prüfschleife oder Wicklung zu Hilfe nehmen. Dagegen bilden



Abmessungen der

Nr.	Spg. Volt	PS	Synchr. Drehzahl	Polzahl	Phasen im Rotor	Zähnezahl		Lochzahl		Leiterzahl je Nut	
						Stator	Rotor	Stator	Rotor	Stator	Rotor
I	220	3,5	1500	4	3	24	60	2	5	58	2
II	500	16	1000	6	2	48	72	3	8	16	3
III	220	7	1500	4	Käfig	48	53	4	53 Stäbe	14	1
IV	500	9 12 18 25	500 750 1000 1500	12, 6 [1]) 8, 4 [2])	Käfig	72	100 schräg	2Gleichstrom-Wicklg.	100 Stäbe	[1]) 26 [2]) 16	4 parallel

sich die Oberfelder der Permeabilität immer als Oberschwingungen der Grundschwingung ab. Für die Aufnahme dienten 1-Loch- und Mehrloch-Prüfschleifen von τ_1 Breite, deren einzelne Drähte in der Mitte der Nutenschlitze festgeklebt wurden.

Für die Einlochschleife von τ_1 Breite im Luftspalte ist, wenn Φ_1 den Luftspaltfluß des Grundfeldes, $\Sigma \Phi_{w_\nu}$ den aller Wicklungsoberfelder und e_1 die EMK des Grundfeldes bedeutet, die totale EMK der Wicklungsfelder des Grundstromes bei Synchronismus

$$e = 4{,}44 \cdot c_1 \left(\Phi_1 + \Sigma \Phi_{w_\nu}\right) \cdot 10^{-8} = e_1 \left[1 + \Sigma\left(\frac{f w_\nu}{\nu^2 \cdot f w_1}\right)\right] = e_1 \left[1 + \Sigma\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right] = e_1 \cdot \sigma_{f_{q_{1},1}} \text{Volt} \quad (12)$$

und es läßt sich daher e_1 aus den Oszillogrammen in einer Einlochschleife aus der Grundwelle e der EMK unter Berücksichtigung der EMK der primären Zahnfelder ermitteln.

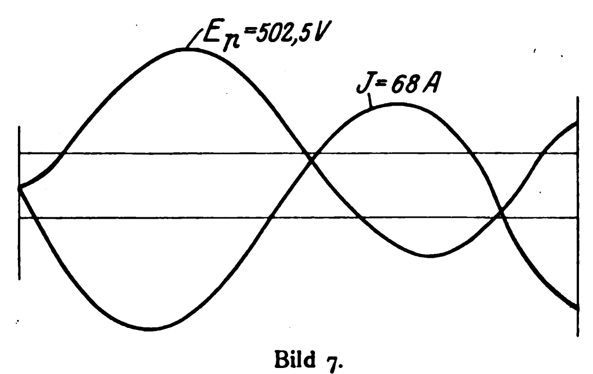


Bild 7.

Für vorliegende Untersuchungen war die Spannungskurve eines 6poligen 50-kVA-Generators für 500 V mit 3-Loch-Wicklung (Lahmeyer) gut geeignet. Sie ist zusammen mit der Stromkurve für induktionsfreie Vollbelastung in Bild 7 wiedergegeben und, ebenso wie bei Leerlauf, praktisch sinusförmig. Zur Untersuchung einiger 220-V-Motoren mußte ein 7-kVA-Mantel-Transformator vorgeschaltet werden, dessen Einfluß, wie durch vergleichende Aufnahmen festgestellt wurde, vernachlässigt werden konnte.

untersuchten Motoren.

Leiterabmessungen (Kupfer) Stator	Leiterabmessungen (Kupfer) Rotor	Statordurchmesser mm außen	Statordurchmesser mm innen	Rotordurchmesser mm außen	Rotordurchmesser mm innen	Ankerlänge mm einschl. Isolation	Hersteller
1,6 Φ 2 parallel	2×8	286	166,25	165,75	30	80	SSW
2,7 Φ	Litzen 3,4×6,7	410	408,3	310	105	105	Union
3,2 Φ	5×12 Stäbe / 10×20 Bronze-Ringe	398	245	244,2	110	80	SSW
[1]) 2,2 Φ / [2]) 2,6 Φ	4 Φ Stäbe / 560 mm² Bronze-Ringe	600	417,6	416	75	160 einschl. 2 Schlitzen von je 10	Oerlikon

1. Der dreiphasige Rotor. Motor Nr. I mit Nutenschnitt nach Bild 8.

Tabelle der Wicklungsfaktoren für $q_1 = 2$ und $q_2 = 5$.

f_{w_ν}	f_{w_1}	f_{w_5}	f_{w_7}	$f_{w_{11}}$	$f_{w_{13}}$	$f_{w_{17}}$	$f_{w_{19}}$	$f_{w_{23}}$	$f_{w_{25}}$	$f_{w_{29}}$	$f_{w_{31}}$	$f_{w_{59}}$	$f_{w_{61}}$
$q_1 = 2$	0,966	0,259	−0,259	−0,966	−0,966	−0,259	0,259	0,966	0,966	0,259	−0,259	−0,966	−0,966
$q_2 = 5$	0,957	0,200	−0,150	−0,109	0,102	0,102	−0,109	−0,150	0,200	0,957	0,957	0,957	0,957

Bild 9 ist die Kurve der EMK, welche bei Synchronismus und offenem Rotor in einer Einlochschleife auf dem Stator bei $E_p = 220$ V. induziert wird. Sie wird, abgesehen von der Abflachung durch die Permeabilität, von den Rotorzahnfeldern

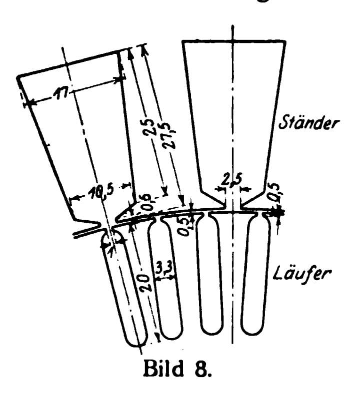


Bild 8.

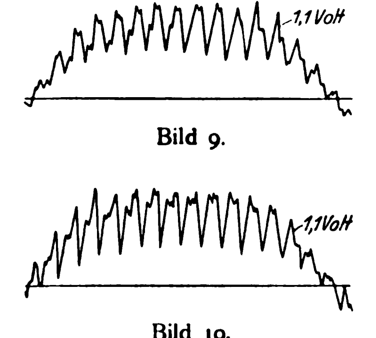


Bild 9.

Bild 10.

induziert, und besteht aus einer stärkeren Interferenzwelle von der Zahngrundfrequenz $30\,c_1$, die nach Gleichung (9) durch die Ersatzdrehfelder (—) 29 und (+) 31 des Zahngrundfeldes induziert wird, und darüber gelagerten kleineren Oberschwingungen von den Frequenzen $59\,c_1$ und $61\,c_1$, die von den gemäß Beziehung (6) entstehenden Ersatzdrehfeldern der 2. Zahnharmonischen des Rotors, (—) 59 und (+) 61, herrühren und nach Beziehung (11) die Interferenzwelle $60\,c_1$ erzeugen. Diese induzierten Oberwellen beweisen die praktisch genügende Richtigkeit der früher angenommenen Feldverteilung unter den Zähnen. Bei geschlossenem Rotor induzieren die Statoroberfelder

$\nu_1 = (-)5;\ (+)7;\ (-)11;\ (+)13 \ldots\ldots (-)29;\ (+)31; \ldots\ldots (-)59;\ (+)61 \ldots$
im Rotor Oberströme von den Frequenzen

$$c_1(\pm 1 - \nu_1) = -6c_1,\ -6c_1;\ -12c_1;\ -12c_1; \ldots -30c_1;\ -30c_1; \ldots -60c_1;\ -60c_1 \ldots, \quad (13)$$

von denen auf den Stator die Grundfelder mit den Frequenzen

$$c_1(2 \mp \nu_1) = +7c_1;\ -5c_1;\ +13c_1;\ -11c_1; \ldots +31c_1;\ -29c_1; \ldots +61c_1;\ -59c_1 \ldots \quad (14)$$

zurückwirken. Von diesen sind die Oberschwingungen $61\,c_1$ und $59\,c_1$ am stärksten, weil $f_{w_{59}}$ und $f_{w_{61}}$ für Stator- und Rotorwicklung groß sind (vgl. obige Tabelle). Es ergab sich das Bild 10.

Zur Auswertung können wir auch die bei geschlossenem Rotor aufgenommenen Kurven benutzen, weil sie hinsichtlich der Zahngrundschwingung von den bei offenem Rotor erhaltenen wenig abweichen und zugleich die Entstehung der Kurvenform der primären Spannung zeigen.

In der EMK-Welle in einer 2-Lochschleife, Bild 11, tritt die 2. Zahnharmonische des Rotors deutlicher hervor, weil $f_{w_{59}}$ und $f_{w_{61}}$ für $q_1 = 2$ viel größer sind als $f_{w_{29}}$ und $f_{w_{31}}$ (vgl. obige Tabelle). Diese Oberschwingungen werden durch die Rotoroberströme $60\,c_1$ nach (13) und (14) verstärkt.

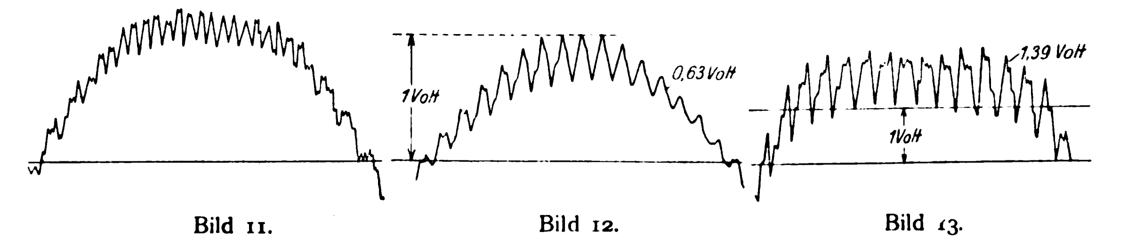


Bild 11. Bild 12. Bild 13.

In Bild 12 sehen wir die EMK in einer 1-Lochschleife bei $E_p = 125$ Volt und in Bild 13 dieselbe bei $E_p = 270$ Volt. Aus ihnen kann nun das Rotorzahngrundfeld berechnet werden, wie dies für Bild 12 gezeigt werden soll.

Wir finden für die max. Amplitude der Zahn-EMK $\sqrt{2}\,e_{Z_{30}}$, die wir gleich der Summe ihrer Ersatzspannungen setzen, aus dem Verhältnis der Amplitude zu dem aus den Harmonischen berechneten Voltmaßstabe

$$e_{Z_{30}}\sqrt{2} = (e_{Z_{29}} + e_{Z_{31}})\sqrt{2} = 0{,}148 \text{ Volt},$$

und, da nach Beziehung (9) für $n_S = 0$: $c_{29} = 29\,c_1$ und $c_{31} = 31\,c_1$ ist, so erhalten wir

$$\frac{0{,}148}{\sqrt{2}}\,10^8 = 4{,}44 \cdot 29 \cdot 50\,\Phi_{Z_{29}} + 4{,}44 \cdot 31 \cdot 50 \cdot \Phi_{Z_{31}}.$$

Da ferner $B_{Z_{29}} = B_{Z_{31}}$, also $\dfrac{\Phi_{Z_{29}}}{\Phi_{Z_{31}}} = \dfrac{31}{29}$ ist, so folgt $\Phi_{Z_{29}} = 815$; $\Phi_{Z_{31}} = 762$; $B_{Z_{31}} = B_{Z_{29}} \cong 350$ und $B_{Z_{30}} = B_{Z_{29}} + B_{Z_{31}} \cong 700$.

Die Grundwelle der EMK entspricht einer effektiven EMK von 0,642 V. Diese Spannung setzt sich aus der EMK des Grundfeldes und aus den EMKen der resultierenden Wicklungs- und Zahnfelder des Stators zusammen. Es genügt, wenn wir von den Zahnfeldern nur die 1. und 2. Harmonische berücksichtigen. Wir finden später $B_1 = 4120$, und es wird $B_{w_{11}} = 375$, $B_{w_{13}} = 315$, $B_{w_{23}} = 180$, $B_{w_{25}} = 165$. Für die Zahngrundfelder des Stators nehmen wir (vgl. S. 392) $B_{Z_{11}} = B_{Z_{13}} \cong 300$ und schätzen $B_{Z_{23}} = B_{Z_{25}} \cong 50$. Dann wird $B_{11} \cong 675$, $B_{13} \sim 15$; $B_{23} \sim 130$; $B_{25} \sim 215$, und ferner

$$\Phi_{w_{11+13+23+25}} = 4860,$$
$$\Phi_{11+13+23+25} = 5150,$$
$$e_{w_{11+13+23+25}} = 0{,}0108 \text{ Volt},$$
$$e_{11+13+23+25} = 0{,}0114 \text{ Volt},$$

und schließlich bei $\sigma_{f_{s,1}} = 1{,}0435$:

$$e_1 \cdot 1{,}0435 - 0{,}0108 + 0{,}0114 = 0{,}642.$$

Dies ergibt

$$e_1 = 0{,}615 \text{ Volt},$$
$$\Phi_1 = 276{,}5 \cdot 10^3$$

und

$$B_1 = \frac{276{,}5 \cdot 10^3}{\frac{2}{\pi} \cdot 13{,}04 \cdot 8{,}1} = 4120.$$

Aus der maximalen Ordinate der Grundwelle in Bild 12 finden wir $B_L = 4020$.

Die Ergebnisse dieser für die Bilder 10, 12, 13 durchgeführten Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt, ebenso noch die maximale Zahnsättigung $B_{Z_{II}\,max,\,id}$.

Bild	E_p Volt	B_1	B_L	$B_{Z_{II}\,max,\,id}$	$B_{Z_{30}}$	$\frac{B_{Z_{30}}}{B_L}$ 100%	ΔB_{max}	$\frac{\Delta B_{max}}{B_L}$ 100%
12	125	4120	4020	11 200	700	17,5	1400	35
10	220	6950	6100	17 000	1900	31,0	3800	62
13	270	8600	7270	20 000	1700	24,0	3400	48

Hiernach wächst also die Amplitude des Zahngrundfeldes absolut und relativ mit B_L und nimmt nach Überschreitung des Knies der Magnetisierungskurve wieder langsam ab, d. h. der Einfluß des Schlitzes und der Zahnecken auf die räumliche Feldverteilung im Luftspalte verschwindet mit wachsender Sättigung immer mehr, und das Feld wird immer gleichförmiger, weil die Kraftlinien in erhöhtem Maße durch den Nutenraum treten.

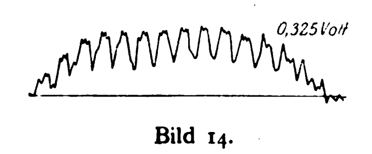


Bild 14.

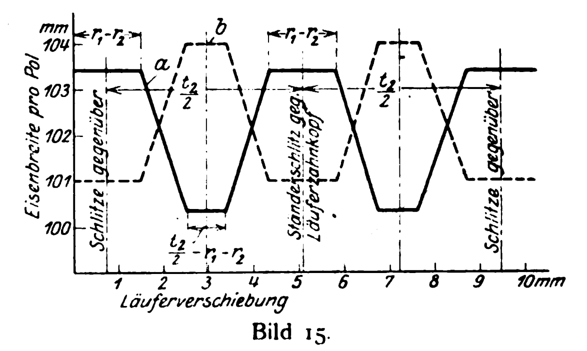


Bild 15.

Das für die Beurteilung eines genuteten Eisenkörpers hinsichtlich der Zahnfelder wichtige Verhältnis $\frac{\Delta B_{max}}{B_L} 100$ hängt jedoch noch ganz wesentlich von der Luftspaltlänge ab. Unter Vernachlässigung einer etwa vorhandenen 3. Zahnharmonischen ist hier $\Delta B_{max} = 2 \cdot B_{z_{30}}$, und wir bekommen dann die in die Tabelle eingetragenen Werte.

In gleicher Weise können wir die Statorzahnfelder auf dem Rotor darstellen und von den Wicklungsoberfeldern trennen, wenn der Rotor erregt und entgegen dem Drehfelde auf synchrone Drehzahl angetrieben wird.

Die von den Zahnfeldern hervorgerufenen räumlichen und zeitlichen Schwankungen des Kraftflusses sind auch im Stator- und Rotoreisen und nicht nur an den Zahn-

oberflächen vorhanden, weil sich die Kraftlinien dieser Oberfelder zum großen Teile über den Rücken von Stator und Rotor und nur zu einem kleineren Teile unmittelbar über die Zahnköpfe schließen. Dies zeigt die Welle der EMK, welche in einer um Statorrücken gelegten Einlochschleife bei Leerlauf induziert wird, vgl. Bild 14.

In Bild 15a ist die sich gegenüberstehende Eisenbreite auf 1 Pol in Abhängigkeit von der Rotorstellung aufgetragen; eine reziproke Kurve b mit abgerundeten

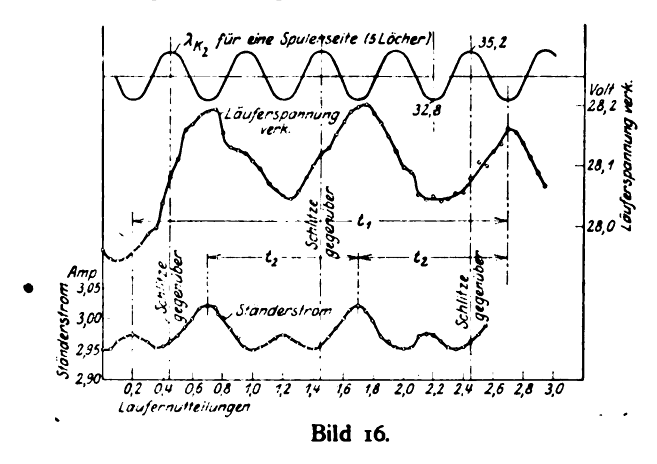


Bild 16.

Ecken würde uns dann die Schwankungen des Magnetisierungsstromes angeben. Eine durch Messung bei offenem, allmählich gedrehtem Rotor gewonnene Kurve sehen wir in den Bildern 16 und 17, bei welchen jedoch im Gegensatze zu Bild 15 die Amplituden nicht gleich groß sind, weil sich die Statoroberfelder je nach der Rotorstellung verschieden zusammensetzen und Pulsationen der EMK in Stator (Bild 16) und in Rotor (Bild 17) und dadurch Veränderungen in der Größe des Magnetisierungsstromes zur Folge haben.

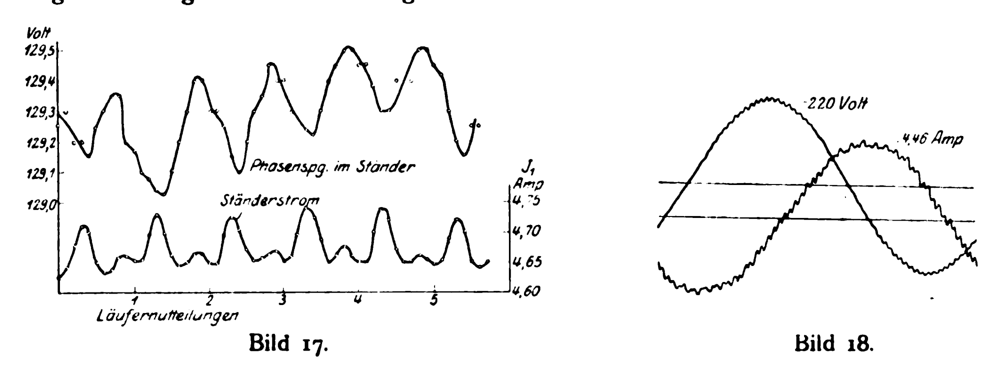


Bild 17. Bild 18.

Bei Synchronismus betrug die Rotorspannung zwischen 2 Phasen 3,9 V. ($\cong$ 11 % der Stillstandsspannung) und der Rotorstrom 1,4 Amp. (= 2,5 % des Normalstromes).

Die Kurven der verketteten Spannung und des Stromes im Stator bei Synchronismus weisen bei offenem Rotor schwache Pulsationen entsprechend dem Bilde 16 auf, die bei geschlossenem Rotor infolge der Rückwirkung der Grundfelder der Rotoroberströme stark hervortreten, Bild 18. Hier ist wieder die Oberschwingung $60\,c_1$ am stärksten. In der Stromkurve ist neben einer schwachen Welle $7\,c_1$ [nach (14)] eine leichte Verzerrung durch die Hysterese zu erkennen.

Bild 19 zeigt $^2/_3$ Perioden der Spannungskurve, aufgenommen beim Schlupf $^1/_3$ bei $E_p = 220$ V in einer Einlochschleife auf dem Rotor. Die starke Welle



$12 c_1 (1 - s_1) = 400$ Per./Sek. ist die Interferenzwelle der von den Stator-Wicklungs- und Zahngrundfeldern (—) 11 und (+) 13 induzierten EMKen.

Für den Stator schätzen wir $B_{z_{11}} = B_{z_{13}} \cong 700$, so daß $B_{z_{12}} = B_{z_{11}} + B_{z_{13}} \cong 1400$ und $\Delta B_{max} \cong 2 \cdot 1400 = 2800$. Der Abfall unter den Statorzähnen muß geringer sein als für den Rotor bei gleichem B_L, weil die Zahnecken des Statorzahnes gestreckter sind und $B_{Z_{1max, id.}} = 12250$ ist, also kleiner als im Rotor.

In der beim Schlupf $\frac{1}{6}$ aufgenommenen (periodischen) Kurve des Rotorstromes von 105 Amp. beträgt der Grundstrom 104,943 Amp.; die Oberströme machen also nur 0,54‰ desselben aus, können daher als solche vernachlässigt werden.

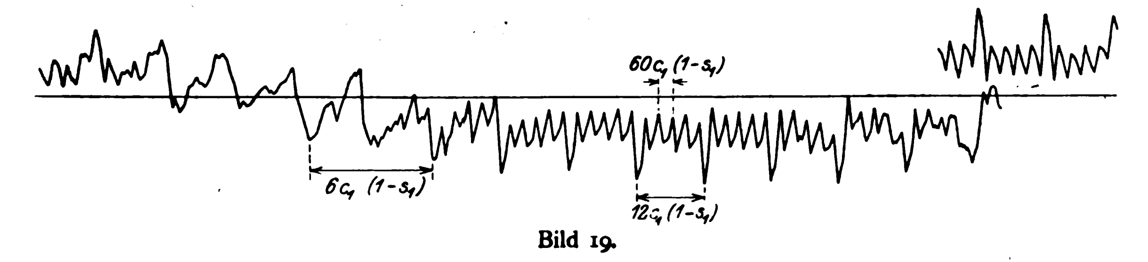


Bild 19.

Dasselbe ist für den Statorstrom der Fall, den wir zusammen mit der Phasenspannung beim Schlupf $\frac{1}{6}$ in Bild 20 als periodische Kurven sehen. Der Effektivwert des Grundstromes beträgt hierbei 11,62 Amp., welcher von dem der zusammengesetzten Welle von 11,66 Amp. praktisch gar nicht abweicht.

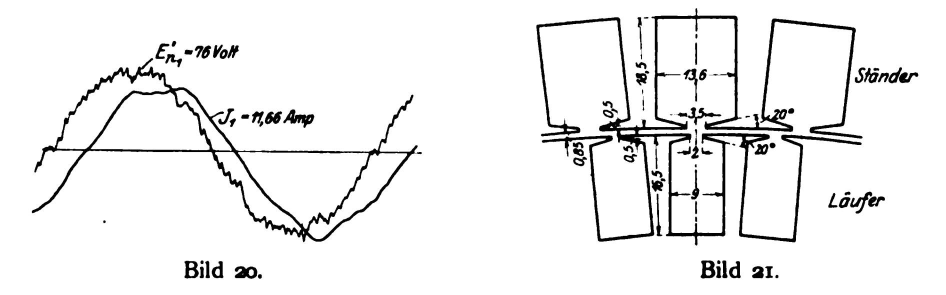


Bild 20. Bild 21.

Bei zunehmendem Strome werden in den Kurven die höheren Oberschwingungen kleiner, weil die Blindstromkomponente zurücktritt; bei zunehmender Sättigung wird das Feld gleichförmiger, und die kleineren Zacken verschwinden; dabei wird die Kurve der Phasenspannung immer mehr abgeflacht, während die der verketteten Spannung ihre Sinusform beibehält.

Zum Vergleich wurde dieser Motor mit einem Einloch-Generator gespeist, dessen Spannungskurve eine 5. Harmonische von 11,5%, eine 7. von 6,2% und eine 11. von 2,1% enthielt. Dabei betrug bei Synchronismus die Rotorspannung zwischen 2 Phasen 9,35 V. und der Rotorstrom 7,5 Amp. Bei sinusförmiger Spannungskurve war der Leerlaufstrom 4,58 Amp. und bei Normallast $\cos\varphi_1 = 0{,}88$, bei nicht sinusförmiger 4,4 Amp.[1]) und $\cos\varphi_1 = 0{,}877$.

2. Der einphasige Rotor. Zur Untersuchung diente Motor Nr. I in einachsiger Schaltung. Während bei Synchronismus hinsichtlich der Zahnfelder ein Unterschied gegenüber dem 3phasigen Rotor nicht vorhanden ist, wenn man von

[1]) Vgl. Arnold, W. T. 1, S. 198.

der geringen Wirkung der Rotoroberströme absieht, entstehen bei Belastung starke Pulsationen des resultierenden Feldes, wodurch die max. Amplitude der Zahnfelder größer wird als beim 3phasigen Rotor und sämtliche Kurven im Stator starke Verzerrungen erleiden.

3. Der zweiphasige Rotor. Motor Nr. II mit Nutenschnitt, Bild 21. Hier ist im Rotor $\nu'_{z_1} = (-)\,31$ und $\nu''_{z_1} = (+)\,33$, und wir bekommen bei offenem Rotor und Synchronismus in einer Einlochschleife auf dem Stator die EMK-Welle, Bild 22. Über eine Interferenz-Oberschwingung $32\,c_1$ lagern sich 2 weitere Interferenzwellen aus $63\,c_1$ und $65\,c_1$ bzw. $95\,c_1$ und $97\,c_1$, die von einer 2. und 3. Harmonischen der Rotorzahnfeldkurve erzeugt werden. Letztere ist hier deshalb

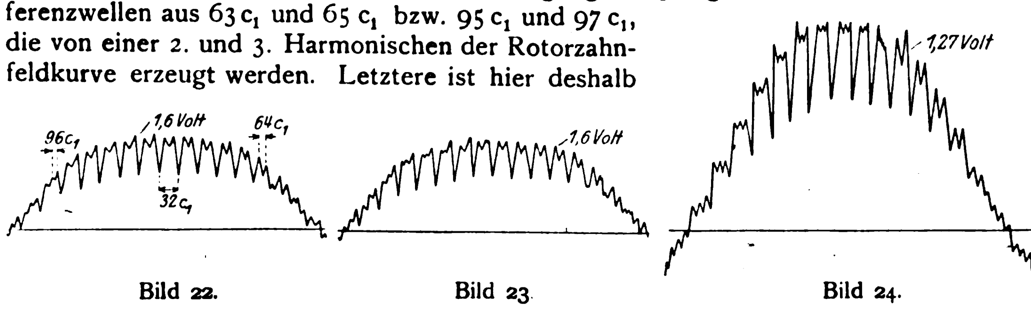


Bild 22. Bild 23. Bild 24.

stark, weil bei Zahnformen Bild 21 die langen, dünnen Zahnecken bald gesättigt sind und die Zahnfeldkurve in der Mitte stark zugespitzt wird, während sie bei Zahnform Bild 8 über eine breite Strecke des Zahnkopfes horizontal verläuft und erst kurz vor dem Schlitz stark abfällt. Bei geschlossenem Rotor ergab sich Bild 23, die von Bild 2 fast gar nicht abweicht, und bei Erregung des Rotors mit Gleichstrom das Bild 24.

Durch Auswertung der beiden letzten Kurven wurden die nachstehend zusammengestellten Werte erhalten, wobei die Summe der Spannungen der 2. und 3. Harmonischen gleich der halben Amplitude der kleineren Zacke, und ihre

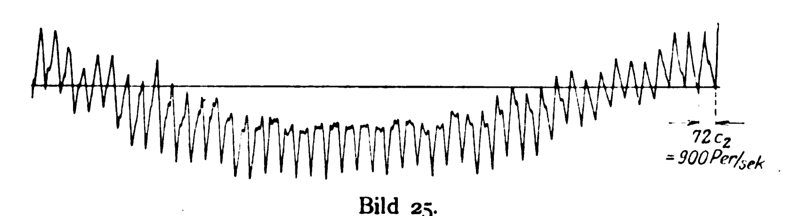


Bild 25.

mittleren Feldamplituden $B_{z_{64}}$ und $B_{z_{96}}$ gleich gesetzt wurden. Dann beträgt $\varDelta B_{max} \cong 2\,(B_{z_{32}} + B_{z_{96}})$. Für den Stator ist $\sigma_{f_{1},1} = 1{,}0218$.

Bild	E_p	B_1	B_L	$B_{z_{II\,max.}}$	$B_{z_{32}}$	$B_{z_{64}} + B_{z_{96}}$	$\varDelta B_{max}$	$\frac{\varDelta B_{max}}{B_L}\,100$
24	400	3780	3730	17 100	500	100	1100	30%
23	500	4760	4320	19 800	800	400	2000	46%

Das Statorzahngrundfeld mit seinen Ersatzdrehfeldern (—) 23 und (+) 25 berechnen wir aus Bild 25, welche die EMK in einer Einloch-Schleife auf dem Rotor bei Ep = 500 V. und beim Schlupf $\frac{1}{4}$ darstellt. Wir gelangen dabei zu $B_{z_{23}} = B_{z_{25}} \cong 250$; $B_{z_{24}} = 500$.

Der erhaltene Wert ist, obwohl $B_{z\,I\,max} = 19600$, also nahezu gleich $B_{z\,II\,max}$ ist, kleiner als für den Rotorzahn, weil der Statorzahn hinter dem Kopf im Vergleich

zur Zahnteilung dünner ist als der Rotorzahn. Dadurch wird der Zahnfluß stark in die Mitte gedrängt, und es sinkt die Amplitude des Zahngrundfeldes, während die der 3. Zahnharmonischen ansteigt. Schätzen wir für diese $B_{z_{72}} \cong 300$, so wird für den Stator bei 500 V.:

$$\varDelta B_{max} \cong 2(500 + 300) \cong 1600 \text{ und}$$

$$\frac{\varDelta B_{max}}{B_L} 100 = \frac{1600}{4320} 100 \cong 37\,\%.$$

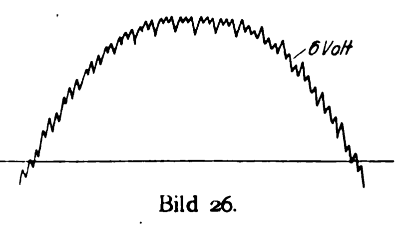


Bild 26.

Dieser Wert ist um 25% kleiner als für den Rotorzahn; dies liegt am Verhältnis der Nuthöhe zur Nutbreite, welche im Stator um etwa 40% kleiner ist als im Rotor und eine Verkleinerung von $\varDelta B_{max}$ durch einen stärkeren Nutenfluß zur Folge hat. Die Gestalt der Zahnfeldkurve hängt aber außerdem noch von dem Verhältnis der mittleren Nutbreite zur mittleren Zahnbreite ab, und dies erklärt uns die Unterschiede von $\varDelta B_{max}$ bei den Motoren Nr. I und II bei gleichen maximalen Zahnsättigungen. Bei letzterem ist dieses Verhältnis für den Stator 2,32- und für den Rotor 3,2 mal so groß wie bei ersterem; daher erhalten wir bei den breiteren Nuten einen stärkeren Nutenfluß, und $\varDelta B_{max}$ wird bei breiten Nuten kleiner als bei schmalen. Natürlich kommt es dabei auch, abgesehen von der Luftspaltlänge viel auf die Stärke der Zahnschuhe an.

Die EMK der 3. Zahnharmonischen des Rotors tritt in einer $q_1 = 4$-Lochschleife auf dem Stator, Bild 26 deutlicher hervor, weil fw_{95} und fw_{97} dann gleich fw_1 sind.

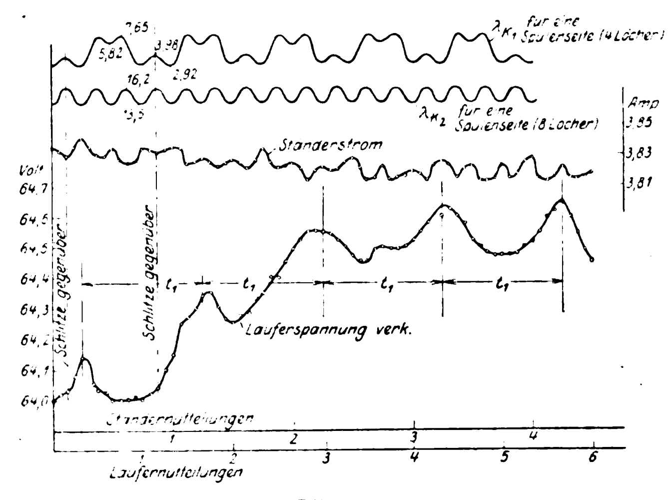


Bild 27.

In Bild 27 sehen wir eine dem Bild 15 und 16 entsprechende Aufnahme, wo noch der Verlauf von λ_{K_1} und λ_{K_2} eingetragen ist. Im Stator würde dies bei Volllast einer Pulsation der Streuspannung um 0,75% der Sternspannung entsprechen. Da erstere auf dem Strome senkrecht steht, werden die Schwankungen in Richtung der EMK_1 wesentlich geringer und konnten bei Auswertung der Oszillogramme vernachlässigt werden.

In den Kurven der verketteten Spannung und des Stromes im Stator müssen die 32 Rotorzähne als reine Welle $31\,c_1$ (Zahngrundwelle) mit überlagerter reiner Oberschwingung $65\,c_1$ (2. Zahnharmonische) und Interferenzoberschwingung $96\,c_1$ (3. Zahnharmonische) erscheinen, weil die Oberfelder der Ordnungen 33 und 63 wirkungslos bleiben.

Die Wicklungsoberfelder sind hier wegen der höheren Lochzahlen kleiner als beim Motor Nr. I, daher zeigen die Kurven von Spannung und Strom einen glatteren Verlauf.

4. Der Käfigrotor mit geraden Zähnen. Motor Nr. III mit Nutenschnitt. Bild 28. Die Zahl der Symmetriestellungen der Zähne ist hier hoch und beträgt bei Verschiebung um eine Rotorenteilung $9^1/_2$; daher sind die Pulsationen im

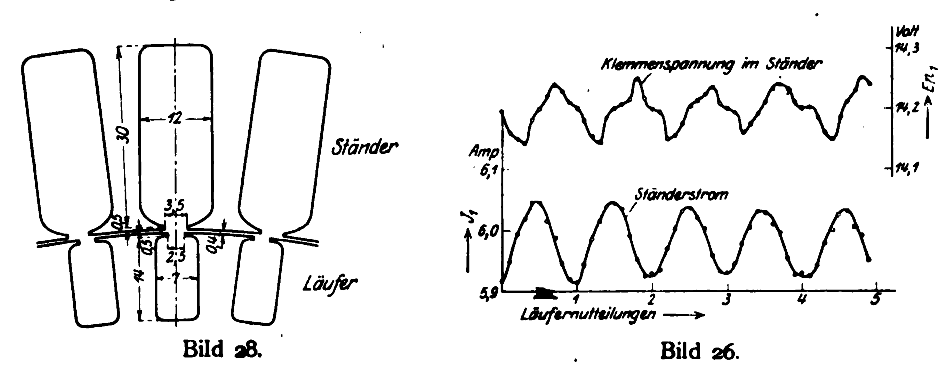


Bild 28. Bild 26.

Magnetisierungsstrome schwach und kaum zu sehen. Infolge der Rückwirkung des Rotors läßt sich das Zahnfeld nicht wie beim Phasenrotor trennen, und die entsprechende hier erhaltene Kurve, Bild 29, zeigt nur die Wirkung der Streufelder, für welche die Ausgangsstellung nach Drehung um eine Rotornutteilung wieder erreicht ist.

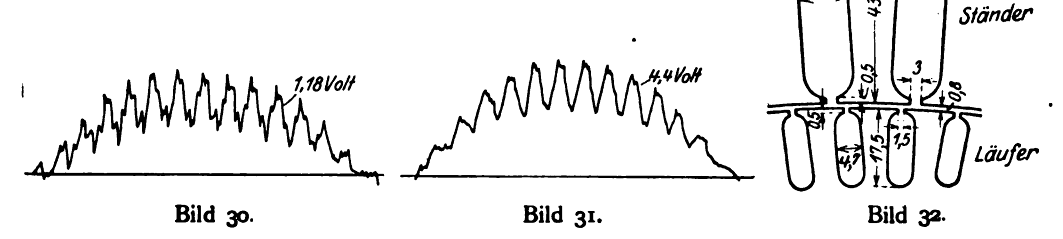


Bild 30. Bild 31. Bild 32.

Im Rotor ist $\nu_z' = (-)\frac{51}{2}$ und $\nu_z'' = (+)\frac{55}{2}$, die in einer Einloch- und $q_1 = 4$-Lochschleife auf dem Stator bei Synchronismus die Interferenzschwingung $\frac{53}{2}c_1$ erzeugen, vgl. Bild 30 und 31. Die 2. Zahnharmonische mit den Drehfeldern (—) 52 und (+) 54 verschwindet auch in der Prüfschleife. Die 3. Zahnharmonische mit den Drehfeldern $(-)\frac{157}{2}$ und $(+)\frac{161}{2}$ verhält sich wie das Grundfeld und erscheint als Interferenzwelle $\frac{159}{2}c_1$. Da jedoch $fw_{\frac{157}{2}}$ und $fw_{\frac{161}{2}}$ gegenüber $fw_{\frac{51}{2}}$ und $fw_{\frac{55}{2}}$ klein sind, verschwindet in Bild 31 die 3. Zahnharmonische fast vollständig. Eine Berechnung der Zahnfelder aus diesen Oszillogrammen auf dem oben benutzten Wege ist wegen der Rückwirkung der Oberströme des Käfigs ohne weiteres nicht möglich. Immerhin wird das Zahngrundfeld des Rotors hier stärker sein als bei Motor Nr. I, weil jetzt der Schlitz $2^1/_2$ mal breiter ist, und weil die Zahnecken dünn sind und wenig abgerundet in den Steg übergehen. Die starke 3. Harmonische entsteht durch das um 40% größere Verhältnis der mittleren Nutenbreite zur mittleren Zahnbreite. Bei $E_p = 220$ V. beträgt $B_1 = 5050$, $B_L = 4760$, $B_{z\,II\,max} = 13000$.

Bei Belastung sind für alle Wicklungsoberfelder des Käfigs gleichpolige Zahnfelder vorhanden, jene sind daher stets sehr stark. Sie sind jedoch bei diesem

Motor auf den symmetrischen Stator wegen der durch 2 oder 3 teilbaren oder gebrochenen Ordnungen größtenteils wirkungslos, weshalb auch die Kurven der verketteten Spannung und des Stromes im Stator bis auf die schwache Wirkung der pulsierenden Streuspannung ganz glatt sind.

Eine angenäherte Berechnung des Zahnfeldes und weitere Oszillogramme über diesen Motor findet man in der unten genannten Arbeit des Verfassers.

5. Polumschaltbarer Motor mit Käfigrotor mit schrägen Zähnen. Motor Nr. IV mit Nutenschnitt Bild 32. Abschrägung etwa 1 Rotornutteilung.

Die EMK-Kurven in einer Einloch-Schleife auf dem Stator bei Leerlauf in der ersten Stufe ($2p = 12$) für $E_p \cong 300$ V. und 600 V., Bild 33, zeigen, miteinander verglichen, den Einfluß der Sättigung, und mit Bild 30 verglichen, durch die starke Verkleinerung der Oberschwingungen den Einfluß der Schrägstellung der Rotorzähne. Die Oberwellen sind jedoch reine Wellen, weil die Abschrägung ein wenig größer oder kleiner als die Rotornutteilung, und daher der Nutenfaktor des einen der beiden Ersatzdrehfelder des Rotors, $(-)\frac{47}{3}$ und $(+)\frac{53}{3}$, größer ist. Wir kommen für das Rotorzahnfeld auf $B_{z\frac{50}{3}} \cong 7000$, ein Wert, der bei der normalen Zahnform

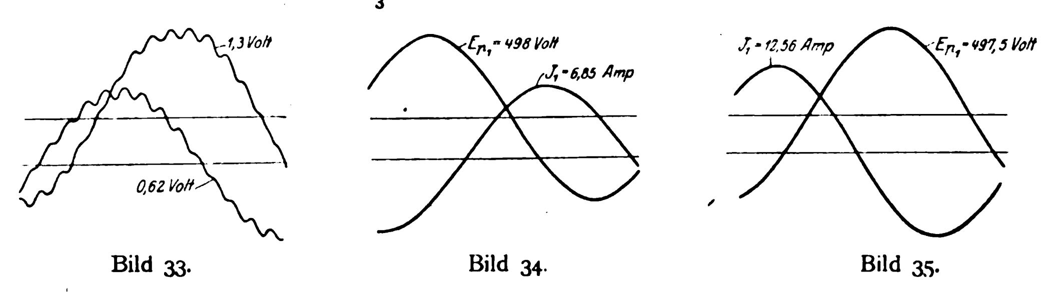


Bild 33. Bild 34. Bild 35.

und Zahnsättigung nicht möglich ist, und können daraus folgern, daß die Kraftlinien im Luftraume nicht radial übertreten, wie bei der Berechnung des Nutenfaktors angenommen wurde, sondern schräg, und sich in Richtung der schräg verlaufenden Zahnkopfmitte der Rotorzähne einzustellen bestrebt sind, wo sie den geringsten Widerstand finden. Die durch die Abschrägung beabsichtigte Feldverkleinerung wird daher nicht ganz erreicht.

Die Kurven von Spannung und Strom im Stator bleiben völlig glatt, weil die Ordnungen der Rotoroberfelder meist gerade und gebrochen sind und im Stator nichts induzieren können. Wir sehen dies in Bild 34 bei Leerlauf und in Bild 35 bei Normallast in der 1. Stufe.

C. Der Einfluß der höheren Harmonischen auf die Wirkungsweise und Berechnung.

Die mechanischen Wirkungen der Oberfelder bestehen einmal in der Erzeugung von Tönen infolge von Ummagnetisierungen der lamellierten Eisenkörper mit den relativen Frequenzen aller Grund- und Oberfelder und infolge der elektrodynamischen Einwirkung aller Felder auf die stromführenden Leiter, und ferner in der Bildung von Geräusche verursachenden umlaufenden, einseitigen, magnetischen Zugkräften. Letztere treten auf, sobald 2 Felder mit um 1 verschiedenen Polpaarzahlen vorhanden sind. Diese in der Originalarbeit in den Grundzügen behandelten wichtigen Erscheinungen sind inzwischen an anderer Stelle ausführlich bearbeitet worden[1]). Wir befassen uns daher nur mit den elektrischen Wirkungen der höheren Feldharmonischen.

[1]) Vgl. H. Fritze, „Über die Geräuschbildung bei elektrischen Maschinen." Archiv für Elektr. X. Band, 1921, Heft 3 u. 4.



1. Effektivwerte von Spannung und Strom. Die schädliche Wirkung aller Arten von Oberfeldern, das sind also die Wicklungsoberfelder, die Zahnfelder und die Sättigungsoberfelder, äußert sich zunächst in einer Verkleinerung des Flusses und der Amplitude des Grundfeldes, und ferner auch der Grund-EMK und des Grundstromes, weil die f_{w_ν} meist kleiner sind als f_{w_1}. Die Vergrößerung der Crund-EMK durch die gleichperiodigen Wicklungsoberfelder in demselben Systeme wird durch den Faktor σ_{f_q} berücksichtigt[1]), und das die prozentuale Spannungserhöhung angebende Verhältnis $\left(1 - \frac{1}{\sigma_f}\right) 100$[1]) gestattet uns den Wert einer Wicklung zu beurteilen. Im anderen Systeme sind die Frequenzen der induzierten Oberschwingungen verschieden, und ist das Verhältnis der Oberschwingung zur Grundschwingung keine ganze Zahl, so bekommen wir Schwankungen des Effektivwertes, und in der Nähe der Motordrehzahlen, wo dieses Verhältnis eine ganze Zahl ist, Schwankungen der Meßinstrumente von Spannung, Strom und Leistung. Im praktischen Betriebe tritt dies in der Nähe von Synchronismus, also bei Leerlauf, ein und ist besonders bei kleineren Motoren mit niedrigen Lochzahlen häufig zu beobachten. Dieser Einfluß ist jedoch auch bei den kleinsten praktisch verwendeten Lochzahlen mit Ausnahme beim einphasigen Rotor vernachlässigbar klein. Bei Messungen auf dem Prüfstande nimmt man den Mittelwert der Ausschläge.

Feld		Ordnung	Amplitude	Fluß	Frequenz	EMK pro Phase Volt
Stator-Wicklungs Grundfeld		1	6950	$467{,}15 \cdot 10^3$	50	116,32
Stator-Wicklungs-Oberfelder, außer denen der Ordnung der 1. und 2. Zahnharmonischen		—	—	12050[1])	50	0,98[2])
Stator-Zahnfeld ± gleichpoliges Wicklungs-Oberfeld	Grundfeld	11	1330[3])	8120	50	2,04
		13	165[4])	850	50	0,21
	2. Zahnharmon.	23	125[5])	360	50	0,09
		25	455[6])	1220	50	0,31
Grundwelle der Spannung im Stator					50	119,95
Rotor-Zahnfeld	Grundfeld	29	950	2200	29·50	4,27
		31	950	2040	31·50	4,22
	2. Harmon.	59	225[7])	260	59·50	3,83
		61	225[7])	250	61·50	3,80
Sättigungs-Oberfelder		3	990	22250	3·50	12,05
		5	120	1580	5·50	0,53
		7	30	270	7·50	0,13

Es ist $B_{w_{11}} = 630$; $B_{w_{13}} = 535$; $B_{w_{23}} = 300$; $B_{w_{25}} = 280$; $B_{z_{11}} = B_{z_{13}} \sim 700$; $B_{z_{23}} = B_{z_{25}} \sim 175$.

1) $467{,}15 \cdot 10^3 (1{,}0435 - 1) - (3850 + 2760 + 880 + 750) = 12050$

2) $\Sigma E_{w_\nu} - (E_{w_{11}} + E_{w_{13}} + E_{w_{23}} + E_{w_{25}}) = 116{,}32\left(1 - \frac{1}{1{,}027}\right) - 2{,}08 = 0{,}98$ Volt

3) $B_{11} \cong B_{z_{11}} + B_{w_{11}} \cong 700 + 630 = 1330$

4) $B_{13} \cong B_{z_{13}} - B_{w_{13}} \cong 700 - 535 = 165$

5) $B_{23} \cong B_{w_{23}} - B_{z_{23}} \cong 300 - 175 = 125$

6) $B_{25} \cong B_{w_{25}} + B_{z_{25}} \cong 280 + 175 = 455$

7) angenommen.

[1]) Vgl. Arnold, W. T. III und V. 1.

Als Beispiel ist unter den dem Bild 10 zugrunde liegenden Verhältnissen der Kraftfluß (ohne Streuflüsse) des Motors Nr. I mit 3phasigem Rotor bei Synchronismus zerlegt worden, vgl. die vorstehende Tabelle, wobei die verschiedene Richtung der Zahn- und gleichpoligen Wicklungsoberfelder nur beim Grundfelde und seiner 2. Harmonischen berücksichtigt wurde.

Hiernach ist die resultierende EMK einer Statorphase

$$E_1 = \sqrt{119{,}95^2 + 4{,}27^2 + 4{,}22^2 + 3{,}83^2 + 3{,}80^2 + 12{,}05^2 + 0{,}53^2 + 0{,}13^2} = 120{,}9 \text{ V.},$$

und die verkettete Spannung durch Fortlassen der 3. Harmonischen

$$E_1' = \sqrt{3} \cdot 120{,}22 = 208{,}22 \text{ V.}$$

Bei offenem Rotor beträgt der Statorstrom 4,59 Amp., die Phasenspannung im Stator 129 Volt und $\cos\varphi_0 = 0{,}118$. Der Widerstand einer Statorphase ist 0,4 Ω, die Selbstinduktion des Hauptfeldes und der Oberfelder 1,64 Ω, somit wird die Stator — EMK: $E_1 \cong 129 - 1{,}64 \cdot 4{,}59 = 121{,}5$ Volt. Dies stimmt also mit der durch Addition der Teilspannungen erhaltenen EMK von 120,9 Volt nahezu überein.

Nennen wir Φ_{I_w}, Φ_{I_z}, Φ_{II_z}, Φ_B die Flüsse der Statorwicklungsoberfelder, der Stator- und Rotorzahnfelder und der Sättigungsoberfelder, so ist der Gesamtfluß

$$\Phi = \Phi_1 + \Sigma(\Phi_{I_w} \pm \Phi_{I_z}) + \Sigma\,\Phi_{II_z} + \Sigma\,\Phi_B =$$
$$= 467{,}15\ 10^3 + 22{,}6 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^3 + 24{,}0 \cdot 10^3 = 518{,}5 \cdot 10^3.$$

Er wird vermindert

1. durch die Stator-Wicklungs- und Zahnoberfelder des Grundstromes um 4,36 %,
2. durch die Rotorzahnfelder des Grundstromes um 0,92 %,
3. durch die Sättigungsoberfelder um 4,13 %

und insgesamt um 9,4 %.

Der nach Arnold[1]) mit dem Wicklungsfaktor des Gesamtfeldes berechnete Kraftfluß des Gesamtfeldes, welches gleich dem Grundfelde gesetzt wird, ist, wenn der richtige Wert der Phasenspannung als bekannt vorausgesetzt wird,

$$\Phi_1 = \frac{121{,}5 \cdot 10^8}{4{,}44 \cdot 0{,}993 \cdot 50 \cdot 116} = 4{,}76 \cdot 10^5.$$

Bei sinusförmiger Verteilung wird hiermit $B_1 = 7080$ und für die abgeflachte Feldkurve $B_L = 6450$[2]). Während die Werte von Φ_1 und B_1 mit den wirklichen genügend genau übereinstimmen, weicht das errechnete B_L vom wirklichen ziemlich stark ab, sicherlich weil δ in Wirklichkeit größer ist. Aus demselben Grunde ist auch der berechnete Magnetisierungsstrom (3,4 Amp.)[2]) viel kleiner als der gemessene (4,56 Amp.), wobei jedoch zu beachten ist, daß der aus dem Grundfeld berechnete Magnetisierungsstrom stets kleiner als der gemessene sein muß, weil ein gewisser Betrag durch die zusätzlichen und nicht berücksichtigten Sättigungsschwankungen infolge der Oberfelder beansprucht wird.

Eine genaue Übereinstimmung des mit dem Wicklungsfaktor des Gesamtfeldes berechneten Flusses des Grundfeldes mit dem wirklichen Werte ist gar nicht möglich, weil der Arnoldsche Faktor die sekundären Zahnfelder und Sättigungsoberfelder, deren Frequenzen verschieden sind, unberücksichtigt läßt.

Wo es auf genaue Bestimmung der Sättigungen und induzierten EMK ankommt, haben wir daher zweckmäßig die oben durchgeführte Zerlegung in Teilflüsse vorzunehmen, wobei nur durch Probieren vorgegangen werden kann. Dazu müßten jedoch genauere Werte für die Größe und Phase der Zahnfelder für verschiedene Sättigungsgrade, sowie Zahn- und Nutenformen vorliegen.

2. Eisenverluste. Durch die Oberfelder, und zwar insbesondere durch die starken Zahnfelder und gleichpoligen Wicklungsoberfelder, entstehen im Stator und

[1]) Arnold, W. T. III.
[2]) Nach Arnold, W. T. V. 1.



Rotor zusätzliche Eisenverluste, bestehend in Oberflächenverlusten und Hysteresis- und Wirbestromverlusten[1]) besonders in den Zähnen, weil der gesamte Fluß der Maschine nach der zusammengesetzten Welle pulsiert. Die Frage der Eisenverluste durch eine zusammengesetzte Welle ist noch nicht geklärt.

3. Stromwärmeverluste. Weil der effektive Leiterwiderstand mit der Frequenz des Stromes wächst, entstehen durch die zusammengesetze Stromwelle zusätzliche Stromwärmeverluste, welche durch eine weitere scheinbare Erhöhung des Widerstandes infolge der zusätzlichen Feldpulsationen in den Zähnen vermehrt werden, indem diese in den massiven Leitern Wirbelströme erzeugen und eine ungleiche Stromverteilung über den Querschnitt bewirken. Man rechnet daher mit einem erhöhten Widerstande[1]). Auch die Erforschung dieser Verluste ist noch nicht abgeschlossen.

4. Statorstrom und Reaktanz. Durch die Sättigungsoberfelder wird der Magnetisierungsstrom kleiner, als wenn das Grundfeld seine Sinusform beibehielte, was bei der Berechnung stets beachtet werden muß, wobei die zusätzlichen Sättigungsschwankungen, welche denselben wieder erhöhen, dadurch berücksichtigt werden, daß wir bei der Wirkkomponente des Leerlaufstromes mit zusätzlichen Eisenverlusten und, wie oben gezeigt wurde, mit einem zu hohen Kraftfluß des Grundfeldes rechnen.

Der Einfluß der variablen Leitfähigkeit kann, wie wir sahen, vernachlässigt werden.

Infolge der Oberfelder kann bei Synchronismus der Strom bei geschlossenem Rotor größer oder kleiner sein, als bei offenem[2]).

Durch die Hysterese und Permeabilität wird die Kurve des Leerlaufstromes verzerrt, was durch einen anderen Scheitel- oder Formfaktor zu berücksichtigen[2]), nicht viel Zweck hat, solange die Vorausberechnung der AW nicht auf zuverlässige Methoden gegründet ist.

Die Oberfelder äußern sich ferner im Kurzschlußstrom[1]), indem sie im Stator und Rotor zusätzliche Reaktanzen liefern. Dies gewinnt mit zunehmender Abweichung der Wicklungsverteilung von der Sinusform an Bedeutung. In diesem Sinne sind die unsymmetrischen Wicklungen ungünstiger, weil ihre zusätzliche Reaktanz größer sein kann als bei symmetrischen mit nahestehenden Lochzahlen.

5. Drehmoment und Leistung. Die Oberfelder jeder Art verringern das Drehmoment durch Verkleinerung des Grundfeldes und durch Erzeugung negativer Momente. Dadurch entstehende Sattelbildungen in der Drehmomentenkurve, und das insbesondere von den Zahnwechselfeldern herrührende „Kleben" können den Anlauf von Käfigankern in nachteiliger Weise beeinflussen, während der Einfluß der Oberfelder auf den Anlauf von Phasenankern keine so große praktische Bedeutung hat.

Im allgemeinen sind die unsymmetrischen Wicklungen wegen ihrer größeren Reaktanz ungünstiger.

Der schädliche Einfluß der Oberfelder kommt wegen der Verkleinerung des nutzbaren Momentes und der höheren Stromwärmeverluste auch in einer Verringerung der Nutzleistung zum Ausdruck.

Wir können auch die Wirkung der Oberfelder in eine Erhöhung der Reaktanz zusammenfassen und finden dann an Hand des Arbeitsdiagrammes, daß bei größerer Reaktanz Drehmoment und Leistung für alle Arbeitspunkte des Motors verkleinert werden.

6. Leistungsfaktor und Wirkungsgrad: Durch die zusätzlichen Sättigungsschwankungen wird der Leistungsfaktor bei Leerlauf nur wenig verändert, weil die Wirk- und Blindkomponente des Stromes gleichzeitig vergrößert werden. Der Einfluß der blinden Rotoroberströme, durch die er mitunter verkleinert werden kann,

[1]) Arnold, W. T. V. I.
[2]) Benischke, Der asynchronische Drehstrommotor.

ist gering. Bei Lauf wird der Leistungsfaktor durch die zusätzliche Reaktanz der Oberfelder verschlechtert, und es nehmen ferner der größte Leistungsfaktor und der bei Stillstand ab. Ebenso wird der Wirkungsgrad durch die Oberfelder verschlechtert, weil z. T. die Nutzleistung verringert, z. T. die Aufnahme durch zusätzliche Eisenverluste vergrößert wird.

Für den Rotor ist eine möglichst hohe Phasenzahl günstig, weil mit deren Zunahme bei gleichen Zähnezahlen der Wicklungsfaktor des Grundfeldes wächst. Für eine 3phasige Wicklung ist dieser und bei gleichem Feld auch die Grund-EMK und der Grundstrom, um 6% größer als beim 2phasigen. Beim 4phasigen steigt dieser Wert auf 7,8%, beim 6phasigen auf 8,8% bezogen auf den 2phasigen. Gleichzeitig nimmt die Wirkung der Oberfelder ab, was an dem Faktor $\left(1 - \frac{1}{\sigma_f}\right) 100$ zu sehen ist, und es steigen dann auch Drehmoment, Nutzleistung und Wirkungsgrad. Die diesen Vorteilen gegenüberstehenden Nachteile, nämlich die mit zunehmender Phasenzahl ansteigenden Herstellungskosten und erforderliche Zahl von Schleifringen haben zu einer fast allgemeinen Verwendung der 3phasigen Rotorwicklung geführt.

Die umlaufenden Wicklungen, insbesondere die Gleichstromwicklungen und besonderen Wicklungen, bei denen der Wicklungsfaktor des Grundfeldes stets erheblich kleiner als bei den symmetrischen Wicklungen ist, können mit letzteren niemals in den Wettbewerb treten und sind, wenn möglich, zu vermeiden.

7. Arbeitsdiagramm. Da in einem und demselben Diagramme nur sinusförmig sich verändernde Felder gleicher Drehgeschwindigkeiten, sowie sinusförmige Spannungen und Ströme gleicher relativer Frequenzen dargestellt werden können, ist das Diagramm nur für das Grundfeld, sowie dessen Spannungs- und Stromwerte und Konstanten, oder für ein vom Stator und Rotor gemeinsam erzeugtes Oberfeld und dessen zugehörige Konstanten richtig. Es müssen sich daher, wenn wir die z. B. durch Messung gewonnenen Werte in ein einziges Diagramm einführen, von den tatsächlich eintretenden Verhältnissen Abweichungen ergeben, die um so größer werden, je mehr die räumliche Verteilung der Wicklung von der Sinusform abweicht. Die Bemühungen, das Diagramm durch weitgehendste Berücksichtigung aller Verhältnisse mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bringen, müssen daher immer an der Wirkung der Oberfelder scheitern. Sobald wir jedoch im Diagramm mit den resultierenden Werten von Spannung und Strom rechnen, müssen wir auch die anderen Einflüsse der Oberfelder berücksichtigen; es sind dies die Zunahme des effektiven Widerstandes und der Kurzschlußreaktanz, die zusätzlichen Eisen- und Stromwärmeverluste.

D. Schluß.

Wir sahen, daß die Verzerrungen der Feld-, Spannungs- und Stromkurve eine notwendige Folge des mechanischen Aufbaues der Maschine sind und stets schädlich wirken. Wir müssen daher bestrebt sein, die Oberfelder zu verkleinern.

Von den Wicklungsoberfeldern können wir diejenigen von gerader und gebrochener Ordnung durch Vermeidung von Unsymmetrien verhüten, diejenigen ungerader Ordnung durch möglichst hohe Lochzahl verkleinern, wofür jedoch durch die Kostenfrage sowie mechanische und elektrische Richtlinien Grenzen gezogen sind. Die Verwendung schräger Nuten bringt zwar eine Verkleinerung der Oberfelder mit sich und verbessert den Anlauf, doch verkleinert sie den Rotorgrundstrom und erhöht die Herstellungskosten. Sie läßt sich meist durch richtige Wahl der Stabzahl vermeiden.

Von den Sättigungsoberfeldern geht das dritte als das stärkste beim 3phasigen symmetrischen Rotor für die Leistungsübertragung verloren. Diesem Nachteil steht aber als Vorteil eine höhere Ausnutzungsmöglichkeit des Eisenkörpers

gegenüber, indem der Fluß erhöht und die Windungszahl verkleinert werden kann. Es fragt sich nun, ob der Verlust an Kraftfluß durch die Sättigungsoberfelder, zu denen jetzt auch noch die Zahnoberfelder treten, durch den Gewinn aufgewogen wird, der sich aus der Vergrößerung der Amplitude des Grundfeldes bei der Kraftflußerhöhung ergibt. Dies hängt von der Magnetisierungskurve und von dem Aufbau des Eisenkörpers ab und ist in jedem einzelnen Falle zu prüfen. Wo es die Verhältnisse gestatten, erreichen wir eine Verkleinerung der Sättigungsoberfelder und einen entsprechenden Gewinn an Kraftfluß durch Verbreiterung der Zahnquerschnitte. Dann werden zugleich auch die Zahnfelder kleiner und die Eisenverluste sinken.

Wir müssen auch die Zahnfelder möglichst klein machen, damit die Grundwelle groß und die Verluste herabgesetzt werden. Als erstes Mittel hierfür steht uns die Verringerung der maximalen Zahnsättigung zur Verfügung, indem wir entweder die Windungszahl oder die Zahnbreite erhöhen. Die erste Maßnahme führt zu einer Erhöhung des Kupfergewichtes und ist nur in gewissen Grenzen anwendbar, die zweite ergibt die Nachteile der langen, schmalen Nuten mit einer Erhöhung der Nutenstreuung. Hier wird sich die Wahl von trapezförmigen Nuten häufig als vorteilhaft erweisen. Als zweites Mittel kann die Formgebung der Nuten empfohlen werden. Wir fanden, daß bei langen, schmalen Nuten fast der ganze Zahnfluß durch den Zahn tritt und am Schlitz ein starker Sättigungsabfall eintritt, während bei kurzen, breiten Nuten der Abfall durch die stärkere Kraftlinienströmung durch den Nutenraum verkleinert wird. Bei der ersten Nutenform bekommen wir einen großen Streufluß quer durch den Nutenraum, bei letzterer wird im Maße einer Verbreiterung wieder der Zahn schmäler und die Zahnsättigung größer. Zwischen diesen beiden Grenzen wird es für die Zahn- und Nutenbreite günstige Werte geben. Bei normalen Nuten werden wir eine Gleichförmigkeit des Feldes dadurch erhalten, daß wir die Übergänge der Zahnecken in den Steg flach verlaufen lassen und, soweit es die Rücksichten auf die Streuungen zulassen, die Zahnecken möglichst stark machen.

Bei der Auswahl der Wicklungen haben wir dafür Sorge zu tragen, daß der Wicklungsfaktor des Grundfeldes groß und die Oberfelder klein werden. In dieser Hinsicht sind die symmetrischen Wicklungen den unsymmefrischen stets überlegen und daher vorzuziehen. Lassen sich letztere nicht vermeiden, so ist nachzuprüfen, ob nicht etwa das magnetische Gleichgewicht störende und geräuschbildende Oberfelder auftreten können, und dann ist für deren Beseitigung zu sorgen. Bei der Wahl der Stabzahl von Käfigankern ist auf den Anlauf Rücksicht zu nehmen, indem einmal diejenigen Stabzahlen ausgeschaltet werden müssen, welche Geräusche verursachen, ferner diejenigen, welche starke negative Drehmomente der Oberfelder ergeben, und schließlich diejenigen, welche zu starkem Kleben Anlaß geben können. Die Phasenzahl des Rotors ist so zu wählen, daß der Wicklungsfaktor des Grundfeldes möglichst groß wird, und mit den Herstellungskosten in Einklang zu bringen.

Welche Mittel wir auch anwenden mögen, um die Oberfelder der Asynchronmaschine zu verkleinern, ganz verhüten läßt sich ihre Entstehung nicht. Wir müssen daher bei allen unseren theoretischen und praktischen Untersuchungen ihrem Einflusse Rechnung tragen.



Archiv für Elektrotechnik

X. Band. 12. Heft. 1922.

Bestimmung der Lage des Erdpotentials in Drehstromanlagen. Messung der Isolationswiderstände von Hochspannungsanlagen während des Betriebes.

Von

Erwin Marx, Dresden.

Übersicht.

Die Lage des Erdpotentials in Drehstromanlagen wird in Abhängigkeit von den zwischen den Außenleitern, sowie dem Nullpunkt der Stromerzeugungsanlage und Erde vorhandenen Scheinleitwerten mit Hilfe von komplexen Dreieckskoordinaten bestimmt. Eine Ersatzschaltung ermöglicht es, bei der Behandlung von Fragen, in denen die Lage des Erdpotentials eine Rolle spielt (z. B. Überspannungs-, Erdschlußstrom-, Isolationswiderstandsfragen), eine einphasige Wechselspannung an Stelle der Spannungen des Dreiphasensystems zugrunde zu legen.

Die Verschiebung des Erdpotentials bei Veränderung eines der in Betracht kommenden Leitwerte wird gezeigt.

Im zweiten Teil des Aufsatzes wird die Messung der Isolationswiderstände einer Drehstromanlage während des Betriebes durch Einschalten eines großen Widerstandes zwischen einem Außenleiter und Erde beschrieben. Die Auswertung der Ergebnisse geschieht unter Benutzung der angegebenen Ersatzschaltung. Die Entwickelungen werden durch Versuche bestätigt.

Bestimmung der Lage des Erdpotentials.

Jedem Punkte eines Wechselstromsystems kann ein Punkt einer Ebene so zugeordnet werden, daß bei sinusförmigem Spannungsverlauf die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten der Ebene nach Größe und Richtung der Spannung entspricht, die zwischen den entsprechenden Punkten des Wechselstromsystems besteht. Die Punkte der Ebene werden dann Wechselpotentiale oder kurz Potentiale genannt. Die Potentiale $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, die an den Anfängen der drei Drehstromleiter R, S, T herrschen, bilden die Ecken eines Dreiecks. Die Lage des Potentials $\mathfrak{Q}$ eines vierten Punktes Q ist bei unveränderter Lage der Potentiale $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ nur von den Scheinleitwerten abhängig, die zwischen den Drehstromleitern und Q vorhanden sind. Die Aufgabe, die Lage von $\mathfrak{Q}$ in Beziehung zu $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und damit die Größe der Spannungen zwischen den Drehstromleitern und Q in Abhängigkeit von diesen Leitwerten zu bestimmen, besitzt praktische Bedeutung bei der Behandlung von Überspannungsfragen, Erdschlußfragen usw. in Drehstromnetzen. In diesen praktischen Fällen handelt es sich meist um die Bestimmung des Potentials, das die Erde in Beziehung zu den Potentialen der Anlage besitzt. Das unbekannte, in Abhängigkeit von den Leitwerten gesuchte Potential ist deshalb bei den folgenden Ableitungen mit Erdpotential bezeichnet.

Die Bestimmung der Lage des Erdpotentials ist bereits auf sehr verschiedenen Wegen erfolgt[1]). Rein rechnerisch erfolgte die Lösung zuerst durch Herrn Görges.

[1]) Kennelly, El. World and Engineer 1899, S. 288; Arnold, La Cour und Bragstat, Theorie der Wechselströme und Transformatoren S. 288 u. ff.; Kittler, Petersen, Allg. Elektrotechnik 2, S. 385 u. ff.; Fraenckel, Theorie der Wechselströme S. 112 u. ff.; Görges, Archiv f. Elektrotechnik VI. Bd., 1. u. 2. Heft; VII. Bd., 5. Heft.

Er benutzt Dreieckskoordinaten, die den wesentlichen Vorzug haben, eine symmetrische Behandlung des Drehstromspannungsdiagrammes zu ermöglichen. Die von Herrn Görges im Archiv VI. Bd. nachgewiesenen Sätze über diese Koordinaten seien zuerst kurz zusammengestellt:

Sind (Bild 1) $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ die Potentiale dreier Drehstromleiter, so wird die Lage des Erdpotentials $\mathfrak{Q}$ mit Hilfe eines beliebigen Potentials $\mathfrak{O}$ durch die Beziehung gegeben:

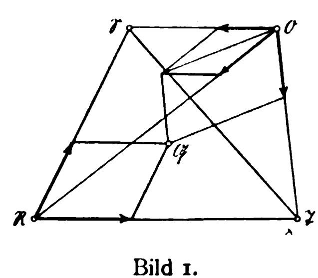


Bild 1.

$$\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{Q}} = \xi\,\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{R}} \hat{+} \eta\,\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{S}} \hat{+} \zeta\,\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{T}} \tag{1}$$

ξ, η und ζ heißen nach Görges Dreieckskoordinaten. Sie sind reelle Zahlen, die in der Beziehung stehen:

$$\xi + \eta + \zeta = 1. \tag{2}$$

Die Lage von $\mathfrak{O}$ in Bild 1 ist beliebig. $\mathfrak{O}$ kann also in Gleichung (1) fortgelassen werden:

$$\mathfrak{Q} = \xi\,\mathfrak{R} \hat{+} \eta\,\mathfrak{S} \hat{+} \zeta\,\mathfrak{T}. \tag{3}$$

Da die Lage von $\mathfrak{O}$ beliebig ist, kann man $\mathfrak{O}$ mit den Potentialen der Leiter zusammenfallen lassen und erhält dadurch drei Gleichungen, nach denen man $\mathfrak{Q}$ sehr einfach aus den Dreieckskoordinaten finden kann. Bild 1:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{Q}} &= \eta\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}} \hat{+} \zeta\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}} \\ \overline{\mathfrak{S}\mathfrak{Q}} &= \xi\,\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{R}} \hat{+} \zeta\,\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{T}} \\ \overline{\mathfrak{T}\mathfrak{Q}} &= \xi\,\overline{\mathfrak{T}\mathfrak{R}} \hat{+} \eta\,\overline{\mathfrak{T}\mathfrak{S}} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Eine Strecke oder eine Potentialdifferenz ist durch die Differenz der Potentiale der Endpunkte gegeben. Ist z. B. außer $\mathfrak{Q}$ der Punkt $\mathfrak{Q}_1$ mit den Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 gegeben, so gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1} = \mathfrak{Q}_1 \hat{-} \mathfrak{Q} &= (\xi_1 - \xi)\,\mathfrak{R} \hat{+} (\eta_1 - \eta)\,\mathfrak{S} \hat{+} (\zeta_1 - \zeta)\,\mathfrak{T} \\ &= \mathrm{u}\,\mathfrak{R} \hat{+} \mathrm{v}\,\mathfrak{S} \hat{+} \mathrm{w}\,\mathfrak{T} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus Gleichung (2) geht hervor, daß hier $\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w} = 0$ sein muß. Die Spannung $\mathfrak{P}_{qq_1}$ ist durch Gleichung (5) nach Größe und Richtung bestimmt. Ihre Lage ist jedoch erst dann festgelegt, wenn Anfangs- oder Endpunkt gegeben sind.

Unter Benutzung dieser Gesetze hat Herr Görges Gleichungen aufgestellt, die die Berechnung von ξ, η und ζ aus den gegebenen Wirkleitwerten (Konduktanzen) und Blindleitwerten (Suszeptanzen), die zwischen den Aussenleitern sowie dem Nullpunkt der Anlage und Erde vorhanden sind, gestatten.

Wir wollen von dem dort begangenen Wege insofern abweichen, als wir auch komplexe Zahlen als Dreieckskoordinaten zulassen.

Der Nachweis der Gleichungen (1—5) läßt sich in der von Herrn Görges geführten Weise auch für komplexe Zahlen geben, so daß wir auch ferner, ohne den Beweis zu wiederholen, von diesen Gleichungen Gebrauch machen wollen. Da in Gleichungen, die mit deutschen Buchstaben geschrieben sind, nur geometrische Additionen in Frage kommen, wird diese durch die Schreibweise der Vorzeichen nicht besonders gekennzeichnet werden.

Die Drehstromleiter R, S, T seien über die Scheinleitwerte $\mathfrak{y}_r$, $\mathfrak{y}_s$, $\mathfrak{y}_t$ mit der Erde verbunden. Die Lage, die das Erdpotential einnimmt, sei $\mathfrak{Q}$, das die komplexen Dreieckskoordinaten ϱ, σ und τ besitzen soll. Nach Gleichung (3) gilt also:

$$\mathfrak{Q} = \varrho\,\mathfrak{R} + \sigma\,\mathfrak{S} + \tau\,\mathfrak{T}. \tag{6}$$

Für die Spannungen der Leiter gegen Erde lassen sich nach Gleichung (5) die Beziehungen aufstellen:

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{R}\mathfrak{Q}} = \mathfrak{P}_r = \mathfrak{Q} - \mathfrak{R} = \varrho\,\mathfrak{R} + \sigma\,\mathfrak{S} + \tau\,\mathfrak{T} - \mathfrak{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}_r = (\varrho - 1)\,\mathfrak{R} + \sigma\,\mathfrak{S} + \tau\,\mathfrak{T} \\ \mathfrak{P}_s = \varrho\,\mathfrak{R} + (\sigma - 1)\,\mathfrak{S} + \tau\,\mathfrak{T} \\ \mathfrak{P}_t = \varrho\,\mathfrak{R} + \varrho\,\mathfrak{S} + (\tau - 1)\,\mathfrak{T} \end{array}\right\} \tag{7}$$

Für die Ströme, die von den Leitern aus zur Erde fließen, gelten die Gleichungen:

$$\mathfrak{J}_r = \mathfrak{P}_r \cdot \mathfrak{y}_r; \qquad \mathfrak{J}_s = \mathfrak{P}_s \cdot \mathfrak{y}_s; \qquad \mathfrak{J}_t = \mathfrak{P}_t \cdot \mathfrak{y}_t. \tag{8}$$

Setzt man die Werte der Gleichungen (7) in die Gleichungen (8) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{J}_r = (\varrho - 1)\,\mathfrak{y}_r\,\mathfrak{R} + \sigma\,\mathfrak{y}_r\,\mathfrak{S} + \tau\,\mathfrak{y}_r\,\mathfrak{T} \\ \mathfrak{J}_s = \varrho\,\mathfrak{y}_s\,\mathfrak{R} + (\sigma - 1)\,\mathfrak{y}_s\,\mathfrak{S} + \tau\,\mathfrak{y}_s\,\mathfrak{T} \\ \mathfrak{J}_t = \varrho\,\mathfrak{y}_t\,\mathfrak{R} + \sigma\,\mathfrak{y}_t\,\mathfrak{S} + (\tau - 1)\,\mathfrak{y}_t\,\mathfrak{T} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Die geometrische Summe der von den Leitern zur Erde fließenden Ströme muß Null sein:

$$\mathfrak{J}_r + \mathfrak{J}_s + \mathfrak{J}_t = 0 \tag{10}$$

In den Gleichungen (9) müssen also die Summen der Koeffizienten von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ einzeln verschwinden. Dadurch ergeben sich für die Dreieckskoordinaten von $\mathfrak{Q}$ die Gleichungen:

$$(\varrho - 1)\,\mathfrak{y}_r + \varrho \cdot \mathfrak{y}_s + \varrho\,\mathfrak{y}_t = 0$$

$$\varrho = \frac{\mathfrak{y}_r}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t}; \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{y}_s}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t}; \qquad \tau = \frac{\mathfrak{y}_t}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t}. \tag{11}$$

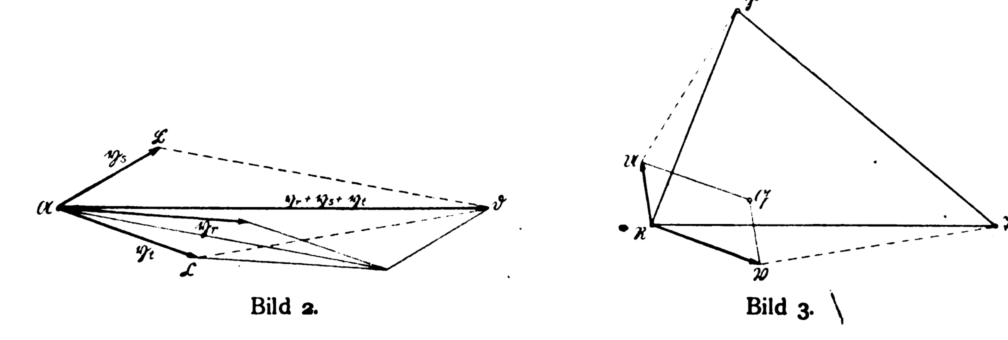


Bild 2. Bild 3.

Diese Gleichungen zeigen die bereits angegebene Tatsache, daß die Koordinaten als Quotienten von komplexen Größen selbst im allgemeinen komplex werden. ϱ, σ und τ werden reell, wenn nur gleichartige Leitwerte — also entweder nur Wirkleitwerte oder nur Blindleitwerte — vorhanden sind. Die Dreieckskoordinaten erfüllen die Bedingung Gleichung 2.

Die Aufzeichnung des Punktes $\mathfrak{Q}$ geschieht am einfachsten wieder nach einer der Gleichungen (4).

Die 1. dieser Gleichungen lautet:

$$\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{Q}} = \sigma\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}} + \tau\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}.$$

Wir zeichnen $\mathfrak{y}_r$, $\mathfrak{y}_s$, $\mathfrak{y}_t$ und ihre geometrische Summe $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$ auf (Bild 2). (Der gerichtete Leitwert ist bekanntlich der Vektor der Stromstärke bei der Spannung 1.) Nach den Gleichungen (11) ist dann mit den in Bild 2 und 3 eingeschriebenen Buchstaben:

$$\frac{\sigma\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}}{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}} = \frac{\mathfrak{y}_s}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t} = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}}; \qquad \frac{\tau\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}}{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}} = \frac{\mathfrak{y}_t}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t} = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}}.$$

$\Delta\,\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ in Bild 3 sei wieder das Drehstromspannungsdreieck.

Macht man dann $\quad \Delta\,\mathfrak{R}\mathfrak{U}\mathfrak{S} \sim \Delta\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}$

und $\quad \Delta\,\mathfrak{R}\mathfrak{V}\mathfrak{T} \sim \Delta\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$

so ist
$$\frac{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{U}}}{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}} = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}} \text{ und } \frac{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}} = \frac{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}},$$
d. h. es wird
$$\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{U}} = \sigma\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{B}} = \tau\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$$

$\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{O}}$ ist dadurch gefunden als geometrische Summe von $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{U}}$ und $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{B}}$.

Die Verwendung der beiden anderen der Gleichungen (4) ergibt natürlich die gleiche Lage von $\mathfrak{O}$.

Wir haben bei der Ableitung keine Bedingung bezüglich der Größe der Netzspannungen gemacht, die Gleichungen sind also für jedes unsymmetrische verkettete Drei- und Zweiphasensystem anwendbar. Die Verhältnisse beim Einphasensystem erhält man, wenn man einen Scheinleitwert, z. B. $\mathfrak{y}_t$, gleich Null setzt. Es wird dann
$$\varrho = \frac{\mathfrak{y}_r}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s}; \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{y}_s}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s}; \qquad \tau = 0$$
$$\mathfrak{O} = \varrho\,\mathfrak{R} + \sigma\,\mathfrak{T}.$$
$$\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{O}} = \sigma\,\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}} = \frac{\mathfrak{y}_s}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s}\cdot\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}; \qquad \overline{\mathfrak{S}\mathfrak{O}} = \varrho\,\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{y}_r}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s}\,\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{R}}. \tag{12}$$
Aus diesen Gleichungen, die sich auch auf anderem Wege nachweisen lassen, können also die Spannungen der Leiter gegen Erde beim Einphasensystem einfach bestimmt werden.

Bei vielen Anlagen ist der Nullpunkt der Generatoren oder der Oberspannungsseite der Transformatoren mit der Erde verbunden, um statische Ladungen abzuführen, den Erdschlußstrom zu begrenzen oder ihn klein zu halten. Je nach dem Zweck der Erdung wird diese unmittelbar oder unter Zwischenschaltung von Ohmschen bzw. induktiven Widerständen ausgeführt.

Der Einfluß, den diese Verbindung des Nullpunktes M der Anlage mit der Erde auf die Lage des Erdpotentials hat, soll jetzt untersucht werden.

Der zwischen dem Nullpunkt und Erde vorhandene Leitwert sei $\mathfrak{y}_0$. Das Potential $\mathfrak{M}$ des Nullpunktes falle nach dem Schwerpunkt des Spannungsdreiecks, der sich, wie leicht nachzuweisen ist, nach der Gleichung bestimmt:
$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3}\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\mathfrak{S} + \frac{1}{3}\mathfrak{T}. \tag{13}$$
(Die Dreieckskoordinaten von $\mathfrak{M}$ sind also sämtlich gleich $\frac{1}{3}$.) Die Koordinaten von $\mathfrak{O}$ seien wieder ϱ, σ und τ. Nach Gleichung (5) bestimmt sich dann die Spannung $\mathfrak{P}_0$ zwischen M und Erde aus:
$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{O} - \mathfrak{M} = \left(\varrho - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{R} + \left(\sigma - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{S} + \left(\tau - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{T}.$$
Für den Strom $\mathfrak{J}_0$, der von M aus zur Erde fließt, finden wir daraus:
$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{P}_0\cdot\mathfrak{y}_0 = \left(\varrho - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{y}_0\cdot\mathfrak{R} + \left(\sigma - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{y}_0\,\mathfrak{S} + \left(\tau - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{y}_0\,\mathfrak{T}. \tag{14}$$
Die Gleichungen für die von den Außenleitern zur Erde fließenden Ströme wurden bereits aufgestellt. (Gleichung 9). Auch hier muß die Summe aller zur Erde fließenden Ströme gleich Null sein:
$$\mathfrak{J}_r + \mathfrak{J}_s + \mathfrak{J}_t + \mathfrak{J}_0 = 0. \tag{15}$$
Die Summen der Koeffizienten der einzelnen Potentiale der Gleichungen (9) und (14) müssen also wieder gleich Null sein. Daraus finden wir:
$$(\varrho - 1)\,\mathfrak{y}_r + \varrho\cdot\mathfrak{y}_s + \varrho\cdot\mathfrak{y}_t + \left(\varrho - \frac{1}{3}\right)\mathfrak{y}_0 = 0$$
$$\varrho = \frac{\mathfrak{y}_r + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t + \mathfrak{y}_0}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\mathfrak{y}_r + \mathfrak{y}_s + \mathfrak{y}_t + \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}, \tag{16}$$

so lauten die Bestimmungsgleichungen für die Dreieckskoordinaten von $\mathfrak{Q}$:

$$\varrho = \frac{\mathfrak{y}_r + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}}; \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{y}_s + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}}; \qquad \tau = \frac{\mathfrak{y}_t + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}}. \tag{17}$$

Bedingung Gleichung (2) ist auch hier erfüllt. Die Gleichungen (17) gehen in die Gleichungen (11) über, wenn $\mathfrak{y}_0 = 0$ wird, d. h. wenn keine in Betracht kommende Verbindung zwischen dem Nullpunkt und Erde besteht. Die Anlage ohne Verbindung des Nullpunktes mit der Erde ist also ein Sonderfall der Anlage, bei der eine solche Verbindung besteht. Bei den folgenden Untersuchungen soll deshalb nur der allgemeinere Fall, die Anlage mit Verbindung des Nullpunktes mit der Erde, zugrunde gelegt werden.

Die Aufzeichnung der Lage des Erdpotentials geschieht hier nach dem gleichen Verfahren, wie bei der Anlage ohne Nullpunktserdung.

Nach den Gleichungen (17) kann also die Lage des Erdpotentials bei jeder (auch unsymmetrischen) Dreiphasenanlage mit beliebiger Art und Zahl von Verbindungen zwischen Leitern sowie Nullpunkt und Erde aufgezeichnet werden. Als

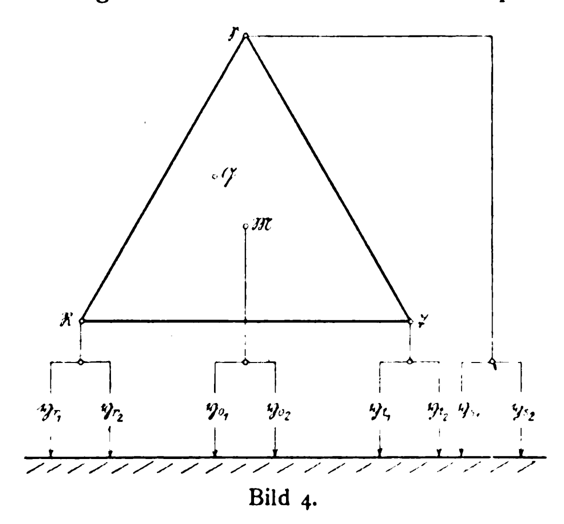


Bild 4.

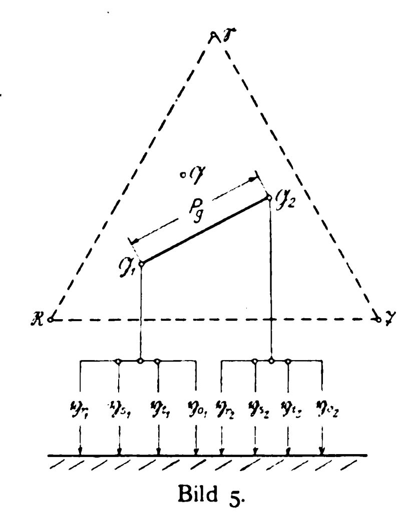


Bild 5.

beschränkende Bestimmung ist nur gegeben, daß der Nullpunkt der Anlage mit dem Schwerpunkt des Spannungsdreiecks zusammenfallen muß. Die Gestalt der Gleichungen (17) ist sehr einfach und übersichtlich.

Bei der Behandlung von praktischen Fragen, bei denen die Lage des Erdpotentials eine Rolle spielt, ist es jedoch, wie die späteren Teile des Aufsatzes zeigen werden, von großem Vorteil, eine Vereinfachung zu Hilfe zu nehmen, die der „Satz von den Grundpotentialen" heißen möge.

Alle zwischen den Leitern sowie dem Nullpunkt und Erde vorhandenen Leitwerte seien in beliebiger Weise in je zwei Summanden zerlegt, so daß

$$\mathfrak{y}_r = \mathfrak{y}_{r_1} + \mathfrak{y}_{r_2}; \quad \mathfrak{y}_s = \mathfrak{y}_{s_1} + \mathfrak{y}_{s_2}; \quad \mathfrak{y}_t = \mathfrak{y}_{t_1} + \mathfrak{y}_{t_2}; \quad \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}_{0_1} + \mathfrak{y}_{0_2}. \tag{18}$$

Vereinigen wir Vektorendarstellung und Schaltungsskizze in einem Bilde, so stellt Bild 4 diesen Fall dar.

Wir fassen nun alle Leitwerte mit dem Index 1 zur „Gruppe 1", alle Leitwerte mit dem Index 2 zur „Gruppe 2" zusammen. Nimmt man zuerst an, daß nur die Leitwerte der Gruppe 1 vorhanden sind, daß also die Leitwerte der Gruppe 2 sämtlich Null sind, so falle das Erdpotential nach $\mathfrak{G}_1$, dem „Grundpotential 1"; ist

nur die Gruppe 2 der Leitwerte vorhanden, so sei $\mathfrak{G}_2$, das „Grundpotential 2", die Lage des Erdpotentials.

Der Satz von den Grundpotentialen besagt nun: Bestehen zwischen einem Leiter mit dem Grundpotential 1 und Erde alle Leitwerte der Gruppe 1 in Parallelschaltung, zwischen einem Leiter mit dem Grundpotential 2 und Erde alle Leitwerte der Gruppe 2 (Bild 5), so nimmt das Erdpotential dieselbe Lage ein, als wenn die Leitwerte in der ursprünglichen Weise zwischen den Drehstromleitern sowie dem Nullpunkt und Erde vorhanden wären (Bild 4).

Nach diesem Satz sind die Schaltungen nach Bild 4 und 5 bezüglich der Lage des Erdpotentials einander gleichwertig. Zum Nachweis dieses Satzes wollen wir die Dreieckskoordinaten ϱ, σ, τ von $\mathfrak{Q}$ unter Zugrundelegung des Bildes 5 berechnen.

Die Koordinaten der Grundpotentiale $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien ϱ_1, σ_1, τ_1 und ϱ_2, σ_2, τ_2. Für die Spannung zwischen G_1 und Erde gilt nach Gleichung 5:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{Q} - \mathfrak{G}_1 = (\varrho - \varrho_1)\mathfrak{R} + (\sigma - \sigma_1)\mathfrak{S} + (\tau - \tau_1)\mathfrak{T}$$

entsprechend erhält man

$$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{Q} - \mathfrak{G}_2 = (\varrho - \varrho_2)\mathfrak{R} + (\sigma - \sigma_2)\mathfrak{S} + (\tau - \tau_2)\mathfrak{T}. \tag{19}$$

Setzen wir zur Vereinfachung entsprechend Gleichung 16

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y}_1 &= \mathfrak{y}_{r_1} + \mathfrak{y}_{s_1} + \mathfrak{y}_{t_1} + \mathfrak{y}_{0_1}; \\ \mathfrak{y}_2 &= \mathfrak{y}_{r_2} + \mathfrak{y}_{s_2} + \mathfrak{y}_{t_2} + \mathfrak{y}_{0_2}; \end{aligned} \qquad \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}, \right\} \tag{20}$$

so erhalten wir für die Ströme $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$, die von den gedachten Leitern mit den Potentialen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zur Erde fließen:

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{y}_1 = (\varrho - \varrho_1) \cdot \mathfrak{y}_1 \cdot \mathfrak{R} + (\sigma - \sigma_1)\mathfrak{y}_1 \mathfrak{S} + (\tau - \tau_1)\mathfrak{y}_1 \mathfrak{T} \tag{21}$$

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{y}_2 = (\varrho - \varrho_2)\mathfrak{y}_2 \cdot \mathfrak{R} + (\sigma - \sigma_2)\mathfrak{y}_2 \mathfrak{S} + (\tau - \tau_2)\mathfrak{y}_2 \mathfrak{T}$$

da $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = 0$ sein muß, wird

$$(\varrho - \varrho_1) \cdot \mathfrak{y}_1 + (\varrho - \varrho_2)\mathfrak{y}_2 = 0 \tag{22}$$

$$\varrho = \frac{\varrho_1 \mathfrak{y}_1 + \varrho_2 \mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2}.$$

Für die anderen Koordinaten von $\mathfrak{Q}$ ergeben sich die entsprechenden Gleichungen.

Nun ist nach der oben getroffenen Festsetzung $\mathfrak{G}_1$ die Lage des Erdpotentials, wenn die Gruppe 1 der Leitwerte allein vorhanden ist. ϱ_1 ergibt sich also aus Gleichung (17) zu:

$$\varrho_1 = \frac{\mathfrak{y}_{r_1} + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_{0_1}}{\mathfrak{y}_1}. \quad \text{Entsprechend gilt:} \quad \varrho_2 = \frac{\mathfrak{y}_{r_2} + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_{0_2}}{\mathfrak{y}_2}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (22) ein, so wird:

$$\varrho = \frac{\mathfrak{y}_{r_1} + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_{0_1} + \mathfrak{y}_{r_2} + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_{0_2}}{\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2}.$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (18) und (20) erhalten wir die endgültige Gleichung für ϱ und auf dem gleichen Wege für σ und τ:

$$\varrho = \frac{\mathfrak{y}_r + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}}; \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{y}_s + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}}; \qquad \tau = \frac{\mathfrak{y}_t + \frac{1}{3}\mathfrak{y}_0}{\mathfrak{y}}.$$

Der Vergleich dieser Werte mit denen aus Gleichung (17) ergibt die Übereinstimmung der mit Hilfe der Grundpotentiale gefundenen Koordinaten von $\mathfrak{Q}$ mit denen, die unmittelbar abgeleitet wurden. Dadurch ist der Satz von den Grundpotentialen allgemein nachgewiesen.

Der Vorteil, der sich aus diesem Satz ergibt, ist in erster Linie der, daß bei Behandlung der Frage nach dem Erdpotential (oder dem Nullpotential einer Belastung in Sternschaltung) an Stelle der gegebenen vier Wechselpotentiale (3 Außen-



leiter und Nullpunkt der Stromerzeuger) eine Ersatzschaltung mit nur 2 Wechselpotentialen (den beiden Grundpotentialen), also einer einphasigen Wechselspannung zugrunde gelegt werden kann. Da bei einer praktischen Anlage fast stets gewisse Symmetrien vorliegen werden, wird die Methode, wie das die folgenden Beispiele zeigen sollen, meist recht einfache Verhältnisse ergeben.

Oft wird es am günstigsten sein, die Einteilung der Leitwerte derart vorzunehmen, daß der einen Gruppe nur Wirkleitwerte, der anderen nur Blindleitwerte angehören[1]).

Wir wollen jetzt die Verschiebung des Erdpotenials bei Veränderung eines der vorhandenen Leitwerte betrachten. Die zwischen Außenleitern sowie Nullpunkt und Erde vorhandenen Wirkleitwerte seien A_r, A_s, A_t bzw. A_0, die entsprechenden Blindleitwerte B_r, B_s, B_t bzw. B_0.

Es ist dann: $\mathfrak{y}_r = A_r + j\,B_r$; $\mathfrak{y}_s = A_s + j\,B_s$ usw. und es gelten die Längenbeziehungen:

$$\mathfrak{y}_r = \sqrt{A_r^2 + B_r^2}; \qquad \mathfrak{y}_s = \sqrt{A_s^2 + B_s^2} \text{ usw.}$$

Hierbei ist B bei einem kapazitiven Stromkreis positiv, bei einem induktiven Stromkreis negativ gesetzt.

Es sei jetzt angenommen, daß außer den eben angegebenen konstanten Wirk- und Blindleitwerten ein veränderlicher Wirkleitwert A_n zwischen einem der Außenleiter oder dem Nullpunkt und Erde vorhanden sei.

Wir treffen dann nach dem Satz von den Grundpotentialen die folgende Gruppeneinteilung der Leitwerte:

Der Gruppe 1 gehöre nur der veränderliche Leitwert A_n an. Das Potential $\mathfrak{G}_1$, das die Erde einnimmt, wenn nur A_n vorhanden ist, fällt mit dem Potential des Leiters zusammen, der über den Leitwert A_n mit der Erde verbunden ist. $\mathfrak{G}_1$ liegt also bei Veränderung von A_n fest.

Alle übrigen Leitwerte bilden die Gruppe 2, die, wenn sie allein vorhanden ist, die Lage $\mathfrak{G}_2$ des Erdpotentials zur Folge hat.

$\mathfrak{G}_2$ ist ebenfalls konstant, da alle Leitwerte der Gruppe 2 konstant sind.

Die Leitwerte der Ersatzschaltung sind also:

zwischen $\mathfrak{G}_1$ und Erde: Wirkleitwert A_n

" $\mathfrak{G}_2$ " " " $A_2 = A_r + A_s + A_t + A_0$

und Blindleitwert $B_2 = B_r + B_s + B_t + B_0$.

Es ergibt sich also ein Diagramm nach Bild 6.

Der Strom $\mathfrak{J}_1$, der von G_1 aus zur Erde fließt, ist der Spannung $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_1\mathfrak{O}}$ parallel:

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_1\mathfrak{O}} \cdot A_n.$$

Der Strom $\mathfrak{J}_2$ möge vor seiner Spannung die Voreilung α besitzen. Die Wirkkomponente von $\mathfrak{J}_2$ ist dann: $\mathfrak{J}_2 \cdot \cos\alpha = \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_2\mathfrak{O}} \cdot A_2$, seine Blindkomponente:

$\mathfrak{J}_2 \cdot \sin\alpha = \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_2\mathfrak{O}} \cdot B_2$.

Der Winkel α bestimmt sich also aus:

$$\tan\alpha = \frac{B_2}{A_2}. \qquad (23)$$

Bild 6.

Da $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = 0$, tritt α auch als Voreilung von $\overline{\mathfrak{O}\mathfrak{G}_1}$ vor $\overline{\mathfrak{G}_2\mathfrak{O}}$ auf. Da B_2 und A_2 konstant sind, ist auch α konstant, d. h. unabhängig von A_n. Bei Veränderung von A_n muß sich also $\mathfrak{O}$ auf einem Kreisbogen über $\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2}$ als Sehne bewegen. Der Kreisbogen wird zum Halbkreis über $\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2}$ als Durchmesser, wenn $A_2 = 0$, $\tan\alpha = \infty$, also $\alpha = 90^0$ wird.

[1]) Die Einteilung der Leitwerte in Wirk- und Blindleitwerte zur Bestimmung des Erdpotenials ist für die Anlage ohne Verbindung des Nullpunktes mit der Erde bereits in Kittler, Petersen, Allgem. Elekrotechnik 2, S. 394 angegeben.

Wird $B_2 = 0$, so wird $\alpha = 0$ und $\mathfrak{Q}$ bewegt sich auf der Strecke $\overline{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2}$. Ist B_2 positiv (Überwiegen der Kapazitäten), so liegt $\mathfrak{Q}$ links von $\overline{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2}$ (von $\mathfrak{G}_1$ aus gesehen); das Umgekehrte ist der Fall, wenn die Induktivitäten überwiegen.

Der entsprechende Nachweis läßt sich führen, wenn der veränderliche Leitwert ein Blindleitwert ist. Allgemein kann also gesagt werden:

Bei Veränderung nur eines (Wirk- oder Blind-) Leitwertes zwischen einem Außenleiter oder dem Nullpunkt und Erde bewegt sich das Erdpotential auf einer Geraden, wenn nur gleichartige, auf einem Kreise, wenn auch verschiedenartige Leitwerte zwischen Leitern sowie Nullpunkt und Erde wirksam sind. Gerade oder Kreis laufen durch das Potential des Leiters, an dem der veränderliche Leitwert anliegt.

Die hier bewiesenen Sätze sollen nun in einem praktischen Falle Verwendung finden.

Messung der Isolationswiderstände von Drehstromhochspannungsanlagen während des Betriebes [1]).

Es ist üblich, den Isolationszustand einer Leitungsanlage durch Messung der Spannungen zwischen Leitern und Erde zu überwachen [2]). Man kann daraus, daß die Spannung eines Leiters gegen die Erde wesentlich kleiner wird als die Sternspannung, darauf schließen, daß die Isolation dieses Leiters schlechter ist als die der anderen Leiter. Maßgebende Schlüsse auf die tatsächliche Größe eines Widerstandes gegen Erde lassen sich jedoch besonders deshalb nicht ziehen, weil man im allgemeinen nicht weiß, ob sich der Isolationswiderstand nur eines Leiters verkleinert hat.

Die Messung sämtlicher Isolationswiderstände während des Betriebes ist jedoch dadurch möglich, daß ein bekannter Wirkleitwert nacheinander zwischen die einzelnen Außenleiter und Erde eingeschaltet wird, und die Lagen des Erdpotentials sowohl ohne wie mit diesem Wirkleitwert gemessen werden. Aus den Lagen, die das Erdpotential in diesen Fällen einnimmt, können die Isolationswiderstände zeichnerisch ermittelt werden [3]).

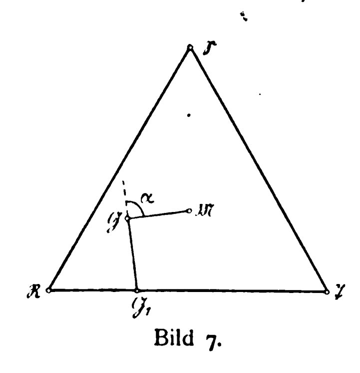


Bild 7.

Zum besseren Verständnis der Methode soll zunächst von dem einfachen Fall ausgegangen werden, daß nur ein unbekannter Wirkleitwert zwischen einem Leiter und Erde vorhanden sei, daß also die anderen unbekannten Wirkleitwerte diesem gegenüber gleich Null gesetzt werden können. Es bestehe in der Anlage keine Verbindung des Nullpunktes mit der Erde.

Beispielsweise sei angenommen, daß der unbekannte Leitwert A_x zwischen dem Leiter T und der Erde vorhanden sei. Der bekannte, anzuschaltende Leitwert A_n werde zunächst zwischen Leiter R und Erde eingeschaltet (Bild 7).

Außer diesen Wirkleitwerten kommen nur noch die Teilkapazitäten der Leiter gegen Erde in Betracht, die bei bestehenden Anlagen durch Verdrillen der Leiter möglichst gleichgroß gemacht werden. Die Teilkapazität jedes Leiters gegen Erde sei C.

Nach dem Satz vom Grundpotential teilen wir dann ein:

---

1) Uppenborn, Deutscher Kalender für Elektrotechnik 1920, S. 135—137. Hausrath, Die Untersuchung elektrischer Systeme auf Grund der Superpositionsprinzipien.

2) Görges, Archiv für Elektrotechnik VI. Bd., S. 17.

3) Die Anregung zur Bearbeitung dieser Ausgabe verdanke ich Herrn Görges.

$\mathfrak{G}_1$ sei das Erdpotential, wenn nur A_n und A_x vorhanden sind,
$\mathfrak{G}_2$ sei das Erdpotential, wenn nur die Kapazitäten der Leiter gegen Erde vorhanden sind.

Da A_n an R und A_x an T anliegen soll, muß $\mathfrak{G}_1$ auf $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$ liegen, und zwar ist nach Gleichung (12) leicht einzusehen, daß die Beziehung bestehen muß:

$$\frac{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{G}_1}}{\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{T}}} = \frac{A_x}{A_n}. \tag{24}$$

$\mathfrak{G}_2$ muß mit $\mathfrak{M}$ zusammenfallen, da die Kapazität der Leiter gegen Erde gleich groß angenommen wurde. Zwischen G_1 und Erde kommen nur die Wirkleitwerte A_n und A_x, zwischen G_2 und Erde die drei Kapizitäten in Parallelschaltung in Betracht. Das Diagramm in Bild 6 hat also auch hier Geltung, und der Winkel α bestimmt sich nach Gleichung (23) aus:

$$\tan\alpha = \frac{B_2}{A_2} = \frac{3\,\omega\,C}{0} = \infty,$$

$\mathfrak{Q}$ muß also auf einem Halbkreise über $\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2}$ als Durchmesser liegen.

Die Bestimmung eines unbekannten Isolationswiderstandes geschieht demnach auf folgendem Wege:

Die Lage des Erdpotentials wird aus Spannungsmessungen der Leiter gegen Erde unter Anlegung eines bekannten Wirkleitwertes an einen Leiter, z. B. R, bestimmt.

In $\mathfrak{Q}$ ist nun auf $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{Q}}$, von $\mathfrak{M}$ aus gesehen nach links hin, das Lot zu errichten. Es sind dann unter der obengemachten Einschränkung, daß nur ein unbekannter Wirkleitwert vorhanden ist, drei Fälle möglich:

1. Das Lot schneidet die Strecke $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$, A_x liegt zwischen T und Erde.
2. Das Lot schneidet die Strecke $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}$, A_x liegt zwischen S und Erde.
3. Das Lot läuft durch $\mathfrak{R}$, A_x liegt zwischen R und Erde.

Der Schnittpunkt des Lotes mit $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}$ oder $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}$ ist das Potential $\mathfrak{G}_1$. Im Falle 1 bestimmt sich A_x aus Gleichung (24), im Falle 2 aus der entsprechenden Gleichung:

$$\frac{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{G}_1}}{\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{S}}} = \frac{A_x}{A_n}.$$

Im 3. Fall wird eine erneute Messung unter Anlegung von A_n an S oder T zum Ziele führen.

Um einen Mittelwert zu erhalten, wird es ratsam sein, A_n der Reihe nach an alle drei Außenleiter anzulegen. Dadurch ist zugleich die Kontrolle möglich, ob A_x wirklich der einzige unbekannte Wirkleitwert war, der zwischen den Leitern und Erde in Betracht kommt.

Wenn der Nullpunkt der Anlage mit der Erde in irgend einer Weise verbunden ist, so ändert sich an der Methode nur der Winkel α.

Die Nullpunktserdung sei beispielsweise über eine Drosselspule erfolgt. Die entsprechende Gruppeneinteilung der Leitwerte ist dann:

$\mathfrak{G}_1$ ist Erdpotential, wenn nur A_x und A_n vorhanden sind.
$\mathfrak{G}_2$ ist Erdpotential, wenn nur die Kapazitäten und die Erdungsdrossel vorhanden sind.

$\mathfrak{G}_2$ liegt bei Gleichheit der Kapazitäten nach wie vor im Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Anlage. Zwischen G_2 und Erde sind also die Kapazitäten und die Drosselspule parallel geschaltet zu denken. Die zwischen G_2 und Erde in Betracht kommenden Leitwerte A_2 und B_2 sind, wenn R_0 der Wirkwiderstand, ωL_0 der Blindwiderstand der Drossel sind:

Drosselspule:	Wirkleitwert:	$\frac{R_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}$	Blindleitwert:	$-\frac{\omega L_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}$
3 Kapazitäten:	„	0	„	$3\,\omega\,C.$

Also:

$$A_2 = \frac{R_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}; \qquad B_2 = 3\,\omega C - \frac{\omega L_0}{R_0^2 + \omega^2 L_0^2}.$$

R_0^2 kann hier als Summand von $\omega^2 L_0^2$ ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden. Dadurch wird:

$$A_2 = \frac{R^0}{\omega^2 L_0^2}; \qquad B_2 = 3\,\omega C - \frac{1}{\omega L_0}. \tag{25}$$

R_0 und ωL_0 hängen von der Sättigung des Eisenkernes der Drosselspule ab. Da die Spannung an der Drosselspule durch die Strecke $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{Q}}$ gegeben ist, so sind diese Werte aus den Magnetisierungs- und Verlustkurven der Drosselspule bei jeder Lage von $\mathfrak{Q}$ bestimmt.

Eine Erdungsdrossel soll nach Herrn Petersen so abgestimmt sein, daß, wenn die Sternspannung an der Drosselspule besteht, die Beziehung gilt:

$$\omega L_0 = \frac{1}{3\,\omega C}. \tag{26}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so wird in den Gleichungen (25)

$$B_2 = 0.$$

Das gleiche ist der Fall, wenn an Stelle des Nullpunktes die Außenklemmen der Stromerzeugungsanlage über Drosselspulen geerdet sind, von denen jede eine dreimal größere Induktivität besitzt als die Nullpunktsdrosselspule. Der Scheinleitwert der drei Polerdungsdrosselspulen in Parallelschaltung hat dann denselben Wert wie der der Nullpunktsdrossel.

Wenn $B_2 = 0$ ist, wird auch $\tan\alpha$ und α Gleichung (23) zu Null, d. h. $\mathfrak{G}_1$ liegt auf der geraden Verlängerung von $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{Q}}$. Die Bestimmung eines unbekannten Isolationswiderstandes wird dadurch bei vorhandener richtig abgestimmter Erdungsdrosselspule noch einfacher als bei der Anlage ohne Verbindung des Nullpunktes mit der Erde.

Ist der Nullpunkt über Wirkwiderstände geerdet, so ist die Bestimmung von α durch die Größe der Kapazitäten und der Erdungswiderstände gegeben.

Sind die Isolationswiderstände sämtlicher Leiter gegen Erde unbekannt, so ist ihre Bestimmung auf dem nachstehenden Wege durchführbar.

Die unbekannten Isolationswiderstände zwischen den Leitern R, S, T und Erde seien R_r, R_s und R_t, die entsprechenden Leitwerte $A_r = \frac{1}{R_r}$, $A_s = \frac{1}{R_s}$ und $A_t = \frac{1}{R_t}$. Zur Abkürzung setzen wir:

$$A_x = A_r + A_s + A_t \tag{27}$$

Der bekannte anzuschaltende Leitwert sei wie oben A_n. Das Erdpotential fällt wieder nach $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_2$, wenn nur die gleichgroßen Teilkapazitäten der Leiter gegen Erde und eine beliebige Verbindung des Nullpunktes M mit der Erde vorhanden ist. Die zwischen G_2 und Erde in Betracht kommenden Leitwerte mögen wie bisher A_2 und B_2 heißen. Es seien insgesamt die folgenden Lagen des Erdpotentials bezeichnet:

Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_2$,
wenn die Leitwerte A_2, B_2 vorhanden sind.

Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{M}_r$,
wenn die Leitwerte A_n (an R), A_2, B_2 vorhanden sind.

Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{Q}$,
wenn die Leitwerte A_x, A_2, B_2 vorhanden sind.

Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{Q}_r$,
wenn die Leitwerte A_n (an R), A_x, A_2, B_2 vorhanden sind.

Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{G}_x$, wenn die Leitwerte A_x vorhanden sind.



Die Lage des Erdpotentials sei $\mathfrak{G}_{rx}$,

wenn die Leitwerte A_n (an R), A_x vorhanden sind.

Es ist hierbei beispielsweise angenommen worden, daß A_n zwischen den Leiter R und Erde eingeschaltet wird.

Das obenbezeichnete Potential $\mathfrak{M}_r$, das die Erde einnimmt, wenn nur A_n, A_2 und B_2 vorhanden sind, bestimmt sich wie folgt: $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ sind nach der vorstehenden Aufstellung Grundpotentiale für $\mathfrak{M}_r$. Sind zwischen R und Erde nur A_n, zwischen M und Erde nur A_2 und B_2 vorhanden, so fällt das Erdpotential nach $\mathfrak{M}_r$. Nach der Gleichung (12) bestehen also die Längenbeziehungen:

$$\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_r} = \frac{A_n}{\sqrt{(A_n + A_2)^2 + B_2^2}} \cdot \overline{\mathfrak{M}\mathfrak{R}}$$

und

$$\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{M}_r} = \sqrt{\frac{A_2^2 + B_2^2}{(A_n + A_2)^2 + B_2^2}} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{R}. \tag{28}$$

Schlägt man Kreisbögen mit diesen Spannungen um $\mathfrak{M}$ und um $\mathfrak{R}$, so ist dadurch $\mathfrak{M}_r$ gegeben, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{M}_r$ rechts von $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{R}}$ (von $\mathfrak{M}$ aus gesehen) liegen muß, wenn B_2 positiv ist, links von $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{R}}$, wenn B_2 negativ ist. Wenn der

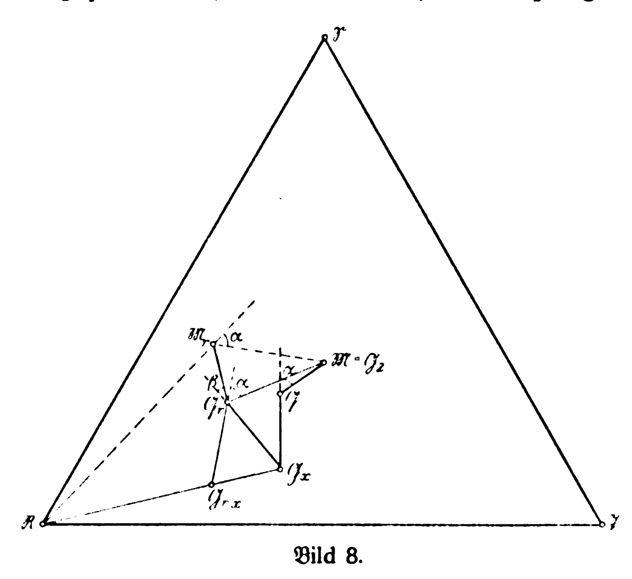


Bild 8.

Schnittpunkt der Kreisbögen zu flach ist, so ist eine genauere Bestimmung durch den Winkel α (Bild 8) zwischen $\overline{\mathfrak{M}_r\mathfrak{R}}$ und $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_r}$ möglich. Nach dem Vorausgegangenen ist ja leicht zu übersehen, daß für α die schon oft benutzte Beziehung (23) besteht:

$$\tan\alpha = \frac{B_2}{A_2}.$$

Die Lage von $\mathfrak{M}_r$ ist von den unbekannten Isolationswiderständen der Leiter unabhängig. $\mathfrak{M}_r$ braucht also bei jeder Anlage nur einmal bestimmt zu werden und liegt dann fest.

$\mathfrak{Q}$ ist die Lage des Erdpotentials bei normaler Anlage. Es wird also aus der Größe der Spannungen gefunden, die durch Messung zwischen Leitern und Erde wenn A_n nicht angelegt ist, festgestellt werden. $\mathfrak{Q}_r$ ergibt sich aus diesen Spannungsmessungen unter Anlegen von A_n an den Leiter R. $\mathfrak{G}_x$ und $\mathfrak{M}$ sind Grundpotentiale für $\mathfrak{Q}$. Da zwischen $\mathfrak{G}_x$ und Erde nur Wirkleitwerte in Betracht kommen,

schließen auch $\overline{\mathfrak{Q}\,\mathfrak{G}_x}$ und $\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{Q}}$ den Winkel α Gleichung (23) ein. Wir wissen aus dem Vorhergegangenen, daß $\mathfrak{G}_x$ bei positivem α links von $\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{Q}}$ liegt. $\mathfrak{G}_x$ und $\mathfrak{M}_r$ sind Grundpotentiale für $\mathfrak{Q}_r$. Der Winkel β zwischen $\overline{\mathfrak{Q}_r\,\mathfrak{G}_x}$ und $\overline{\mathfrak{M}_r\,\mathfrak{Q}_r}$ berechnet sich, da zwischen $\mathfrak{M}_r$ und Erde die Leitwerte A_n, A_2 und B_2 in Betracht kommen, aus:

$$\tan\beta = \frac{B_2}{A_n + A_2}. \tag{29}$$

Das Potential $\mathfrak{G}_x$ findet sich demnach, indem in der geschilderten Weise an $\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{Q}}$ der Winkel α, an $\overline{\mathfrak{M}_r\,\mathfrak{Q}_r}$ der Winkel β angetragen wird. Der Schnittpunkt der freien Schenkel dieser Winkel ist $\mathfrak{G}_x$.

Auch $\mathfrak{G}_{r,x}$ und $\mathfrak{M}$ sind Grundpotentiale für $\mathfrak{Q}_r$. Der Winkel, den $\overline{\mathfrak{Q}_r\,\mathfrak{G}_{r,x}}$ mit $\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{Q}_r}$ einschließt, ist also wieder gleich α. $\mathfrak{G}_{r,x}$ selbst besitzt die Grundpotentiale $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}_x$. Für diese drei Potentiale kommen nur Wirkleitwerte in Betracht, $\mathfrak{G}_{r,x}$ liegt also auf der Strecke $\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_x}$ und wird gefunden als Schnittpunkt des freien Schenkels des an $\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{Q}_r}$ angetragenen Winkels α mit dieser Strecke $\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_x}$.

Durch Antragen der bekannten Winkel α und β sind dadurch die Potentiale $\mathfrak{G}_x$ und $\mathfrak{G}_{r,x}$ gefunden worden. Aus ihrer Lage können die gesuchten Isolationswiderstände bestimmt werden. $\mathfrak{G}_{r,x}$ teilt die Strecke $\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_x}$ im Verhältnis $A_x : A_n$:

$$\frac{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_{r,x}}}{\overline{\mathfrak{G}_{r,x}\,\mathfrak{G}_x}} = \frac{A_x}{A_n}. \tag{30}$$

In dieser Gleichung sind außer A_x alle Größen bekannt oder meßbar; A_x, die Summe der unbekannten Wirkleitwerte, ist also gefunden.

Da $\mathfrak{G}_x$ das Erdpotential ist, wenn nur die unbekannten Isolationswiderstände vorhanden sind, ergeben sich die Dreieckskoordinaten ϱ_x, σ_x und τ_x aus Gleichung (11) zu:

$$\varrho_x = \frac{A_r}{A_x}; \qquad \sigma_x = \frac{A_s}{A_x}; \qquad \tau_x = \frac{A_t}{A_x}. \tag{31}$$

Diese Dreieckskoordinaten sind reell. Man findet sie nach Bild 1. Schneidet z. B. die Parallele durch $\mathfrak{G}_x$ zu $\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}$ die Strecke $\mathfrak{R}\,\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{U}$, so ist:

$$\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{U}} = \tau_x \cdot \overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{T}} \qquad \text{und} \qquad \overline{\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_x} = \sigma_x \cdot \overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}}.$$

Wir finden daraus:

$$A_s = A_x \cdot \frac{\overline{\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_x}}{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}}}; \qquad A_t = A_x \cdot \frac{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{U}}}{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{T}}}.$$

Der Leitwert A_r ergibt sich auf ganz entsprechendem Wege.

Die hier entwickelten Methoden sollen nun an einigen Versuchen erläutert werden, die im elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule zu Dresden angestellt wurden. Diese sollen dartun, welche Genauigkeit bei den Messungen zu erwarten ist, und welche Grenzen der Methode in der Praxis gesteckt sein werden.

Zu den Versuchen wurde ein Drehstromgenerator von 4,2 kW und einer Spannung von 110 Volt verwendet (Bild 9). Die Wicklung war in Stern geschaltet. Die Klemmen R, S und T der Maschine waren über gleichgroße Kondensatoren von $C = 40{,}5\,\mu F$ mit einem äußeren Punkte, einer künstlichen Erde Q, verbunden. Zwischen Nullpunkt M des Generators und Q kann eine Drosselspule eingeschaltet werden. Mit drei einpoligen Schaltern, von denen stets nur einer geschlossen sein darf, kann ferner ein bekannter Widerstand zwischen jeden einzelnen Außenleiter und Erde eingeschaltet werden.

Der erste Versuch stellt die Messung e i n e s unbekannten Isolationswiderstandes in einer Anlage ohne Verbindung des Nullpunktes mit der Erde dar, wie sie auf Seite 408 u. ff. beschrieben wurde. Die Teilkapazitäten der Leiter gegen Erde sind



in der Versuchsschaltung durch die Kondensatoren ersetzt. Die Widerstände R_r und R_s sind abgeschaltet, so daß als unbekannter Widerstand nur R_t vorhanden ist. Ebenso ist der Drosselspulenkreis unterbrochen. Nach dem oben Gesagten wird bei dieser Anlage $\mathfrak{G}_1$, das Grundpotential der beiden Wirkwiderstände R_n und R_t, gefunden durch Antragen eines rechten Winkels an $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{O}}$ in $\mathfrak{O}$. $\mathfrak{G}_1$ liegt stets links von $\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{O}}$.

Um den Einfluß der Ankerrückwirkung der Maschine möglichst klein zu halten, wurde die Maschine bei allen Versuchen gleichzeitig durch Wirkwiderstände belastet.

Die Messung der Spannungen zwischen den Leitern und Erde wurde durch Spiegelelektrometer vorgenommen. Die Kreise, die mit den Vektoren der gemessenen Spannungen gegen Erde um die Punkte $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ beschrieben wurden, schnitten sich fast genau in einem Punkte. Die Fehler, die hier durch Oberschwingungen entstanden, waren also sehr gering. Der Einfachheit halber sind die Werte der gemessenen Spannungen nicht mit in den Tabellen angegeben, da sie aus den Bildern bequem abgegriffen werden können.

Der Widerstand R_t ist bei dem Versuch so gewählt, daß er mit der vorhandenen Anordnung gerade noch einwandfrei gemessen werden kann. Wenn R_t kleiner ist, so werden, da $\mathfrak{O}$ dann weiter von $\mathfrak{M}$ entfernt ist, die bei der Messung entstehenden Fehler im allgemeinen kleiner werden.

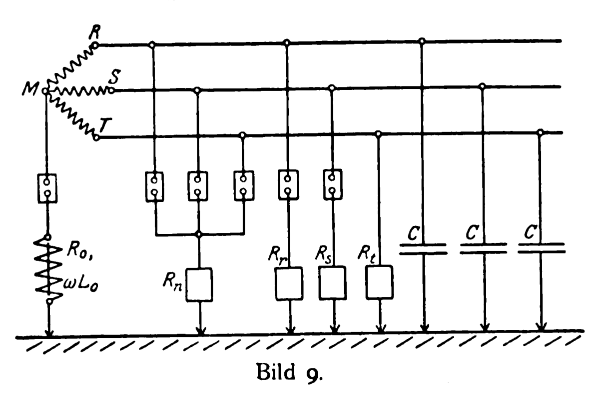


Bild 9.

Dem angelegten Widerstand R_n sind fünf verschiedene Größen gegeben, damit aus dem Versuch ersehen werden kann, welche Verschiedenheit von R_n und R_t noch zu genügenden Ergebnissen führt. Je kleiner R_n im Verhältnis zu R_t wird, um so näher wird $\mathfrak{G}_1$ an das Potential des Leiters heranfallen, an dem R_n anliegt, um so größer werden also die Meßfehler werden. Der unbekannte Widerstand R_t liegt stets zwischen T und Erde. Liegt auch R_n an T an, so fällt $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{T}$ zusammen. Die Messung führt also zu keinem Ergebnis. Liegt R_n an Leiter R an, so gilt nach Gleichung (24):

$$\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_1} : \overline{\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{T}} = R_n : R_t,$$

liegt R_n an Leiter S an, so gilt entsprechend:

$$\overline{\mathfrak{S}\,\mathfrak{G}_1'} : \overline{\mathfrak{G}_1'\mathfrak{T}} = R_n : R_t.$$

Nach diesen Gleichungen ist R_t in Tabelle 1 bestimmt und mit dem wirklichen Wert von R_t, der aus Messung mit der Wheatstoneschen Brücke gefunden wurde, verglichen. Der Einfachheit halber wollen wir die Strecken auch in Volt angeben, um vom Zeichenmaßstab unabhängig zu bleiben.

Es läßt sich nach diesen Versuchsergebnissen bei jeder Anlage, bei der die Kapazität der Leiter gegen Erde angenähert bekannt ist, ein Urteil darüber abgeben, welche Widerstände gerade noch gemessen werden können und wie groß der Vergleichswiderstand R_n am besten zu wählen ist. Große Kapazitäten halten das Erdpotential stark in seiner normalen Mittellage fest, so daß die Widerstände klein sein müssen, um eine genügende Abweichung von der Nullage zu erhalten.



Tabelle 1. (Bild 10.)

Netzspannung P = 110 Volt.

a) $\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{G}_1} = (110 - \overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{T}})$ Volt; b) $\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1'} = (110 - \overline{\mathfrak{G}_1'\mathfrak{T}})$ Volt.

R_n	a) R_n an R			b) R_n an S			Mittelwert	Wirklicher Wert	Abweichung
Ω	Punkt Nr.	$\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{T}}$ Volt	$R_{t(a)}$ Ω	Punkt Nr.	$\overline{\mathfrak{G}_1'\mathfrak{T}}$ Volt	$R_{t(b)}$ Ω	$R_{t_{gem.}}$ Ω	R_t Ω	in % von R_t
150,5	1	18,90	918	1'	18,94	930	924		−7,3
200,6	2	18,02	910	2'	18,39	1021	966		−3,1
251,9	3	17,30	925	3'	17,35	1006	966	997	−3,1
302,3	4	16,11	830	4'	17,19	1080	955		−4,2
354,0	5	15,67	875	5'	16,50	1061	968		−2,9

Die Nachprüfung dieser Frage ergibt, daß bei mittleren Anlagen die Methode recht gut genügt, um die Isolationswiderstände zu messen, während bei sehr großen Leitungslängen und Höchstspannungen die notwendigen großen Isolationswiderstände nicht genügen werden, um eine verwendbare Verschiebung des Erdpotentials hervorzurufen.

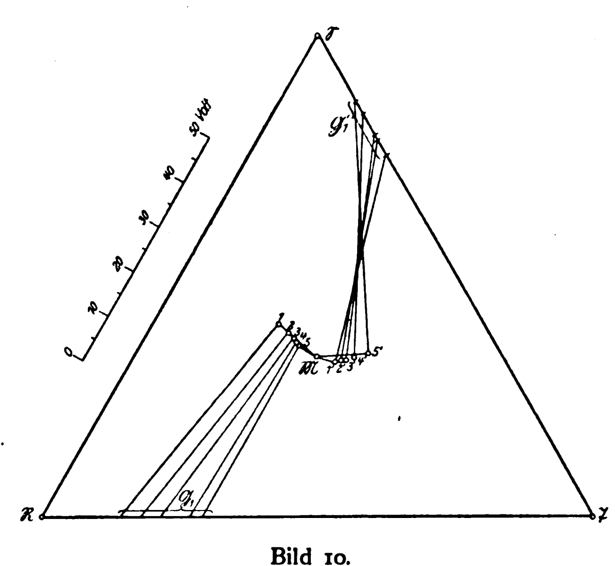


Bild 10.

Bei Anlagen mit Erdungsdrosselspulen wird die Kapazität der Leiter gegen Erde durch die Induktivität der Erdungsdrosselspule angenähert aufgehoben, so daß das Erdpotential wesentlich leichter aus seiner Lage zu verschieben ist. Es können demnach hier bedeutend größere Widerstände gemessen werden.

Der zweite Versuch zeigt die Messung von drei unbekannten Isolationswiderständen in der Anlage ohne Erdungsdrosselspule auf dem beschriebenen Wege. Der bekannte Widerstand $R_n = \frac{1}{A_n}$ wird der Reihe nach an alle drei Leiter angeschlossen und dadurch werden außer den in der Zusammenstellung Seite 410 angegebenen Lagen des Erdpotentials noch die Lagen $\mathfrak{M}_s, \mathfrak{M}_t, \mathfrak{Q}_s, \mathfrak{Q}_t, \mathfrak{G}_{s,x}, \mathfrak{G}_{t,x}$ erhalten, deren Bedeutung aus der obigen Zusammenstellung gleichzeitig hervorgeht. Bei dem Versuche ist $R_n = 204{,}6\ \Omega$, also $A_n = 0{,}00489$ Siemens. Die benutzten Kapazitäten sind wieder sämtlich gleich $C = 40{,}5\ \mu F$. Da keine Drosselspule vorhanden ist, werden die zwischen $M = G_2$ und Erde vorhandenen Leitwerte A_2 und B_2 nach den Gleichungen (25):

$$A_2 = 0 \text{ und } B_2 = 3\,\omega\,C = 0{,}0382 \text{ Siemens.}$$

Die zur Bestimmung der Lage von $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_t$ dienenden Längenbeziehungen (28) geben damit:

$$\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}_r} = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_2^2}} \cdot \overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}} = 0{,}1268\,\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}}.$$

$$\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}_r} = \frac{B_2}{\sqrt{A_n^2 + B_2^2}} \cdot \overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}} = 0{,}991\,\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}}.$$

Da A_2 gleich Null ist, muß $\mathfrak{M}_r$ außerdem auf dem Halbkreis über $\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}}$ als Durchmesser liegen. Bei symmetrischem System, das hier vorliegt. ist die Lage von $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_t$ symmetrisch zu der von M_r. Wir finden also die drei Potentiale, indem wir um $\mathfrak{M}$ mit dem Halbmesser $0{,}1268\,\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}} = 0{,}1268\,\frac{110}{\sqrt{3}} = 8{,}05$ Volt einen Kreis beschreiben. Auf diesem liegen die gesuchten Potentiale. Der zweite geometrische Ort für jedes Potential ist der Kreis um das Potential des zugehörigen Außenleiters mit dem Radius $0{,}991 \cdot \frac{110}{\sqrt{3}} = 62{,}9$ Volt. $\mathfrak{M}_r$ liegt rechts von $\overline{\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}}$ usf. (Bild 11). Die weiteren Lagen des Erdpotentials wurden durch Spannungsmessungen in der üblichen Weise gefunden: $\mathfrak{Q}$ ohne Anlegen von A_n, $\mathfrak{Q}_r$, wenn A_n an R, $\mathfrak{Q}_s$, wenn

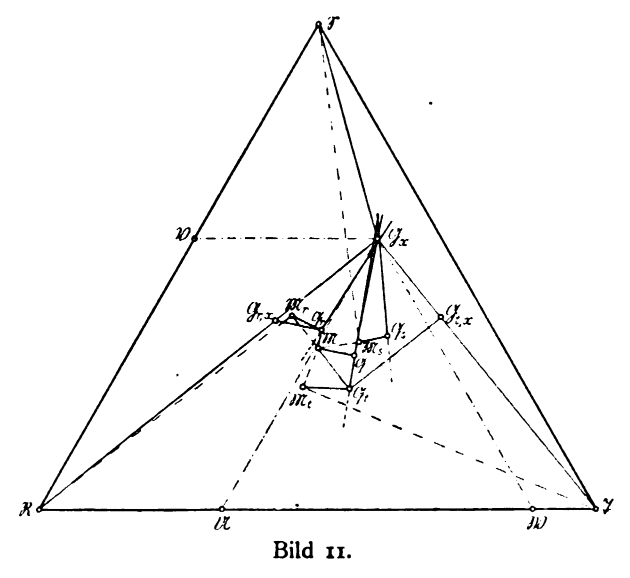


Bild 11.

A_n an S und $\mathfrak{Q}_t$, wenn A_n an T angelegt ist. Die dadurch gefundenen Potentiale sind ebenfalls in Bild 11 eingezeichnet. Nach den Gleichungen (23) und (29) sind die Winkel α und β im vorliegenden Falle bestimmt durch:

$$\tan\alpha = \frac{B_2}{A_2} = \infty; \qquad \alpha = 90^0$$

$$\tan\beta = \frac{B_2}{A_n + A_2} = \frac{0{,}0382}{0{,}00489} = 7{,}81.$$

In der oben geschilderten und aus Bild 11 hervorgehenden Weise werden daraus $\mathfrak{G}_x$ und die Potentiale $\mathfrak{G}_{r,x}$, $\mathfrak{G}_{t,x}$ zeichnerisch gefunden. Die Lage von $\mathfrak{G}_{s,x}$ soll hier unberücksichtigt bleiben, da sie infolge zu flachen Schnittpunktes nur ungenau gefunden werden kann. Durch Messung ergibt sich aus dem Bild:

$$\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_{r,x}} = 59{,}5 \text{ Volt} \qquad \overline{\mathfrak{G}_{r,x}\,\mathfrak{G}_x} = 25{,}9 \text{ Volt,}$$

$$\overline{\mathfrak{T}\,\mathfrak{G}_{t,x}} = 48{,}8 \text{ „} \qquad \overline{\mathfrak{G}_{t,x}\,\mathfrak{G}_x} = 19{,}9 \text{ „}$$

Nach Gleichung (30) finden wir also:

$$A_{x,r} = \frac{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}_{r,x}}}{\overline{\mathfrak{G}_{r,x}\,\mathfrak{G}_x}} \cdot A_n = \frac{59,5}{25,9} \cdot 0,00489 = 0,01145 \text{ Siemens,}$$

$$A_{x,s} = \frac{\overline{\mathfrak{T}\,\mathfrak{G}_{t,x}}}{\overline{\mathfrak{G}_{t,x}\,\mathfrak{G}_x}} \cdot A_n = 0,01199 \text{ Siemens.} \tag{32}$$

Daraus der Mittelwert:

$$A_x = 0,01172 \text{ Siemens.}$$

Durch Parallele zu den Dreiecksseiten und nach den Gleichungen (4) und (31) ergibt sich also:

$$A_r = \varrho_x \cdot A_x = \frac{\overline{\mathfrak{T}\,\mathfrak{W}}}{\overline{\mathfrak{T}\,\mathfrak{R}}} \cdot A_x = \frac{12,5}{110,0} \cdot 0,01172 = 0,001333 \text{ Siemens,}$$

$$A_s = \sigma_x \cdot A_x = \frac{\overline{\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_x}}{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}}} \cdot A_x = \frac{61,4}{110,0} \cdot 0,01172 = 0,00655 \text{ Siemens.}$$

$$A_t = \tau_x \cdot A_x = \frac{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{U}}}{\overline{\mathfrak{R}\,\mathfrak{T}}} \cdot A_x = \frac{36,0}{110,0} \cdot 0,01172 = 0,00384 \text{ Siemens.}$$

Die reziproken Werte dieser Leitwerte sind die gesuchten Isolationswiderstände. Die Zusammenstellung dieser Ergebnisse mit den wirklichen, aus Messung mit der Wheatstoneschen Brücke gefundenen Werte der Widerstände ergibt:

	Aus dem Versuch Ω	Wirkliche Werte Ω	Abweichung in %
R_r	750	708	+ 5,9
R_s	152,8	151,5	+ 0,9
R_t	260,3	250,7	+ 3,8

Der dritte Versuch zeigt die Messung von drei unbekannten Isolationswiderständen in der Anlage mit Erdungsdrosselspule. Der Drosselspulenkreis in Bild 9 ist also hier geschlossen. An den Wirkwiderständen und Kapazitäten wurde nichts geändert. Die Induktivität der benutzten Drosselspule konnte durch Verstellung ihres Luftspaltes geändert werden. Sie wurde so reguliert, daß Gleichung (26) erfüllt war. Diese Einstellung geschah dadurch, daß unter Abschaltung sämtlicher Wirkwiderstände und einer Kapazität, z. B. der zwischen Leiter R und Erde, die Spannung zwischen diesem Leiter und Erde zu einem Minimum gemacht wurde. Nachherige Messungen an der Drosselspule ergaben ihren Wirkleitwert:

$$A_0 = \frac{R_0}{\omega^2 L_0^2} = 0,0057 \text{ Siemens}$$

und ihren Blindleitwert:

$$B_0 = -\frac{1}{\omega L_0} = -0,037 \text{ Siemens.}$$

Nach den Gleichungen (25) werden damit die zwischen G_2 und Erde in Betracht kommenden Leitwerte:

$$A_2 = \frac{R_0}{\omega^2 L_0^2} = 0,0057 \text{ Siemens}; \quad B_2 = 3\,\omega C - \frac{1}{\omega L_0} = 0,038 - 0,037 = 0,001 \text{ Siem.}$$

Die Induktivität der Drosselspule ändert sich mit ihrer Spannung. Diese Änderung muß sich in der Größe von B_2 in einer sehr großen prozentualen Änderung zeigen, da B_2 die Differenz zweier fast gleichgroßer Zahlen ist. Die Änderung der Induktivität kann aus der Magnetisierungskurve der Drosselspule entnommen und mit in

Rechnung gesetzt werden. Es ist jedoch bei den vorliegenden Versuchen darauf verzichtet worden und $B_2 = 0$ angenommen worden.

Der bekannte Wirkleitwert ist unverändert: $A_n = 0{,}00489$ Siemens, und damit werden die Gleichungen (28):

$$\overline{\mathfrak{M}\mathfrak{M}_r} = \frac{0{,}0049}{0{,}0049 + 0{,}0057} \cdot \overline{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = 0{,}462 \cdot \overline{\mathfrak{M}\mathfrak{N}},$$

$$\overline{\mathfrak{N}\mathfrak{M}_r} = \frac{0{,}0057}{0{,}0049 + 0{,}0057} \cdot \overline{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} = 0{,}538 \cdot \overline{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}.$$

Aus diesen wie aus den entsprechenden Gleichungen für die anderen Leiter lassen sich die Potentiale $\mathfrak{M}_r$, $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_t$ finden. Diese Potentiale liegen auf der geraden Verbindungslinie zwischen dem zugehörigen Leiter-Potential und dem Nullpunkt $\mathfrak{M}$:

Die Spannungsmessungen ohne Anlegen von A_n und unter Anlegen von A_n an die einzelnen Leiter ergeben wieder vier Lagen des Erdpotentials: $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_r$, $\mathfrak{Q}_s$ und $\mathfrak{Q}_t$ (Bild 12). Nach den Gleichungen (23) und (29) werden jetzt beide Winkel α und β gleich Null. Die Auffindung der Potentiale $\mathfrak{G}_x$ und $\mathfrak{G}_{r,x}$, $\mathfrak{G}_{s,x}$, $\mathfrak{G}_{t,x}$ wird also besonders einfach.

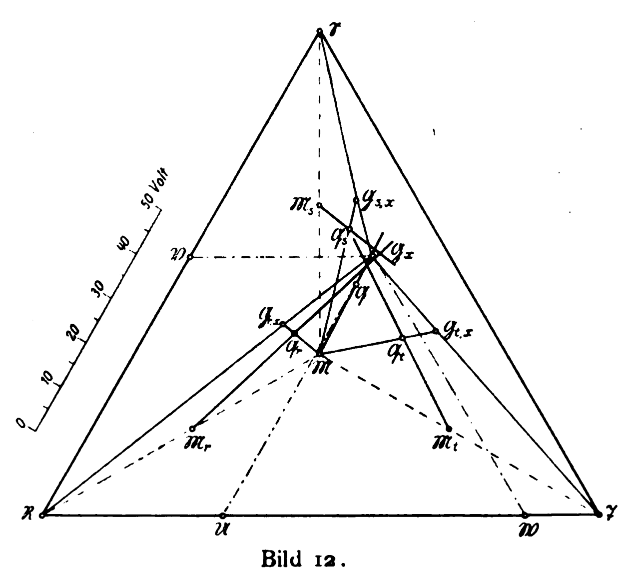


Bild 12.

Nach den Gleichungen (32) ergeben sich durch Messung der betreffenden Strecken in Bild 12 drei Werte für die Summe der unbekannten Wirkleitwerte:

$$A_{x,r} = \frac{\overline{\mathfrak{N}\mathfrak{G}_{r,x}}}{\overline{\mathfrak{G}_{r,x}\mathfrak{G}_x}} ; A_n = \frac{6{,}08}{2{,}15} \cdot 0{,}00489 = 0{,}0138 \text{ Siemens},$$

$$A_{x,s} = \frac{\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{G}_{s,x}}}{\overline{\mathfrak{G}_{s,x}\mathfrak{G}_x}} \cdot A_n = \frac{3{,}40}{1{,}11} \cdot 0{,}00489 = 0{,}0150 \text{ Siemens}.$$

$$A_{x,t} = \frac{\overline{\mathfrak{T}\mathfrak{G}_{t,x}}}{\overline{\mathfrak{G}_{t,x}\mathfrak{G}_x}} \cdot A_n = \frac{4{,}85}{2{,}00} \cdot 0{,}00489 = 0{,}0118 \text{ Siemens}.$$

Wenn wir von dem Wert $A_{x,s}$, der von einem zu flachen Schnittpunkt herrührt absehen, wird der Mittelwert:

$$A_x = 0{,}0128 \text{ Siemens}.$$

Und endlich finden wir durch Ziehen der Parallelen durch $\mathfrak{G}_x$ zu den Dreieckseiten aus Gleichung (31):

$$A_r = \varrho_x \cdot A_x = \frac{\overline{\mathfrak{T}\mathfrak{W}}}{\overline{\mathfrak{T}\mathfrak{R}}} \cdot A_x = \frac{14,6}{110,0} \cdot 0,0128 = 0,00169 \text{ Siemens}$$

$$A_s = \sigma_x \cdot A_x = \frac{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{V}}}{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{S}}} \cdot A_x = \frac{58,7}{110,0} \cdot 0,0128 = 0,00684 \text{ Siemens}$$

$$A_t = \tau_x \cdot A_x = \frac{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{U}}}{\overline{\mathfrak{R}\mathfrak{T}}} \cdot A_x = \frac{35,5}{110,0} \cdot 0,0128 = 0,00413 \text{ Siemens.}$$

Dadurch ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

	Aus dem Versuch Ω	Wirkliche Werte Ω	Abweichung in %
R_r	591	708	+ 16,5
R_s	146,2	151,5	+ 3,3
R_t	242,0	250,7	+ 3,2

Die auftretenden Fehler werden demnach immerhin beträchtlich. Ob diese sich bei Messungen an ausgeführten Anlagen verkleinern lassen, kann nicht ohne weiteres gesagt werden. Im allgemeinen wird es jedoch nicht so wesentlich sein, die wahre Größe, als die Veränderung der Isolationswiderstände ständig zu überwachen. Zeigt sich dabei eine bedeutende Verkleinerung eines Isolationswiderstandes, so wird die Benutzung von Leckstrommeldern[1]) oder anderen Hilfsmitteln[2]) die Auffindung der Fehlerstelle unter Umständen gestatten, ehe ein Isolatorenüberschlag oder Kabeldurchschlag mit seinen unangenehmen Folgeerscheinungen stattgefunden hat. Die Benutzung der angegebenen exakten Isolationsmessung verspricht dadurch große Vorteile.

Bei der überwiegenden Mehrzahl der Hochspannungsanlagen bestehen bereits Einrichtungen zur Messung der Spannungen gegen Erde. Die Oberspannungsseite der Spannungswandler ist im allgemeinen in Stern geschaltet und ihr Nullpunkt geerdet. Die Induktivität dieser Meßwandler, die zu der Kapazität der zugehörigen Leiter gegen Erde parallel geschaltet ist, wird im allgemeinen von sehr geringem Einfluß sein. Fehler können dadurch nur dann entstehen, wenn die Spannungen der Leiter gegen Erde stark voneinander abweichen und dadurch auch die Induktivitäten der einzelnen Phasen des Meßwandlers merklich verschieden werden. Wo eine solche Meßeinrichtung besteht, ist nur ein entsprechend großer Wirkwiderstand zu beschaffen, dessen Herstellung keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bereitet. Bei der Größe des Widerstandes genügen Trennschalter zum An- und Abschalten des Widerstandes an die einzelnen Leiter.

Liegen zwei Leitungssysteme streckenweise so nahe zusammen, daß die Teilkapazitäten zweier Leiter der verschiedenen Systeme gegeneinander gegenüber der Teilkapazität der Leiter gegen Erde in Betracht kommen, so wird durch die kapazitive Kopplung eine Verschiebung des Erdpotentials des einen Systems auch eine Verschiebung des Erdpotentials des anderen Systems zur Folge haben. Der Erdschluß eines Leiters eines Systems wird dann im anderen System einen scheinbaren Erdschluß zur Folge haben. Liegen also zwei Systeme auf längerer Strecke parallel zueinander, so wird man im allgemeinen nur nach Messungen in beiden Systemen maßgebende Angaben über die Isolationswiderstände der Leiter gegen Erde machen können.

[1]) Der Leckstrommelder von Ober-Ing. Werner Skirl, Siemens-Zeitschrift 1921, 3. Heft, S. 75.

[2]) Mittel zur Feststellung fehlerhafter Isolatoren auf der Strecke von Dr.-Ing. W. Weicker, Hermsdorf, S.-A. Elektr. Kraftbetr. u. Bahnen 1921, 16. Heft, S. 189.

Ziehen und Oberwellen beim Zwischenkreis-Röhrensender.

Von

G. Glage und H. Edler.

(Mitteilung aus dem Technisch-Physikalischen Institut der Universität Jena.)

(Fortsetzung.)

Die verschiedenen Arten der Gitterkopplung.

Bei der Untersuchung der Oberwellen war uns bereits aufgefallen, daß bei unserer Versuchsanordnung, bei der Primär-, Sekundär- und Gitterspule übereinander verschiebbar waren (vgl. Bild 2 des ersten Teiles dieser Arbeit), um auch die 5. und 6. Harmonische als Oberwelle zu erhalten, wir die Stellung der Sekundärspule so wählen mußten, daß nicht allein ihre Kopplung mit der Primärspule stark, sondern daß auch die Gitterspule mehr mit dem Sekundärkreis wie mit dem Primärkreis gekoppelt war. Es war also nicht, wie wir anfangs vermuteten, allein die Kopplung zwischen Primär- und Sekundärkreis (im folgenden kurz Kopplung I—II bezeichnet) maßgebend, um die Sprungstelle möglichst weit hinauszudrücken. Wir nahmen eine nähere Untersuchung der Erscheinung damals nicht vor, da wir mit der Erklärung der Oberwellen beschäftigt waren. Unterdessen hatte Herr Geheimrat Professor M. Wien, der, von ganz anderer Seite ausgehend, das Ziehen untersuchte, gefunden, daß für das Verschieben der Sprungstelle in der Hauptsache die Kopplung der Gitterspule mit dem Sekundärkreis verantwortlich ist und uns auf die verschiedenen möglichen Gitterkopplungen aufmerksam gemacht.

Die Wiensche Arbeit ist inzwischen in den Annalen der Physik erschienen[1]).

Auf Anregung von Herrn Prof. Wien untersuchten wir nun noch die verschiedenen Gitterkopplungen und ihren Einfluß auf das Ziehen und Springen bei Hochfrequenz, ebenso natürlich die Frage der Oberwellen.

Es wird sich der Kürze halber empfehlen, die Resultate der Arbeit von H. Vogel und M. Wien, soweit sie hier in Betracht kommen, kurz darzustellen.

Bei der Zungenpfeife, die eine dem Zwischenkreis-Röhrensender vollkommen analoges gekoppeltes System darstellt, und bei der man, genau wie beim Röhrensender, die Erscheinungen des Ziehens und des Umspringens der Frequenz hat, war es aufgefallen, daß die sogenannte Ziehschleife, die nach der Theorie symmetrisch auf beiden Seiten der Resonanzstelle verlaufen sollte, stark einseitig war, wie das der Arbeit entnommene Bild 1 z. B. zeigt.

In der Arbeit wird nun ausgeführt, wie dieses Bevorzugen der tieferen bzw. höheren Koppelschwingung damit zusammenhängt, daß elektrisch gesprochen (auf das an sich sehr interessante akustische Problem kann nicht eingegangen werden und muß auf die Originalarbeiten verwiesen werden[2])) der Gitterkreis nicht allein mit dem Primärkreis, sondern mehr oder weniger auch mit dem Sekundärkreis gekoppelt ist. Das Verdienst der Arbeit von Vogel und Wien ist es, aus dieser Tatsache eine scharfe Trennung der möglichen Kopplungsarten abgeleitet und dadurch das Verständnis einer Reihe komplizierter Erscheinungen ermöglicht zu haben.

Bei den bisher praktisch ausgeführten Senderkonstruktionen war zwar im Schaltungsschema die Rückkopplungsspule nur mit dem Primärkreis gekoppelt, in Wirklichkeit aber auch mit dem Sekundärkreis. Zur Darstellung reiner Verhältnisse ist es erforderlich, die möglichen Rückkopplungsarten scharf zu trennen.

[1]) H. Vogel und M. Wien, Zungenpfeife und Röhrensender, Ann. d. Physik, 1920. Heft 15.
[2]) Vgl. auch H. Vogel, Die Zungenpfeife als gekoppeltes System, Ann. d. Physik, 1920.

Wir haben demnach zu unterscheiden:
a) Reine Primär-Rückkopplung (Bild 2),
b) Reine Sekundär-Rückkopplung (Bild 3).

Wir betrachten zunächst die reine Primär-Rückkopplung. Wie bereits im ersten Teil dieser Arbeit hervorgehoben, muß die Spannung des Primärkreises gegen die des Gitterkreises um 180⁰ verschoben sein, mit anderen Worten die Gitterspule muß eine ganz bestimmte Stellung zu der des Primärkreises haben, wenn Schwingungen entstehen sollen. Sind Primär- und Sekundärkreis gleichphasig, so haben wir die tiefere, sind sie um 180⁰ verschoben, die höhere Koppelschwingung.

In Bild 4 (A) sind diese Verhältnisse für die reine Primär-Rückkopplung dargestellt. Die Pfeile bedeuten die Schwingungen in den einzelnen Kreisen, gleiche Richtung Gleichphasigkeit, entgegengesetzte Verschiebung um 180⁰ und die Klammern

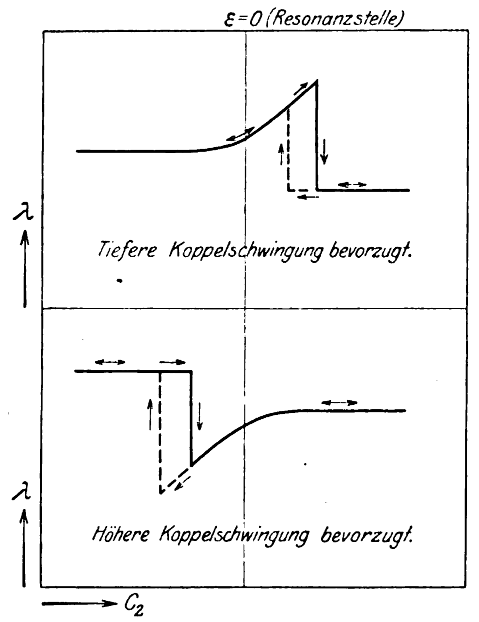


Bild 1. Unsymmetrische Ziehschleifen bei der Zungenpfeife.

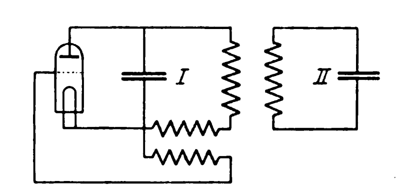


Bild 2. Reine Primär-Rückkopplung.

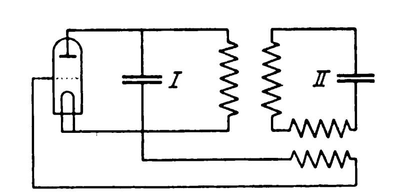


Bild 3. Reine Sekundär-Rückkopplung.

deuten an, welche Kopplungen vorliegen. Es bestehen 2 Möglichkeiten (I und II), bei denen beide Male Gitter und Primärkreis um 180⁰ verschoben sind; im Falle I haben wir die tiefere, im Falle II die höhere Koppelschwingung. Bei dieser Rückkopplung ist daher das Umspringen der Frequenz aus der tieferen in die höhere oder umgekehrt in der Nähe des Resonanzpunktes je nach der Richtung der Variation vorhanden. Die Sprungstellen müßten, wie auch in der Arbeit von Vogel und Wien angenommen ist, gleichweit von der Resonanzstelle entfernt sein, da kein Grund zur Unsymmetrie vorhanden ist.

Koppelt man nun das Gitter nur mit dem Sekundärkreis (Bild 3), so treten im Gegensatz zu der Primär-Rückkopplung in beiden möglichen Stellungen der Gitterspule (man kann statt die Spule um 180⁰ zu drehen auch ihre Zuleitungen vertauschen) Schwingungen auf, und zwar jedesmal nur die eine der beiden möglichen Koppelschwingungen; ein Springen der Frequenz tritt nicht mehr ein.

Wir übersehen die Verhältnisse wieder am besten mit Hilfe von Bild 4 B. Im folgenden soll der Kürze halber der Gitterkreis immer mit G, der Primärkreis mit I und der Sekundärkreis mit II bezeichnet werden. Steht die Gitterspule so, daß die in ihr (von II) induzierte Spannung gegen II um 180⁰ verschoben ist (Fall I),

so können dauernde Schwingungen nur entstehen, wenn von den beiden Koppelschwingungen diejenige sich ausbildet, die mit II in Phase ist, weil als Grundbedingung erfüllt sein muß, daß I und G um 180° verschoben sind. Da I und II gleichphasig sind, haben wir die langsamere Koppelschwingung. Diese kann nur allein auftreten, da eine andere Kombination bei dieser Stellung zwischen G und II nicht möglich ist.

Dreht man nun die Gitterspule um 180° oder vertauscht ihre Zuleitungen, so daß jetzt G und II gleichphasig sind, so muß II gegen I um 180° verschoben sein (Bild 4 B II), wenn Schwingungen entstehen sollen; es kann nur die schnellere Koppelschwingung auftreten. Variiert man bei der Sekundär-Rückkopplung den Sekundärkreis, so verläuft je nach der Stellung der Rückkoppelungsspule die entstehende Schwingung auf dem einen oder dem anderen Ast der theoretischen Frequenzkurve bei fester Kopplung zwischen I und II (Bild 5)[1]. Ein Springen der Frequenz tritt nicht mehr ein, daher die Bedeutung dieser Rückkopplung für die Praxis. Sind beide Gitterkopplungen gleichzeitig vorhanden, so wird die primäre Rückkopplung durch die sekundäre je nach der Stellung von II gegen G und die dadurch bedingte Phase vermehrt oder vermindert. Während bei der reinen Primär-Rückkopplung beide Koppelschwingungen um die Resonanzstelle herum gleichwertig sind, ist jetzt die eine oder die andere derselben bevorzugt; die Ziehschleife liegt jetzt unsymmetrisch zu der Resonanzstelle (Bild 1), und zwar je nach der gegenseitigen Stellung von G und II nach der einen oder anderen Seite verschoben. Je stärker die sekundäre Rückkopplung ist, desto mehr ist auch die Ziehschleife verschoben. Diese in der Arbeit von Vogel und Wien für Niederfrequenz untersuchte Erscheinung ist bei Hochfrequenz ganz analog vorhanden.

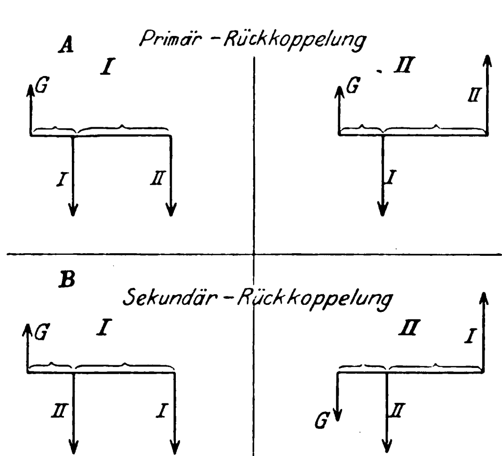


Bild 4. Phasenverhältnisse der bei verschiedener Rückkopplung möglichen Schwingungszustände.

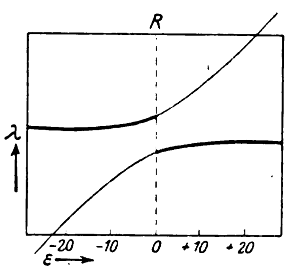


Bild 5. Die theoretischen Frequenzkurven bei fester Kopplung.

Im folgenden seien noch kurz einige weitere Resultate der Arbeit von Vogel und Wien angeführt.

Je loser die Kopplung I—II ist, desto geringer wird der Frequenzsprung und desto schwächer das Ziehen, bis schließlich bei ganz loser Kopplung nur ein leichtes Ausbiegen der Frequenzkurve übrig bleibt. Dämpfung des Sekundärkreises hat einen ganz ähnlichen Einfluß. Wird sie stark gemacht, so setzt infolge der Energieentziehung um die Resonanzstelle herum die Schwingung aus; macht man die Dämpfung noch größer, so erhält man wieder den sprunglosen Verlauf der Frequenzkurve wie bei ganz loser Kopplung, bis schließlich bei zu hohem Widerstand die Rückwirkung von II ganz verschwindet.

Eine Vermehrung der Rückkopplung verstärkt das Ziehen bei annähernd gleichem Frequenzsprung. Eine Verminderung derselben führt ein Aussetzen der

[1]) Vgl. dazu auch Bild 17.

Schwingungen um den Resonanzpunkt herum, und zwar in ziemlich weitem Umfang herbei. Ähnlich wie eine Vermehrung der Rückkopplung wirken eine Erhöhung des Anodenstromes und die Verstärkung des Heizstromes.

Diese Verhältnisse konnten wir bei unsern Versuchen mit Hochfrequenz bestätigen.

Neben den beiden in der Arbeit diskutierten Gittererregungen aus dem Primär- bzw. Sekundärkreis und den Fällen, in denen beide gemeinsam wirken, gibt es noch eine dritte mögliche Art, die sogenannte Huthsche Gittererregung[1]) (Bild 6), bei der ein abgestimmter, weder mit I noch II gekoppelter Gitterkreis seine Energie aus dem Innern der Röhre selbst entnimmt und bei der zwischen G und I eine andere Phasenverschiebung herrscht als bei den anderen Gitterkopplungen, wie wir im ersten Teil dieser Arbeit nachgewiesen haben.

Die Wirkungsweise dieser Erregung, bei der zunächst in der von Huth angegebenen Ausführungsform kein Zwischenkreis verwendet wird, beruht auf folgendem. Die zum Steuern der Röhre nötige Gitterspannung wird nicht, wie bei den gewöhnlichen Rückkopplungsschaltungen durch direktes Verkoppeln mit dem Schwingungskreis (I Bild 6) erhalten, sondern es wird die Resonanzspannung eines mit dem Schwingungskreis extrem lose gekoppelten zweiten Schwingungskreises verwendet. Die (kapazitive) Kopplung geschieht durch die Teilkapazität Gitter-Kathode. Der Verlauf der Phasenverschiebung (z. B. zwischen den Spannungen an den beiden

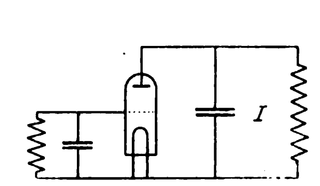


Bild 6. Huthsche Gittererregung.

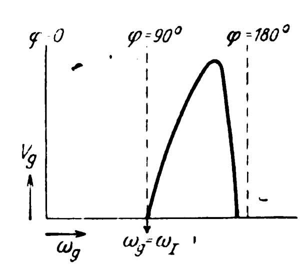


Bild 7. Annähernder Verlauf der Steuerspannung beim Huthschen Sender.

Kapazitäten) zweier extrem lose gekoppelten Kreise ist nun bei Variation der Eigenschwingungen eines der Kreise der, daß die Phase sich von 0° über 90° nach 180° dreht. Die Spannung am Kondensator des Gitterkreises hätte dann, vorausgesetzt, daß die Amplitude des anderen Kreises konstant bliebe, den bekannten Verlauf der Resonanzkurve bei loser Kopplung mit scharfen Maximum und 90° Phasenverschiebung bei Gleichheit der Eigenschwingungen ($\omega_g = \omega_I$). Zur Unterhaltung der Schwingungen des Senders kann aber nur eine Schwingung dienen, die um 180° gegen die des Schwingungskreises verschoben ist. Daraus ist sofort zu ersehen, daß das Gebiet vor der eigentlichen Resonanzstelle, wo $\omega_g < \omega_I$ ist, keine Schwingungen liefern kann, da es hier keine Komponente gibt, die eine Phasenverschiebung von 180° hat. Ist $\omega_g > \omega_I$, so wird mit wachsendem ω_g die in die Richtung von 180° fallende Komponente der Gitterspannung immer größer, die Gitterspannung selbst aber immer kleiner, um schließlich zu 0° zu werden, wenn die Phasenverschiebung gerade 180° ist. Die am Gitter zur Wirkung kommende Steuerspannung wird also etwa den in Bild 7 bezeichneten Verlauf haben. Dem entspricht vollständig die photographische Aufnahme dieser Phasenverschiebung in Bild 37 des vorigen Teils unserer Arbeit. Auch bei dem kleinen Kreis, bei dem die Schwingung eben eingesetzt hat, ist die Phase von 90° bereits überschritten. Daß in Wirklichkeit die Amplitude im Schwingungskreis nicht konstant, sondern selbst wieder eine

[1]) DRP. N. 310152 und Jahrbuch d. d. T., 1920, 1, S. 79.

Funktion der Gitterspannung ist, ändert qualitativ nichts; nur wird das Maximum etwas nach links verschoben.

Bei der Huthschen Schaltung ist also stets eine Komponente in der Gitterspannung vorhanden, die um 90° gegen die Spannung am Schwingungskreis verschoben ist. Diese wird beim Betrieb um so größer sein, je weiter das Maximum nach links liegt (denn es wird ja stets auf das Maximum eingestellt). Diese Komponente bedingt nun ein Totlaufen der Energie in den Anodenblechen und damit ein Erwärmen dieser Bleche, was unnötigen Energieverbrauch und frühes Zerstören der Röhre bedingt. Durch geeignete Wahl der Widerstände, Selbstinduktionen usw. läßt sich das Maximum weit nach rechts schieben und damit der oben erwähnte Übelstand auf ein geringes Maß herabdrücken.

Die experimentelle Untersuchung der Verhältnisse.

Die Möglichkeit, die verschiedenen Fälle der Gittererregung einzeln und unbeeinflußt von den übrigen experimentell darzustellen, wäre sehr erwünscht. Bei der Huthschen Gittererregung geht es ohne weiteres. Unmöglich wird es aber bei den anderen Arten insofern sein, als die Huthsche Erregung des Gitters immer vorhanden ist (Gitterrückkopplungsspule und Kapazität Gitter-Kathode stellt ja auch einen Schwingungskreis mit bestimmter Eigenfrequenz dar) und, da sie innerhalb

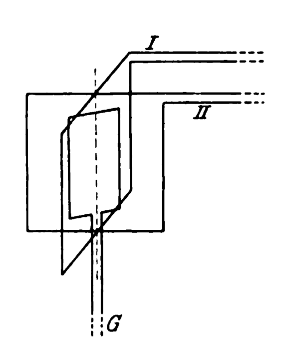


Bild 8. Anordnung der Spule.

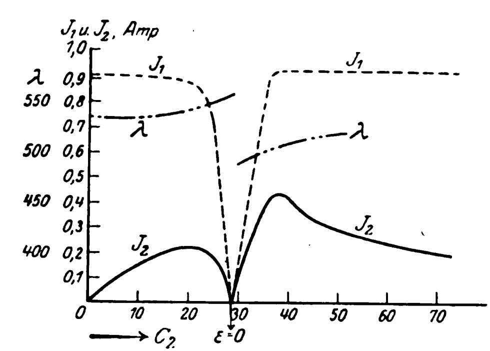


Bild 9. Verhalten des Huthschen Senders mit Sekundärkreis bei loser Kopplung I—II.

der Röhre liegt, nicht ausgeschaltet werden kann. Wohl sind zwar nach den von Wien angegebenen Schaltungen (Bild 2 und 3) Primär- und Sekundär-Rückkopplung voneinander zu trennen, aber bei beiden wird die Huthsche Erregung immer eine gewisse mehr oder weniger hervortretende Rolle spielen.

Zur Untersuchung der Verhältnisse änderten wir unsere im vorigen Teil der Arbeit beschriebene Versuchsanordnung insofern ab, als wir zu Primär- und Sekundärkreis je 10 Drahtwindungen hinzufügten, die auf zwei senkrecht zueinander stehende Holzrähmchen von 10 cm Seitenlänge so aufgewickelt wurden, daß eine Kopplung zwischen ihnen nicht vorhanden war (vgl. Bild 8). Innerhalb dieses Rahmens wurde ein dritter mit etwa 90 Windungen dünnen Litzendrahtes, die Gitterspule, drehbar angeordnet, so daß man sie entweder mit dem einen oder anderen Kreis in beiden Stellungsmöglichkeiten oder auch mit beiden gleichzeitig koppeln konnte und so sehr rasch ein Übergang von der einen zur anderen Kopplungsart und ein Vergleichen möglich war. Diese Anordnung diente zunächst zur Orientierung über die z. T. recht verwickelten Erscheinungen. Zur Kontrolle, welche von beiden Koppelschwingungen vorhanden war, blieb stets die Braunsche Röhre angeschlossen. Bei den weiter unten angeführten Versuchsresultaten mit reiner Primär- oder Sekundär-Rückkopplung wurde immer die eine Spule (I oder II Bild 8) ganz aus dem Kreise I bzw. II abgeschaltet.

Die Huthsche Gittererregung beim Zwischenkreis-Sender.

Diese Erregung wurde teilweise mit der aus dem Zusatzrahmen entfernten Gitterspule, teilweise auch mit der bei der ursprünglichen Versuchsanordnung verwendeten Gitterspule untersucht, indem sie weit genug von I und II entfernt und ihr parallel ein Drehkondensator geschaltet wurde.

Hat man keinen Sekundärkreis, so erhält man nur Schwingungen, wenn Gitter und Primärkreis scharf aufeinander abgestimmt sind. Die Stromkurve ist recht spitz und die Erregung ziemlich stark. Das Bild wird ganz anders, wenn man jetzt bei unveränderter Abstimmung (G—I) einen Sekundärkreis hinzufügt. Schon bei extrem loser Kopplung (I—II) sinkt die Amplitude um den Resonanzpunkt herum, geht mit steigender Kopplung rasch auf Null herunter, bis schließlich um die Resonanzstelle die Schwingungen in breitem Bereich ganz aussetzen. Bild 9 und 10 zeigen diese Verhältnisse. Benutzt wurde die kleine Gitterspule aus dem Zusatzrahmen ($L = 6 \cdot 10^5$ C·G·S, Eigenschwingung ca. 510 m) ohne Kondensator. Bei der ersten Kurve war die Kopplung I—II $= 0{,}15$, bei der zweiten $k = 0{,}43$.

Bei Verwendung der Gitterspule des Schottschen Senders mußte wegen ihrer weit geringeren Selbstinduktion ein Kondensator angeschlossen werden, um

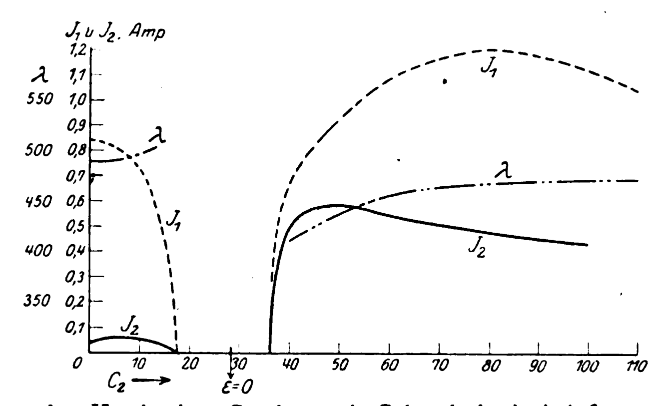


Bild 10. Verhalten des Huthschen Senders mit Sekundärkreis bei festerer Kopplung I—II.

die erforderliche Abstimmung zu erreichen. Infolgedessen war auch die erreichbare Gitterspannung geringer als im vorigen Falle. Hier setzten bei einer Kopplung I—II $k = 0{,}13$ die Schwingungen im Bereich von 35—60 Grad des Sekundärkondensators aus. Bei einer Kopplung $k = 0{,}23$ waren nur Schwingungen im Bereich von $C_2 = 0^0 - 15^0$ zu erhalten. Vor der Resonanzstelle oder dem Aussetzen der Schwingungen war die tiefere nachher die höhere Koppelschwingung vorhanden, wie auch aus den in den Kurven eingezeichneten λ-Werten hervorgeht. Daß die Schwingungen in der Nähe des Resonanzpunktes aussetzen, liegt nicht daran, daß die Gittererregung nicht stark genug ist, um die erforderliche Energie nachzuliefern, sondern daß die Gitterspule jetzt nicht mehr abgestimmt ist, da infolge der Verkopplung von I und II, auch wenn beide genau aufeinander abgestimmt sind, nicht mehr die Eigenwelle, sondern die beiden Koppelwellen in Erscheinung treten. Über die Abstimmung des Gitterkreises auf diese wird weiter unten die Rede sein.

Die Resonanzstelle wurde bei den eben beschriebenen Versuchsreihen und bei den weiteren Versuchen mit Hilfe der Braunschen Röhre, die zur Kontrolle der Verhältnisse immer angeschlossen war, so bestimmt, daß Schwingungen erregt, II aber so lose mit I gekoppelt wurde, daß 90^0 Phasenverschiebung eintrat. Diese Art der Festlegung des Resonanzpunktes scheint uns die genaueste zu sein. Einzelvergleichung der Kreise (ohne Röhre!) mit Hilfe des Summers und Wellenmessers

ergaben stets abweichende Werte. Der Grund ist wohl der, daß durch die Sende-Röhre, besonders wenn sie brennt, die Verhältnisse in vorher nicht bestimmbarer Weise geändert werden.

Auch die Huthsche Gittererregung ist bei Verwendung eines Zwischenkreises von den im vorigen Teil unserer Arbeit beschriebenen Oberwellen nicht frei, und zwar treten dieselben beim Vorhandensein der tieferen Koppelwelle auf, wenn die Kopplung so stark ist, daß die Schwingungszahl der möglichen höheren Koppelwelle ein Vielfaches der der tieferen ist.

Die Primärkopplung.

Bei diesen Versuchen war die Gitterspule innerhalb des Zusatzrahmens so angeordnet, daß sie parallel zu der Zusatzspule des Primärkreises stand. Die Zusatzspule des Sekundärkreises war bei den im folgenden beschriebenen Versuchsresultaten abgeschaltet.

In beiden möglichen Stellungen der Gitterspule wurden Schwingungen erhalten, während nur in einer Stellung solche zu erwarten waren, und zwar traten in der einen Stellung das ganze mögliche Wellenspektrum, in der andern nur Schwingungen an einzelnen Stellen auf. Der Grund ist der, daß neben der reinen Primärkoppelung noch die Huthsche Gittererregung mitspielt, mit anderen Worten, daß eine reine Primär-Rückkopplung überhaupt nicht möglich ist.

Wir haben demnach bei der Primär-Rückkopplung zwei Fälle zu unterscheiden:

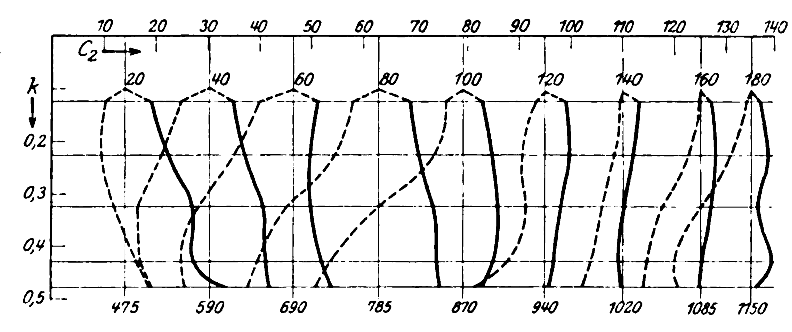


Bild 11. Die Sprungstellen bei Primär-Rückkopplung.

a) Die Gitterspule steht so, daß bei reiner Primär-Gitterkopplung Schwingungen entstehen (Phase G — I = 180°). Diese Schwingungen werden modifiziert durch die Erregung, die der Gitterkreis gleichzeitig aus der Röhre erhält, da sie mit der ersteren nicht in Phase ist.

b) Die Gitterspule steht so, daß bei reiner Kopplung G — I etwa entstehende Schwingungen unterdrückt werden (Gleichphasigkeit G — I). Es werden aber trotzdem dann Schwingungen entstehen, wenn die Eigenfrequenz des Kreises I (bzw. bei verkoppeltem Primär-Sekundärsystem eine der beiden Koppelwellen) gleich der Eigenfrequenz des Kreises Gitterspule-Kapazität der Röhre (Gitter-Kathode) ist und die infolgedessen am Gitter auftretende Resonanzspannung (genauer ihre um 180° gegenüber dem Kreis I verschobene Komponente) größer ist als die von I in der Gitterspule induzierte Spannung, die ja bei dieser Schaltung ein Auftreten von Schwingungen zu unterdrücken sucht.

Eine Möglichkeit, sich von der Huthschen Erregung einigermaßen frei zu machen, ist die, die Eigenschwingung des Gitterkreises sehr weit von der des Primärkreises zu entfernen, am besten so, daß die Eigenfrequenz niedriger als die des Schwingungskreises wird, da im anderen Fall der Gitterkreis durch Oberwellen des Schwingungskreises erregt werden kann.



Der experimentelle Befund im Falle a ist folgender:

Die Sprungstellen liegen nicht, wie erwartet, gleichmäßig zu beiden Seiten der Resonanzstelle, sondern ziemlich ungleichmäßig verteilt. Bild 11 enthält eine Zusammenstellung der Lage der Sprungstellen bei verschiedener Koppelung I—II und verschiedener Eigenschwingung von I. Zunächst wurde der Kondensator C_1 des Primärkreises z. B. auf 20^0 eingestellt, dann für eine Reihe verschiedener Kopplungen I—II die Sprungstellen vor und rückwärts bei Variation von C_2 festgestellt. Dann wurde C_1 auf 40^0 eingestellt und wieder die Sprungstellen für die verschiedenen Kopplungen I—II aufgesucht. Als Ordinate ist die Kopplung I—II, als Abszisse die Kondensatorgrade von II aufgetragen. Die vertikalen Striche mit den Bezeichnungen 20^0 (475), 40^0 (590) usf. geben die jedesmalige Resonanzstelle für die einzelnen Reihen. Die Resonanzstelle wurde in der oben beschriebenen Weise festgestellt. Die Eigenwelle der Gitterspule betrug ca. 520 m, zwischen der ersten und der zweiten Reihe ($C_1 = 20^0$ und $C_1 = 40^0$) liegt die Resonanzstelle mit der Gitterspule. Vor derselben liegt eine Bevorzugung der tieferen, nach derselben eine der höheren Koppelwelle vor. Ferner tritt hier deutlich die Vergrößerung des Ziehens bei zunehmender Koppelung I—II hervor.

Die Bilder 12—16 geben einige Beispiele des ganzen Verlaufs der Wellenlängen und Ströme im Falle a. Bei den Bildern 12 und 15 befinden wir uns in dem Gebiet, in dem Eigenschwingung des Kreises I und des Gitterkreises einander nahe liegen. Die Änderung der Stromstärken beim Springen ist hier am größten.

Allgemein nimmt J_1 beim Vorwärtsgehen bis zur Sprungstelle b ab, J_2 steigt, nach dem Sprung steigt J_1 und strebt asymptotisch dem Werte für $C_2 = \infty$ zu, J_2 erreicht ein Maximum, um dann wieder zu fallen. Beim Rückwärtsgehen erhält man bis b wieder die alten Werte, zwischen b und a (der zweiten Sprungstelle) fallen J_1 und J_2 stark, bisweilen setzen die Schwingungen aus. Bei a springen die Stromstärken genau in den Wert, den sie beim Vorwärtsgehen hatten. Die λ-Kurven entsprechen, bis auf einige kleinere Abweichungen, ganz gut den von der Theorie verlangten.

Auch von den oben beschriebenen Oberwellen ist die Primär-Gitterkopplung nicht frei, allerdings treten die höheren Harmonischen nicht auf, da die Sprungstellen nicht annähernd so weit unsymmetrisch liegen wie bei der gemischten Primär-Sekundär-Rückkopplung mit vorherrschender Sekundär-Rückkopplung. Die Oberwellen traten hier vor dem Resonanzpunkt und im Sekundärkreis auf. In den Bildern 12—16 sind die Stellen, wo die Oberwellen auftraten durch Kreuzchen (×) bezeichnet. Der zugehörige Ast der Frequenzkurve ist punktiert eingezeichnet.

Wir kommen nun zu den Erscheinungen (Fall b), die auftreten, wenn bei der Primärkopplung die Gitterspule um 180^0 gedreht wird. Die experimentellen Ergebnisse sind kurz folgende:

Es ist zu erwarten, daß Schwingungen auftreten, wenn die Eigenschwingungen der Kreise (G und I) einander nahe liegen, da dann die Huthsche Erregung stark genug sein kann, um die andere zu überwiegen. War die Eigenschwingung des Primärkreises langsam gegenüber dem Gitterkreis, so waren bei Variation von C_2 keinerlei Schwingungen zu erhalten. Ging man mit der Eigenschwingung von I höher ($C_1 = 30^0 = 537$ m), so traten Schwingungen auf, und zwar in einem ganz kleinen Bereich ($0^0 - 14^0 C_2$) mit ganz schwacher Amplitude. Bei $C_1 = 20^0$ ($\lambda = 475$ m) erreichten sie eine Maximalamplitude von J_1 und $J_2 = 0{,}3$ Ampere, von $C_2 = 0^0—28^0$. Bei $C_1 = 10$ waren Schwingungen über die ganze Skala von C_2 mit einer Maximalamplitude von 0,5 Amp. vorhanden. In allen diesen Fällen hatten wir es nach Maßgabe der Braunschen Röhre mit der schnelleren Koppelschwingung zu tun. Die gemessenen Wellen lagen zwischen 300 und 350 m.

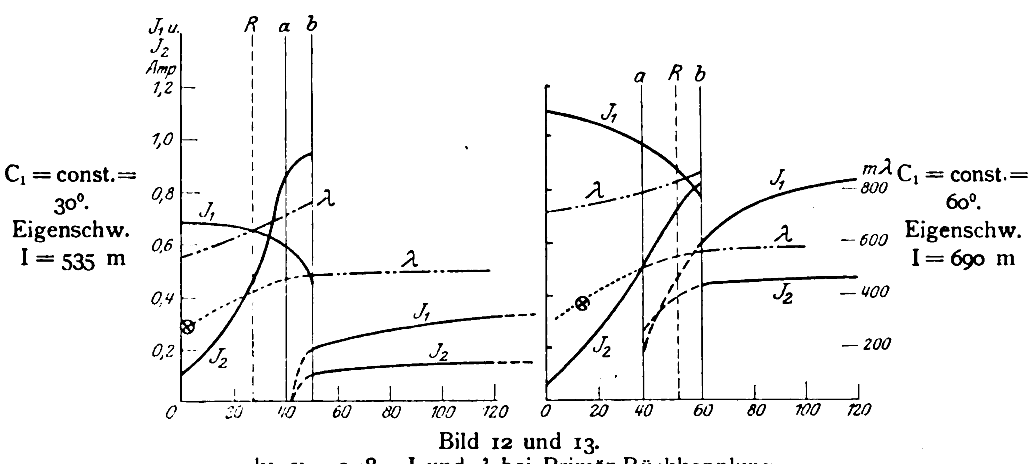


Bild 12 und 13.
$k_{I-II} = 0{,}48$. J und λ bei Primär-Rückkopplung.

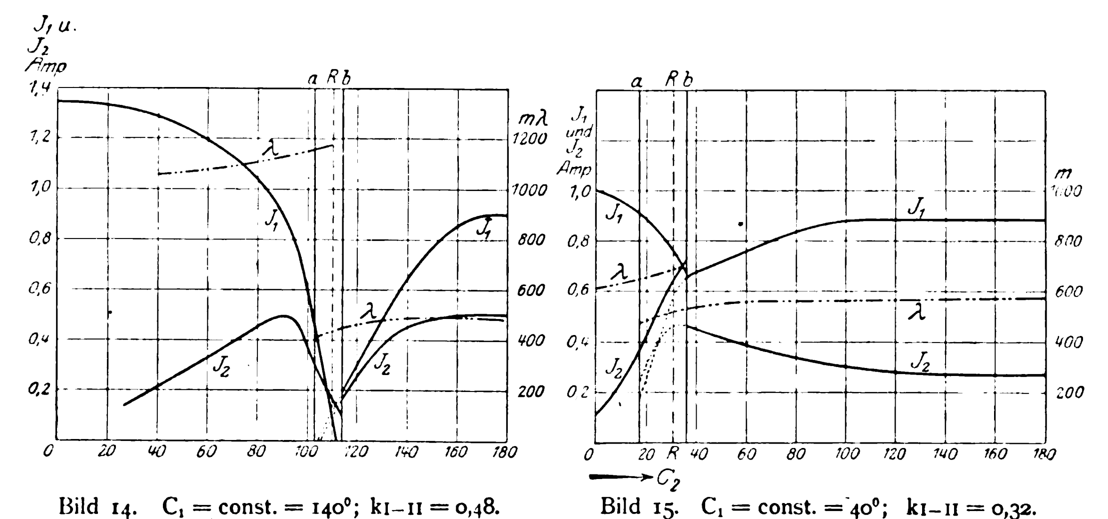


Bild 14. C_1 = const. = 140°; $k_{I-II} = 0{,}48$. Bild 15. C_1 = const. = 40°; $k_{I-II} = 0{,}32$.

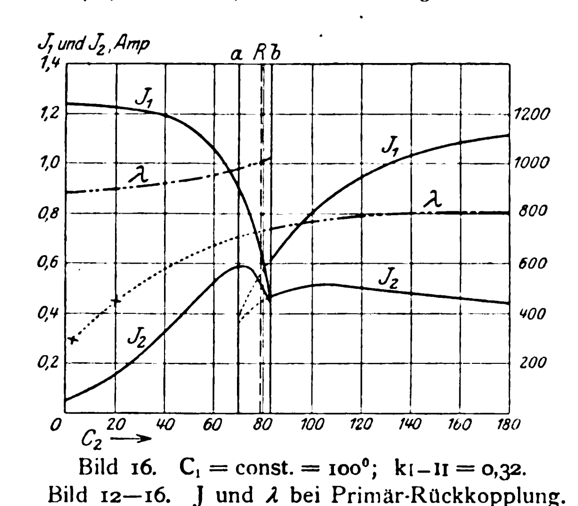


Bild 16. C_1 = const. = 100°; $k_{I-II} = 0{,}32$.
Bild 12—16. J und λ bei Primär-Rückkopplung.

Zusammenfassend muß gesagt werden, daß eine reine Primär-Gitterkopplung nicht realisierbar ist, da immer die innere Gittererregung der Röhre eine Rolle mitspielt.

Die Sekundär-Rückkopplung.

Die experimentelle Untersuchung dieser Rückkopplung zeigte zunächst, daß es zwar möglich ist, die von Vogel und Wien bei Niederfrequenz erhaltenen Resultate auch bei Hochfrequenz zu erhalten, daß aber auch hier die aus der Röhre herrührende Erregung des Gitterkreises eine störende Rolle spielt.

Wir betrachten zunächst Bild 17, wo die Eigenschwingung des Primärkreises bedeutend tiefer gewählt ist als die des Gitterkreises. Hier treten daher die Erscheinungen der alleinigen Sekundär-Rückkopplung deutlich hervor. Die dick ausgezogenen Kurven sind in der einen Stellung der Gitterspule erhalten und gehören zur tieferen Koppelwelle. Bei Drehung der Gitterspule um 180° tritt die höhere

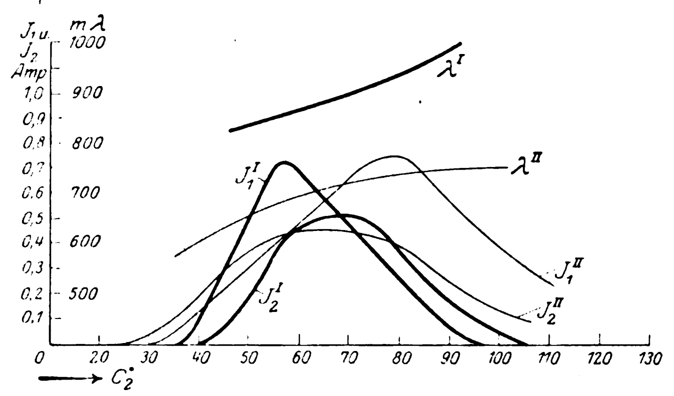


Bild 17. Sekundär-Rückkopplung. I tiefere, II höhere Koppelschwingung. $k_{I-II} = 0{,}2$.

Koppelwelle auf. (Dünn ausgezogene Kurve.) Die Frequenz verläuft in beiden Stellungen der Gitterspule jedesmal nur auf dem einen Ast der theoretischen Koppelkurve. Man hat es daher in der Hand, sich die eine der beiden Koppelschwingungen auszuwählen. Die Bedeutung dieser Schaltung für die Praxis fällt ins Auge, da ein Springen der Frequenz nicht mehr vorhanden ist und die Vorteile der festeren Kopplung (I—II) ausgenutzt werden können.

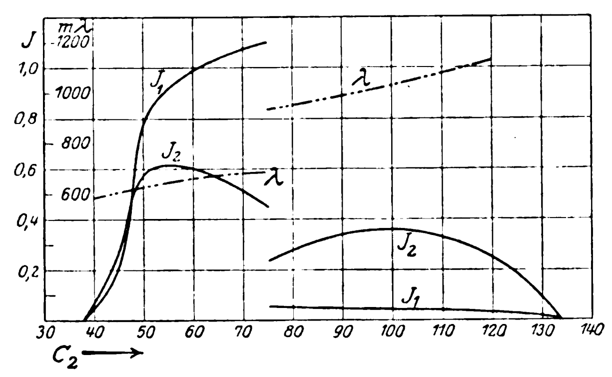


Bild 18. Einfluß der inneren Gittererregung bei der Sekundär-Rückkopplung.

Geht man aber mit der Eigenschwingung der Gitterspule in die Nähe der des Primärkreises, so treten z. T. ganz eigenartige Erscheinungen ein.

Wir betrachten zunächst den Fall I (Bild 4B I) diejenige Stellung, in der die tiefere Koppelschwingung auftreten sollte. War die Eigenschwingung von G kleiner als die Eigenschwingung des Primärkreises ($\lambda_G < \lambda_I$), so trat, wie zu erwarten, die tiefere Koppelschwingung auf. Kam aber die Eigenschwingung des Primärkreises in die Nähe der von G, so trat beim Variieren von C_2 ein Sprung in die höhere

Koppelwelle ein. Bei noch weiterer Vergrößerung von C_1 trat zuerst die höhere, dann nach einem Sprung die tiefere Koppelschwingung auf. Bild 18 zeigt diese Verhältnisse. Ging man noch tiefer mit λ_1, so trat nur noch die tiefere Schwingung auf, wir sind dann nicht mehr im Bereich der unerwünschten Gittererregung und haben den Fall der stark gezeichneten Kurven in Bild 17. Welche Schwingung vorhanden war, wurde jedesmal mit der Braunschen Röhre kontrolliert. Eine Erklärung dieses eigentümlichen Verhaltens ist in folgendem zu sehen. Bei reiner Sekundär-Rückkopplung kann infolge der Phasenverhältnisse nur die eine der beiden Koppelschwingungen entstehen, in dem jetzt betrachteten Fall nur die tiefere. Wenn trotzdem die andere noch auftritt, muß außerdem noch eine andere starke Erregung der Gitterspule vorhanden sein, nämlich die Kopplung des Gitterkreises innerhalb der Röhre. Durch die Verkopplung von I und II sind nun aber immer, selbst wenn I und II in den Eigenschwingungen übereinstimmen, die beiden Koppelwellen vorhanden, die niemals mit den Eigenschwingungen, auch wenn die Kreise gegeneinander verstimmt sind, übereinstimmen. Stimmt die Eigenwelle des Gitterkreises nun mit einer der beiden Koppelwellen überein, so ist die Gittererregung infolge der Abstimmung stark, es wird diese Koppelwelle bevorzugt und kann je nach der Richtung der Sekundär-Gittererregung diese unterstützen oder unterdrücken, wobei allerdings die Phase zwischen beiden Erregungen eine wesentliche Rolle spielt. Daraus erklärt sich das Auftreten sowohl der tieferen wie der höheren Koppelschwingung.

Drehen wir nun die Gitterspule um 180^0 (Fall II), so zeigen sich ganz ähnliche Verhältnisse, obwohl jetzt nur die höhere Koppelschwingung auftreten dürfte. Auch hier läßt sich sowohl die höhere wie die tiefere Koppelwelle durch Einstellen des Gitterkreises auf eine der beiden erreichen. Diese Einstellungen dürften wegen ihrer z. T. sehr günstigen Energieausnutzung für die Praxis in Frage kommen und stellen eine Erweiterung der Sekundär-Rückkopplung dar, bei der die Gittererregung nicht übermäßig stark ist, da immer nur ein Teil der sekundären Selbstinduktion zur Kopplung mit dem Gitter benutzt werden kann (vgl. Bild 3) und der um so kleiner werden muß, je stärker man I und II koppeln will.

Was die Oberwellen betrifft, so sind auch bei der Sekundär-Rückkopplung, so lange man sich gleichzeitig im Gebiet der Huthschen Gittererregung bewegt, Oberwellen vorhanden, erst wenn man aus diesem Gebiet herausgeht oder bei Abstimmung auf eine der beiden Koppelwellen, treten sie nicht mehr auf.

Als merkwürdig ist noch zu erwähnen, daß bei Variation des Gitterkreises kurz vor der Abstimmung auf die höhere Koppelwelle trotz der festen Kopplung I—II an einer Stelle eine Phasenverschiebung von 90^0 zwischen I und II auftritt.

Huthsche Gittererregung beim Zwischenkreis-Sender mit Abstimmung auf eine der beiden Koppelwellen.

Wenn die oben gegebene Erklärung für das nicht erwartete Auftreten der beiden Koppelwellen richtig ist, muß sich bei rein Huthscher Erregung des Zwischenkreis-Senders durch Einstellung des Gitterkreises auf die höhere oder tiefere Koppelwelle, die durch die Einstellung und Verkopplung von I und II bestimmt sind, die gewünschte von beiden herausholen lassen (und die Energieabgabe muß günstiger sein). Dies zeigen die Kurven in Bild 19. Die dick ausgezogenen geben J_1 und J_2 bei der Abstimmung auf die tiefere, die anderen dasselbe bei Abstimmung auf die höhere Koppelwelle. Die Einstellung läßt sich natürlich auch so vornehmen, daß zuerst der Gitterkreis auf die gewünschte Welle und dann Primär- und Sekundärkreis so eingestellt werden, daß die gewünschte von beiden Koppelwellen mit G übereinstimmt, wobei zu beachten ist, daß I und G (ebenso G und II) in ihren Eigenschwingungen nicht übereinstimmen dürfen, da die Koppelwellen mit



den Eigenwellen nicht zusammenfallen. Bei dieser Einstellung hat man außer dem Vorteil, daß Ziehen und Springen und Oberwellen vermieden sind, noch den weiteren, daß die Welle sich durch den Gitterkreis einstellen und dann durch richtige Einstellung von C_1 und C_2 ein scharfes Strommaximum erreichen läßt, wodurch die Einstellung einer bestimmten Welle bedeutend erleichtert ist. Daß sich auf diese Weise sehr günstige Verhältnisse erreichen lassen, zeigt Bild 20, wo die Kopplung I—II fester war und nach dem Ausprobieren der günstigsten Einstellung eine sehr hohe Amplitude von J_2 erreicht wurde.

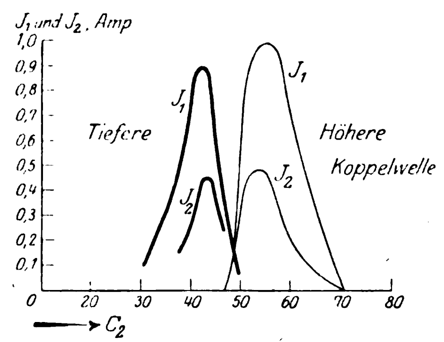


Bild 19. Huthsche Gittererregung mit Abstimmung auf eine der beiden Koppelwellen.

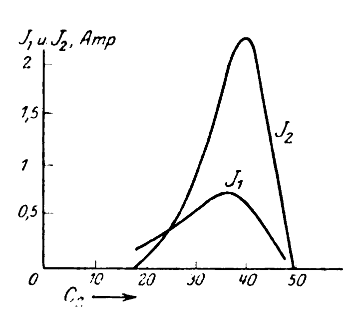


Bild 20. Huthsche Gittererregung mit Abstimmung auf die tiefere Koppelwelle.

Schwebungen.

Nicht unerwähnt darf eine Erscheinung bleiben, die besonders bei der gemischten Primär-Sekundär-Rückkopplung des öfteren auftrat, und auf die wir durch die Braunsche Röhre aufmerksam wurden. Beim Aufnehmen der Kurve zeigte sich an gewissen Stellen derselben auf der Röhre an Stelle des geneigten Striches ein vollständig ausgefülltes Quadrat, d. h es mußte innerhalb der Dauer eines Lichteindruckes der Lichtfleck einmal oder sogar mehrmals die ganze Fläche bestrichen oder die Phase mußte in dieser Zeit sämtliche möglichen Werte durchlaufen haben. Es stellte sich bald heraus, daß wir es hier mit Schwebungen zu tun hatten, die z. T. so langsam waren, daß die eingeschalteten Strommesser die Schwankungen anzeigten. Besonders gern traten diese Schwebungen kurz vor und nach dem Springen der Frequenz oder auch nur vor oder nach demselben ein. Auch innerhalb der bei den Oberwellen auftretenden Figuren zeigten sich manchmal solche Schwebungen. Das in der Arbeit von Vogel und Wien beschriebene gleichzeitige Auftreten zweier Töne in der Nähe der Resonanzstelle scheint hierher zu gehören. Die Ursache liegt vermutlich darin, daß durch die gleichzeitigen verschiedenen Rückkopplungen eine Gleichheit der Dämpfungen der beiden Koppelschwingungen eintritt und dadurch die Schwebungen entstehen. Eine exakte Deutung läßt sich aber schwer geben, wir überlassen es daher weiteren Untersuchungen über die Bedingungen des Auftretens genaueren Aufschluß zu geben. Praktisch von Wichtigkeit ist, daß außer den unerwünschten starken Oberwellen auch noch Schwebungen auftreten können. Bei den Schaltungen, die frei von Oberwellen sind, beobachteten wir keine Schwebungen.

Zusammenfassung.

Beim Zwischenkreis-Röhrensender sind theoretisch drei verschiedene Gittererregungen und deren Kombinationen möglich:

1. die Huthsche Gittererregung,
2. reine Primär-Rückkopplung,
3. reine Sekundär-Rückkopplung.

Bei der bisher allgemein gebräuchlichen Rückkopplung haben wir eine Mischung aller drei Gittererregungen mit allen daraus entstehenden Störungen (Ziehen, Springen, Oberwellen, Schwebungen).

Von den drei möglichen Gittererregungen läßt sich allein die Huthsche rein darstellen. Beim Zwischenkreis-Sender mit Huthscher Erregung muß der Gitterkreis mit einer der beiden Koppelwellen übereinstimmen.

Die beiden anderen Erregungen sind zwar unter sich, nicht aber von der Huthschen Erregung zu trennen.

Wenn man von den Modifikationen durch die Huthsche Erregung absieht, ist bei reiner Primär-Rückkopplung nur das Springen der Frequenz vorhanden, bei reiner Sekundär-Rückkopplung ist das Springen der Frequenz vermieden und nur eine der beiden Koppelschwingungen vorhanden. Durch die Einwirkung der Huthschen Erregung sind Störungen vorhanden, die bei Übereinstimmung des Gitterkreises mit einer der beiden Koppelwellen verschwinden (Kombination der Sekundär-Rückkopplung mit Huthscher Abstimmung des Gitterkreises).

Zum Schluß sei uns noch gestattet Herrn Geheimrat Wien und Herrn Prof. Rogowski für ihr förderndes Interesse und die liebenswürdige Unterstützung durch Überlassung der Mittel zu dieser Arbeit unseren besten Dank auszusprechen.

Über Ausgleichsvorgänge beim Abschalten von Induktivitäten (insbesondere vermittelst Ölschalter).

Von

Paul Hammerschmidt, Achern.

Beim Abschalten größerer Asynchronmotoren mit offenem Läuferkreis und leerlaufender Transformatoren treten oft Überspannungen von beträchtlicher Höhe auf, die die Wicklungen gefährden. Da sich in technischen Betrieben die Durchschläge der Wicklungen in der Regel erst beim Wiedereinschalten bemerkbar machen, war man versucht, die Schuld dem Einschaltvorgange zuzuschreiben. Solange dieser funkenfrei vor sich geht, also bei entsprechend niederen Spannungen ist diese Anschauung nicht richtig. Nähere Untersuchungen zeigen vielmehr, daß die Zerstörung der Isolation bereits beim Ausschalten eintritt. Ist die Betriebsspannung jedoch so hoch, daß das Einschalten über Funkenbildung vor sich geht, so findet auch hier eine Gefährdung statt, allerdings ist die Dauer derselben infolge des kürzeren Ausgleichsvorganges entsprechend geringer. Eingehende Arbeiten über diese Fragen sind in der Literatur wenig vorhanden. Rüdenberg stellt in der ETZ. 1915, S. 159 ff. rechnerische und experimentelle Untersuchungen über „Überspannungen beim Abschalten von Asynchronmotoren" an und ermittelt die Abhängigkeit der Unterbrechungsspannung vom Läuferwiderstand. Leider vernachlässigt er aber den Einfluß der Parallelkapazitäten der Wicklung und Zuleitung und die durch sie bedingten hochfrequenten Ausgleichsvorgänge.

Eine zweite sehr beachtenswerte Arbeit ist die Abhandlung Rogowskis im Archiv 1916 S. 345 ff. über „Kondensatoren als Schutz gegen Ausschaltüberspannungen bei Gleichstrommaschinen hoher Spannung und bei Drosselspulen". Rogowski berechnet darin die Größe der Überspannung in Abhängigkeit von dem Verhältnis zwischen Ausschaltzeit und Schwingungszeit von Spule und Parallelkapazität. Außerdem erwähnt er zum ersten Male die Gefährlichkeit zu klein bemessener Schutzkonden-



satoren. Seine rein mathematischen Betrachtungen vermögen jedoch die durch die Ausschaltfunken bedingten Vorgänge nicht wiederzugeben.

Die phyikalische Erforschung der letzteren soll das Ziel der folgenden Arbeit sein die auf Veranlassung von Prof. Dr. W. Petersen im Hochspannungslaboratorium der technischen Hochschule zu Darmstadt ausgeführt wurde. Das Hauptgewicht der Versuche wird dabei besonders auf den hochfrequenten Ausgleichsvorgang bei kleinen und kleinsten Parallelkapazitäten und auf die Verwendung von Ölschaltern gelegt.

A. Orientierende Versuche mit Gleichstrom.

Um einen Einblick in die verschiedenen Arten des Ausgleichsvorganges zu erhalten, wurden zunächst einige Versuche an einer Drosselspule mit offenem Eisenkern angeführt. Als Schalter diente ein durch einen Bajonettverschluß gehaltener Kupferkontakt, der zunächst in Quecksilber tauchte, das später durch einen

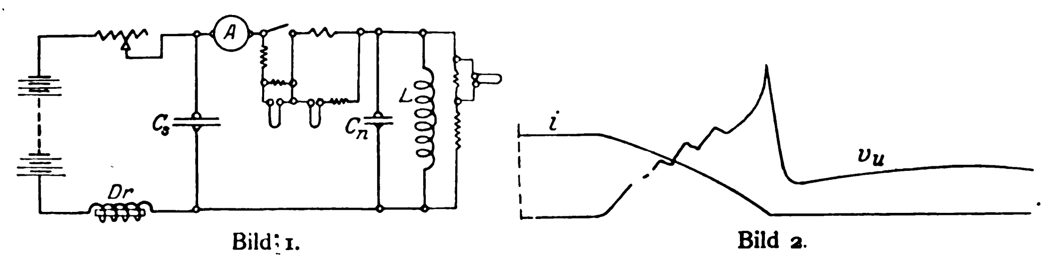


Bild 1. Bild 2.

Gegenkontakt aus Kupfer ersetzt wurde. Durch Verstellung bzw. Austausch der Spannfelder konnte die Schaltgeschwindigkeit geändert werden. Das Auslösen des Schalters erfolgte elektromagnetisch. Strom- und Spannungskurven wurden oszillographisch aufgenommen, die dabei benutzte Schaltung ist in Bild 1 wieder gegeben. Die Daten der Versuchsspule waren:

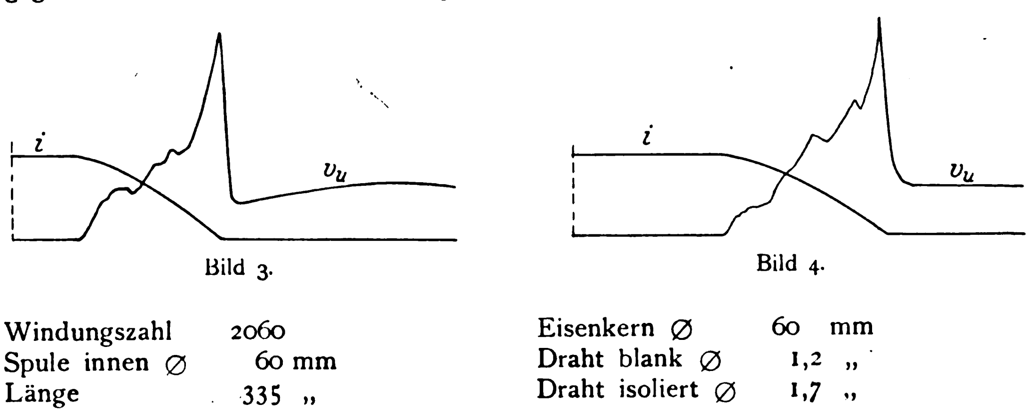


Bild 3. Bild 4.

Windungszahl	2060	Eisenkern ∅	60 mm
Spule innen ∅	60 mm	Draht blank ∅	1,2 „
Länge	335 „	Draht isoliert ∅	1,7 „

Je nach der Größe der gewählten Kapazität ergaben sich die verschiedensten Arten des Ausgleichsvorganges, die an Hand der Oszillogramme einer näheren Betrachtung unterzogen werden sollen. In den Bildern 2 bis 6 sind Strom- und Spannungsverlauf am Schalter bei der Unterbrechung eines Stromes von 3,5 Amp. und einer Betriebsspannung von 220 Volt dargestellt. Bild 2 wurde bei obiger Schaltung oszillographisch aufgenommen, bei 3 wurde die Schutzdrossel Dr und bei 4 außerdem noch die Kapazität C_s weggelassen. Abgesehen von geringen Spannungsunterschieden zeigen diese Aufnahmen keine wesentlichen Abweichungen. C_s und Dr haben demnach keinen nennenswerten Einfluß auf den Verlauf des Ausgleiches. Während der Stromverlauf kontinuierlich ist, zeigt die Spannungskurve starke Zackenbildung, die durch unregelmäßige Änderung des Lichtbogens bedingt ist. Diese drei Aufnahmen

wurden mit Luftschalter (Hg gegen Cu) ausgeführt, bei 5 standen die Kontakte in Alkohol und bei 6 in Öl. Außerdem lag hier die Meßschleife nicht am Schalter, sondern an der zu untersuchenden Induktivität. Unter Öl treten wesentlich höhere Überspannungen auf, die bei Verwendung von zwei Kupferelektroden noch weiter erhöht werden, wie Bild 7 zeigt.

In Bild 8 liegt ein Fall rein schwingender Unterbrechung vor. Parallel zur Spule lag hierbei eine Kapazität von 10 MF., während Schutzkapazität C_s und Drossel Dr fehlten. Die Lösung der Kontakte erfolgte völlig funkenfrei in Luft. An der Spule lag eine Spannung von 36 Volt, der Strom betrug 4,5 Amp.

Die bisherigen Versuche stellen die beiden Grenzfälle des rein aperiodischen und des rein schwingenden Ausgleiches dar und bieten nichts Neues.

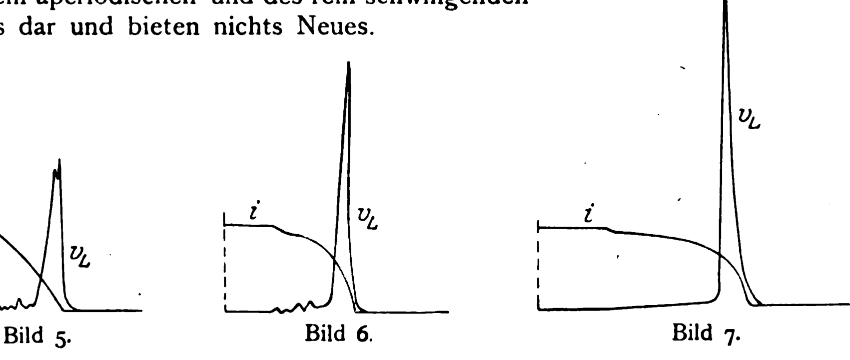


Bild 5. Bild 6. Bild 7.

Um nun in den für die Praxis weit wichtigeren Bereich zwischen diesen Grenzen zu kommen, wurde die Parallelkapazität sprungweise verkleinert und außerdem die Betriebsspannung auf 220 Volt erhöht. Bei einer Kapazität von $C_n = 1 \cdot 10^{-6}$ Fd und einem Ausschaltstrom von 5 Ampere ergab sich der Verlauf nach Bild 9. Aus dem

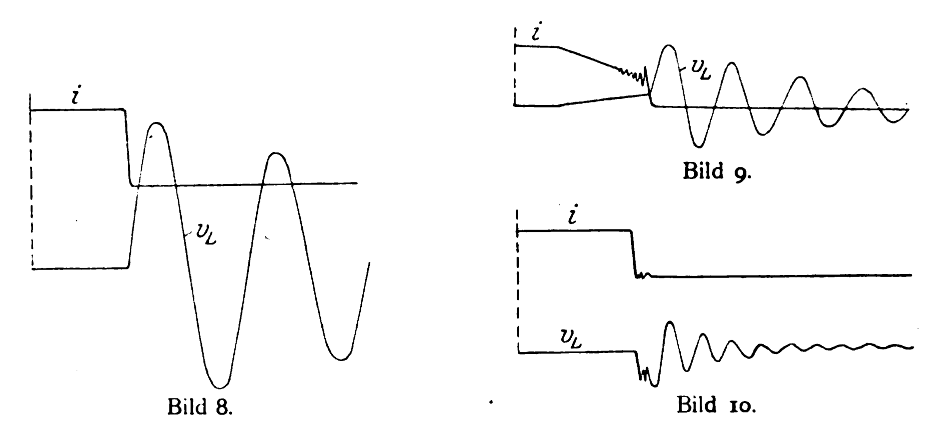


Bild 8. Bild 9. Bild 10.

Strombild ist bereits die Neigung zum Schwingen vor der endgültigen Unterbrechung zu erkennen. Wurde die Kapazität C_n noch weiter verringert, so traten kräftige Funkenentladungen auf, die aus den Bildern 10 und 11 bei $C_n = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ Fd bzw. $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ Fd deutlich zu ersehen sind. Bei letzterem ist die Funkenfolge bereits so groß, daß die Schleifen nicht mehr zu folgen vermögen. Die Kurven geben in diesem Falle kein Maß für die Höhe der Spannungen. Während bei Bild 10 die Kondensatorentladung über den Funken aperiodisch zu erfolgen scheint, treten bei 11 sehr wahrscheinlich hochfrequente Oszillationen auf. Genauere Angaben können leider nicht gegeben werden, da während dieser Versuche letztere noch nicht klar erkannt waren und daher andere Nachweismittel nicht angewandt wurden. Strom und Spannung konnten in sehr großen Grenzen verändert werden, ohne daß sich die Erscheinungen wesentlich

änderten. Ebenso zeigten beide Oszillogramme, die aus einer größeren Versuchsreihe herausgegriffen sind, daß sich bei verschiedenen Schalterarten dieselben Vorgänge erzielen lassen. In 11 scheinen beträchtliche Überströme aufgetreten zu sein, die das Bild zum Verschwinden brachten.

Bild 11.

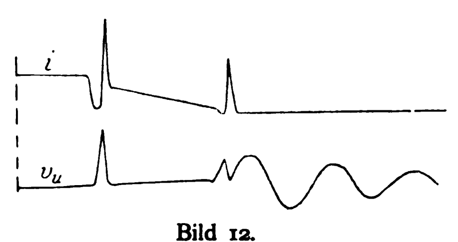


Bild 12.

Sehr gut ist das wiederholte Löschen und Zünden des Ausschaltlichtbogens aus Bild 12 und 13 zu erkennen. Besonders letzteres zeigt deutlich die Neigung des abzuschaltenden Kreises zum Schwingen.

Außer diesen rein orientierenden Versuchen wurde noch mit derselben Induktivität und einem Schalter mit Kupferelektroden in Öl eine Versuchsreihe bei einer

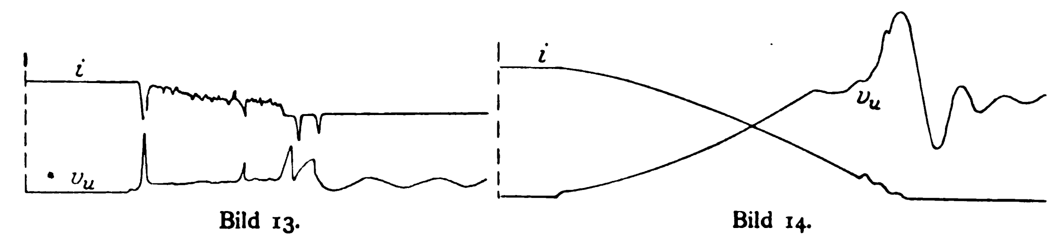


Bild 13. Bild 14.

Betriebsspannung von 240 Volt und einer gleichbleibenden Stromstärke von 4 Ampere ausgeführt. Es sollte dabei einerseits gezeigt werden, bei welchen Größen der Parallelkapazität die verschiedenen Formen des Ausgleiches eintreten, und anderseits, wie groß die dabei auftretenden Höchstwerte der Spannung an der Induktivität sein würden. Aus 20 aufgenommenen Oszillogrammen ergab sich folgendes:

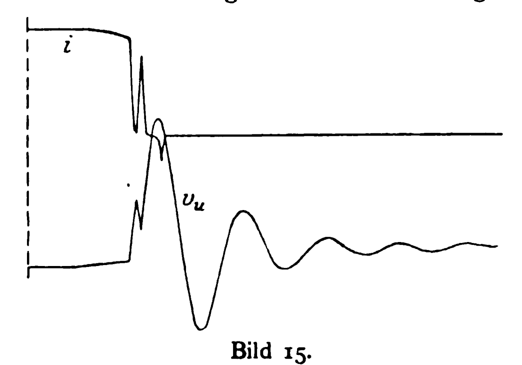


Bild 15.

Bild 16.

Parallelkapazität C_n in 10^{-6} Fd	$\frac{\text{Spulenüberspannung}}{\text{Betriebsspannnng}}$	Art des Ausgleiches
0 ÷ ~0,4	2,2 ÷ 8,0	rein aperiodisch Bild 14
0,4 ÷ 0,8	nicht feststellbar	teils aperiodisch, teils Funken- bzw. Lichtbogenentladungen, Bild 15—17
0,8 ÷ 2,0	7,5 ÷ 8,0	meist einzelne Funkenentladungen, Bild 18
3,0 ÷ 8,0	6 ÷ 5	gemischt aperiodisch-periodisch teils noch Funkenentladungen
> 10	< 5	meist reine Oszillation

Die Spulenspannung betrug dabei 30 Volt. Einige der bemerkenswertesten Oszillogramme sind in Bild 14 bis 18 wiedergegeben.

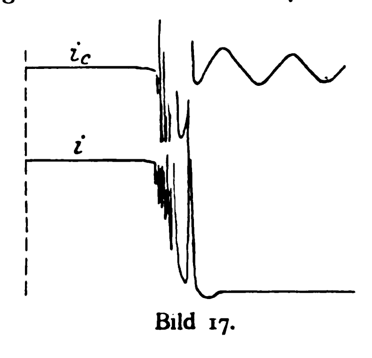


Bild 17.

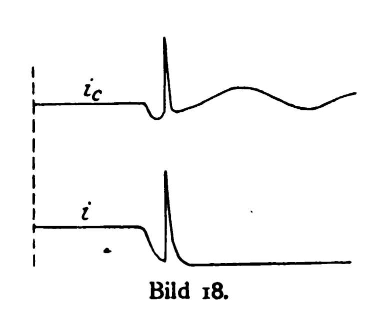


Bild 18.

Einige weitere Versuche wurden bis zu einer Stromstärke von 10 Amp. durchgeführt und zeigten, daß die Häufigkeit von Funkenentladungen sich noch vermehrte und auf einen weiteren Bereich der Parallelkapazität erstreckte. Da der Schalter für diese Stromstärken zu klein war und der Oszillograph als Beweismittel versagte, wurden diese Versuche zunächst unterbrochen.

Die Tatsache des natürlichen Schutzes durch den Ausschaltlichtbogen legte die Frage nahe, in welcher Abhängigkeit vom Strome die Ausschaltspannung unter sonst gleichen Verhältnissen stehen würde. Maßgebend für die Höhe der Spannung ist nach der bekannten Gleichung $v_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ die Änderungsgeschwindigkeit des Stromes

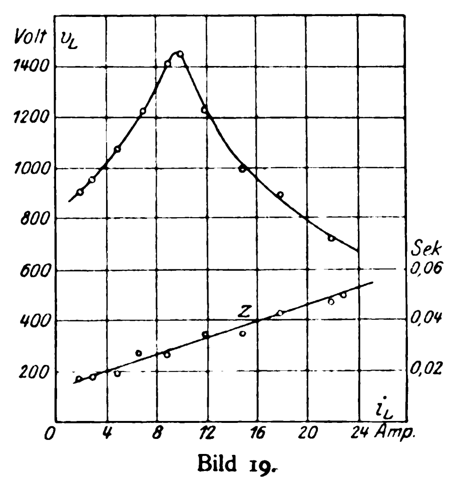


Bild 19.

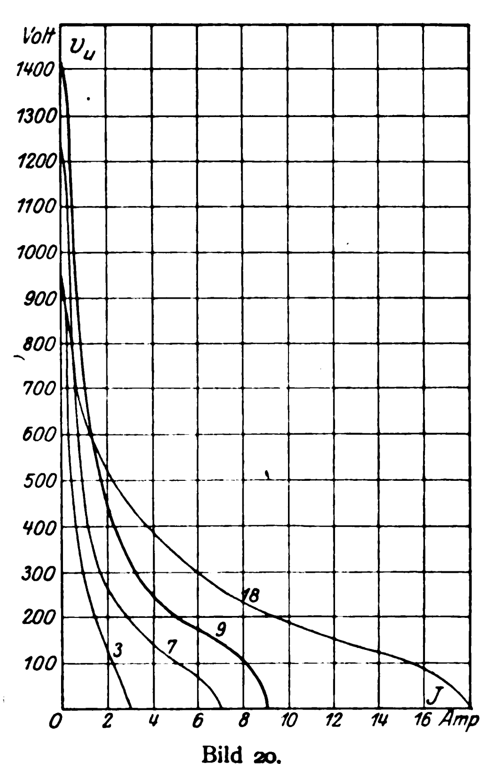


Bild 20.

$\frac{di}{dt}$, sofern L eine Konstante ist, was nur für eisenlose Spulen zutrifft. Für Spulen mit Eisenkern ist auch die Änderung von L, also $\frac{d(L \cdot i)}{dt}$ in Betracht zu ziehen. Da aber die Stromänderung durch die Widerstandsänderung im Lichtbogen gesteuert wird, ist die mathematische Behandlung der Aufgabe äußerst erschwert. Es wurde daher durch den Versuch die Gesetzmäßigkeit des Spannungsverlaufs bei einigen Spulen unter Verwendung verschiedener Schalter festgestellt. Eine der

Versuchsreihen sei hier wiedergegeben. Die Daten der als Induktivität benutzten Drosselspule waren folgende: Windungszahl 2622, Drahtdurchmesser blank 3 mm, Widerstand kalt 2,13 Ω. Als Schalter diente ein Luftschalter mit Kupferelektroden, magnetischer Auslösung, einer Schaltgeschwindigkeit von im Mittel 2,4 m/sec und im Maximum 3,65 m/sec bei einfacher Unterbrechung. Das Schaltbild blieb unverändert. Um einen absoluten Vergleich für die Ausschaltspannung zu haben wurde diese mit dem Oszillographen gemessen. Außerdem wurde die Spule ohne jede Parallelkapazität verwendet. In Bild 19 sind die dabei erzielten Versuchsergebnisse graphisch dargestellt. Die Betriebsspannung betrug 268 Volt. Wie die Kurve zeigt, ergibt sich für 10 Ampere ein Höchstwert der Spannung, die bei der doppelten Stromstärke bereits auf den halben Betrag herabsinkt.

Auch die Ausschaltzeit wurde oszillographisch aufgenommen und zeichnerisch eingetragen. Man ersieht daraus, daß sie im Geltungsbereich des Versuches mit dem Strome stetig wächst.

Bei Verwendung eines Ölschalters ergeben sich bis zu den erreichbaren Stromstärken von 40 Amp. steigende Werte für die Ausschaltspannung, die bei gleichen Strömen die obigen Werte wesentlich übertreffen. Da bei der vorhandenen Spule größere Stromstärken nicht benutzt werden konnten und andere Drosseln nicht zugänglich waren, wurden die Versuche abgebrochen. Aus den obigen Versuchsreihen wurden noch die sich für die verschiedenen Ausschaltstromstärken ergebenden statischen Lichtbogencharakteristiken abgeleitet. Sie sind in Bild 20 wiedergegeben und bestätigen die Vermutung, daß mit wachsender Stromstärke die Kennlinien immer flacher werden, womit bekanntlich auch die Schwingungsfähigkeit des Lichtbogens abnimmt.

B. Versuche im Bereiche des hochfrequenten Ausgleiches.

a) Mit Gleichstrom.

Bevor eine neue Versuchsanordnung getroffen wurde, wurden nochmals einige orientierende Versuche mit der obigen Drossel ausgeführt. Es zeigte sich, daß bei Verwendung eines Luftschalters auch bei kleinen Kapazitäten keine Funkenentladungen stattfanden. Wurden jedoch bei $C_n = (0,5 \div 1,5) \cdot 10^{-6}$ Fd die Schalterkontakte leicht geölt, so waren Ausgleichserscheinungen dieser Art stets festzustellen, die Überspannungen bis über 5000 $\text{Volt}_{\text{eff.}}$ bei einer Betriebsspannung von 268 Volt zur Folge hatten. Das Ausschalten erfolgte dabei stets unter lautem Knall, dem Kennzeichen des aktiven Funkens. Versuche, die Vorgänge oszillographisch festzuhalten, mißglückten, da die Aufnahmen während des kritischen Augenblickes auf etwa 1 cm Bildbreite, entsprechend einer Zeit von $^1/_{300}$ Sekunde lediglich ein leeres Feld zeigten, nach welchem die niederfrequente Oszillation aber immer noch mit beträchtlicher Spannung erfolgte. Diese Erscheinungen traten bei Stromstärken bis zu etwa 10 Amp. regelmäßig auf, darüber hinaus wurden hochfrequente Schwingungen seltener und verschwanden bei etwa 20 Amp. Gleichzeitig nahm die Überspannung stark ab. Bei ganz unter Öl stehenden Kontakten traten Zündungen nur bei Stromstärken bis etwa 6 Amp. und bei $C_n = 0,5$ bis $1 \cdot 10^{-6}$ Fd auf. Es wurden jedoch hierüber nur wenige, rohe Versuche angestellt, die nicht als maßgebend bezeichnet werden können.

Mit der bisher benutzten Spule und den niederen Spannungen waren brauchbare Resultate nicht zu erreichen, denn einerseits versagte im kritischen Augenblick der Oszillograph und andererseits waren die auftretenden Überspannungen mit der Funkenstrecke nur in wenigen Fällen meßbar. Letztere stellte schließlich das einzige Nachweismittel für Unterbrechungsspannungen dar. Das Streben ging also dahin, mit durch die Funkenstrecke meßbaren Spannungen zu arbeiten. Gleichzeitig sollten die Verhältnisse den Forderungen der Praxis, wie sie beim Ausschalten von Asynchronmotoren und Transformatoren vorliegen, näher gebracht werden.

Diesen Überlegungen gemäß wurde für die weiteren Untersuchungen die Oberspannungsseite eines 3000 Volt, 1,8 KVA-Manteltransformators als Induktivität benutzt. Sein Eisenquerschnitt betrug $7{,}8 \cdot 18{,}8 = \sim 148\ cm^2$ mit und $132\ cm^2$ ohne Isolation, der mittlere Kraftlinienweg in Eisen $4 \cdot 121 = 48{,}4$ cm und die sekundäre Windungszahl 1900. Um bei den späteren Wechselstromversuchen und der zulässigen Spannung genügend hohe Stromstärken und größere Kraftflußänderungen zu bekommen, wurde ein Luftspalt von insgesamt 5 mm eingestellt. Das Schalten erfolgte zunächst von Hand, und zwar vermittelst Ölschalter mit Kupferkontakten.

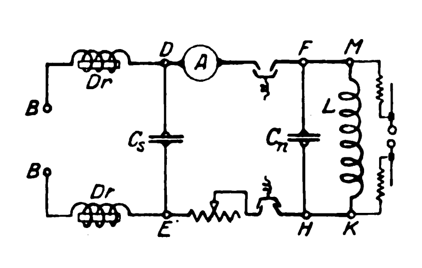


Bild 21.

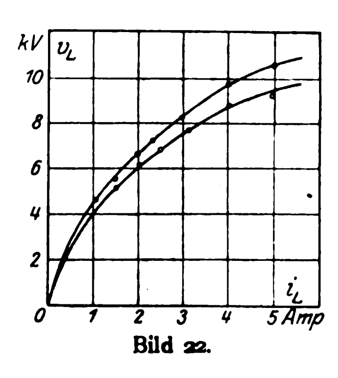


Bild 22.

Die angewandte Schaltung ist in Bild 21 wiedergegeben. C_s wurde gegen C_n groß gewählt, so daß die höchste Spannung am Transformator auftreten mußte.

Durch Vorversuche wurde der Kapazitätsbereich ermittelt, in dem die höchsten Unterbrechungsspannungen erfolgten. Dann wurde für zwei verschiedene Kapazitäten dieser Größenordnung die Abhängigkeit der Ausschaltüberspannung vom Strome ermittelt. Trotzdem von Hand geschaltet wurde, die Schaltgeschwindigkeit also nie

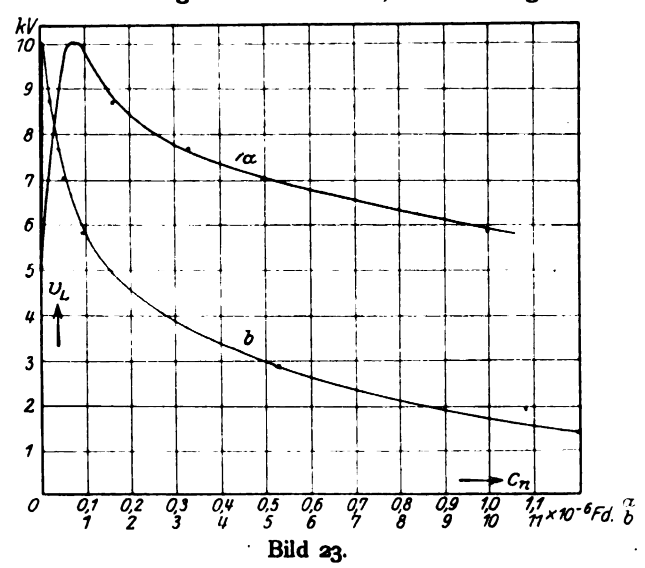


Bild 23.

gleichmäßig war, ergaben sich sehr konstante Werte, die in Bild 22 zeichnerisch dargegestellt sind. Wie die Kurven zeigen, steigt die Spannung mit zunehmender Stromstärke an, jedoch nicht proportional, sondern nach einer Exponentialfunktion. Über 5 Amp. konnte der Strom nicht gesteigert werden. Da aber bereits bei diesem Wert eine Induktion von rund 14500 Gauß vorhanden war, hätte bei noch höherem Strome die Überspannung schon wegen der Eisensättigung wohl bald eine Grenze erreicht.



Eine weitere Messung erstreckte sich auf die Prüfung der Abhängigkeit der Unterbrechungsüberspannung von der Parallelkapazität bei gleichbleibender Stromstärke. Hier zeigten sich insofern Unregelmäßigkeiten, als bei kleineren Kapazitäten die Häufigkeit der Überschläge an der Meßfunkenstrecke geringer wurde. Als Ursache ergab sich mangelhafte Isolation des Regelwiderstandes gegen Erde, so daß eine Ableitung der hochfrequenten Ströme stattfand, und zwar derart, daß Funken zwischen Widerstand und Erde übersprangen. Bild 23 stellt die Meßergebnisse dar. Das Messen der Spannung allein konnte keine weitere Aufklärung über die Art des Energieaustausches geben. Daher sollte abermals der Vorgang durch den Oszillographen festgehalten werden. Strom- und Spannungsverlauf ohne zusätzliche Parallelkapazität zeigt Bild 24. Der Bogen brennt hier während rund $^{3}/_{100}$ Sekunde sehr ruhig und reißt dann plötzlich ab, wodurch die Spannung am Transformator zu einem Höchstwerte von 5500 Volt emporschnellt.

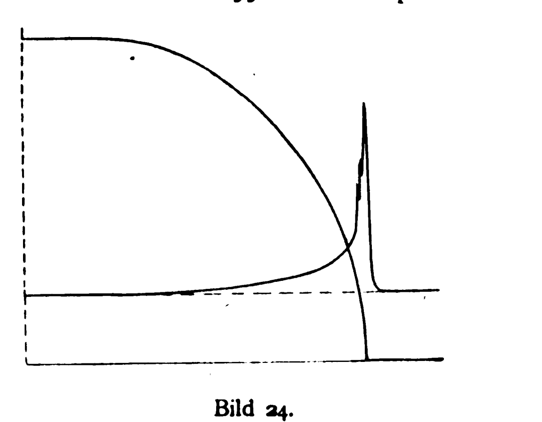


Bild 24.

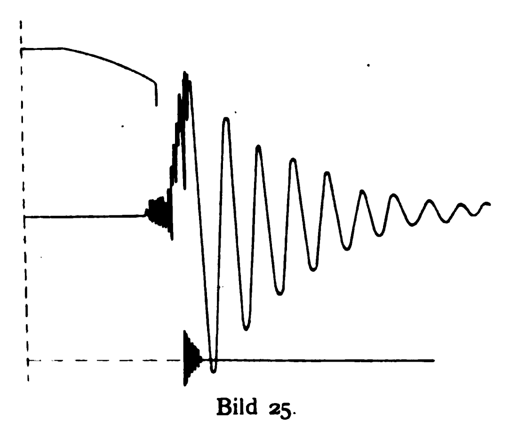


Bild 25.

Hierauf wurden einige Aufnahmen mit $C_n = 0{,}08 \cdot 10^{-6}$ Fd gemacht, von denen eine in Bild 25 wiedergegeben ist. Während mit dem Abreißen des Lichtbogens das Bild der Stromschleife etwa 0,003 Sekunden lang verschwindet, zeigt die Spannungskurve in dieser Zeit nur ein sehr verschwommenes Bild, aus dem nur zu ersehen ist, daß mit dem ersten Löschen des Bogens Schwingungen von sehr hoher Frequenz auftreten, nach deren Verlauf noch einzelne, vielleicht aperiodische Funkenentladungen folgen, bis schließlich nach endgültiger Unterbrechung die noch vorhandene Kondensatorspannung sich über den Transformator ausgleicht. Ein Maß für die Höhe der Spannung vermag das Oszillogramm auch hier nicht zu geben. Die Schwingungen des Schalterstromes konnten außerdem noch am Stromzeiger beobachtet werden, der beim Ausschalten zunächst wachsende Werte zeigte. Diese Erscheinung war bei früheren Versuchen nicht zu bemerken, da dort ein Drehspulinstrument verwendet worden war, das hier durch einen Hitzdraht-Strommesser ersetzt wurde. Auch bei diesen Versuchen traten an dem inzwischen ausgewechselten Widerstand, der auf Porzellanrohr gewickelt war, Überschläge zwischen den Windungen auf. Desgleichen erfolgten Überschläge zwischen Batteriezuleitung und Erde.

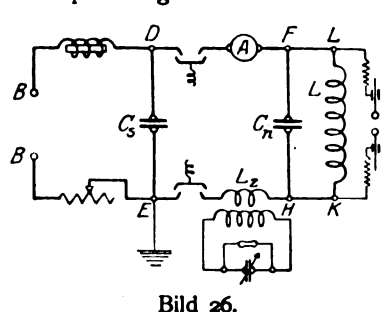


Bild 26.

Da kein Zweifel mehr bestand, daß hochfrequente Schwingungen die eigentlichen Überspannungserreger waren, wurde die bisherige Schaltung nach Bild 26 abgeändert. Das Entstehen derartiger Schwingungen war nur in dem Kreise F, H, E, D möglich, der aus der Reihenschaltung von C_n, C_s, der Leitungsinduktivität L_n und dem Lichtbogen gebildet wurde. Um die Schwingungen in ungeschwächter

Form zu erhalten, wurde der Regelwiderstand R vor den Kondensator C_s gelegt. Der übrige Teil der Schaltung wurde peinlich isoliert und die Zuleitung noch durch Erden des Punktes E geschützt. Zum Schalter wurde der bereits erwähnte Ölschalter mit magnetischer Auslösung verwendet. Das Ziel der nächsten Untersuchung war nun, festzustellen, ob die aus den Oszillogrammen und den früheren Beobachtungen gewonnene Anschauung die richtige war.

In die Leitung E—H wurde zu diesem Zweck eine kleine Spule mit $L_z = 0{,}195 \cdot 10^{-3}$ Henry gelegt. Die an dieser gemessene Spannung betrug je nach der Größe von C_n beim Ausschalten $6000 \div 8000$ Volt, Werte, die nur durch hochfrequente Schwingungen erreicht werden konnten. Weiterhin wurde mit L_z ein Wellenmesser gekoppelt und abzustimmen versucht. Das als Wellenanzeiger benutzte Heliumröhrchen sprach jedoch auf einen sehr breiten Bereich an. Es schien zunächst, als ob jeder Schwingungskreis angestoßen würde, doch ergaben weitere Messungen mit einem empfindlicheren Heliumröhrchen und ganz loser Kopplung genügend scharfe Abstimmung. Ganz einwandfrei konnte bei festgehaltenem Lichtbogen abgeglichen werden. Die Abstimmung änderte sich mit zunehmender Lichtbogenlänge nur unbeträchtlich.

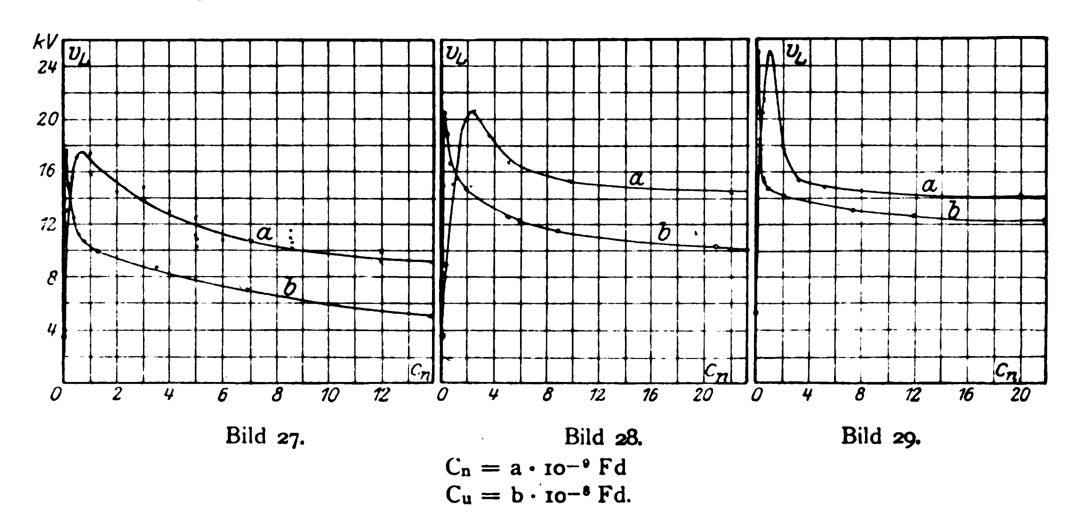


Bild 27. Bild 28. Bild 29.

$C_n = a \cdot 10^{-9}$ Fd
$C_u = b \cdot 10^{-8}$ Fd.

Um auch den Einfluß der Zahl der Unterbrechungsstellen bei verschiedenen Parallelkapazitäten festzustellen, wurden die in Bild 27 bis 29 wiedergegebenen Kurven aufgenommen. Die Messungen gestalteten sich sehr langwierig, da gerade bei kleinen Kapazitäten Unregelmäßigkeiten eintreten und infolge sehr starker Verrußung des Schalteröles die Versuche mehrfach unterbrochen und wiederholt werden mußten. Außerhalb der allen Kurven charakteristischen Spitze blieben jedoch die Werte hinreichend konstant. Letztere ist auf Resonanz der Schwingung des Kreises F, H, E, D mit einer Eigenschwingung des Transformators zurückzuführen. Daß deren Lage sich mit der Zahl der Unterbrechungen ändert, muß wohl darauf zurückgeführt werden, daß das Abreißen des Lichtbogens bei verschiedenen Stromstärken erfolgt. Da aber die wirksame Induktivität der Wicklung von dem jeweiligen quasistationären Magnetisierungszustand des Eisenkernes abhängt, muß L sich mit der Stromstärke ändern.

Drei weitere Beobachtungsreihen, die in Bild 30 zusammengestellt sind, veranschaulichen die Abhängigkeit der Unterbrechungsüberspannung von der Stromstärke bei gleichbleibender Kapazität. Die Schaltgeschwindigkeit war dieselbe wie auf Seite 3. Als Parallelkapazität wurde jeweils die gewählt, bei der in den obigen Versuchen der Höchstwert der Spannung aufgetreten war. Über 5 bzw.



4 Amp. konnte die Stromstärke nicht gesteigert werden, da bei diesen Werten bereits Überschläge zwischen den Wicklungshälften des Transformators erfolgten. Gegenüber den Versuchen mit Handschaltung auf Seite 4 ergaben sich hier wesentlich höhere Spannungswerte, die hauptsächlich durch die kleineren Kapazitäten und erst in zweiter Linie durch die erhöhte Schaltgeschwindigkeit bedingt sind.

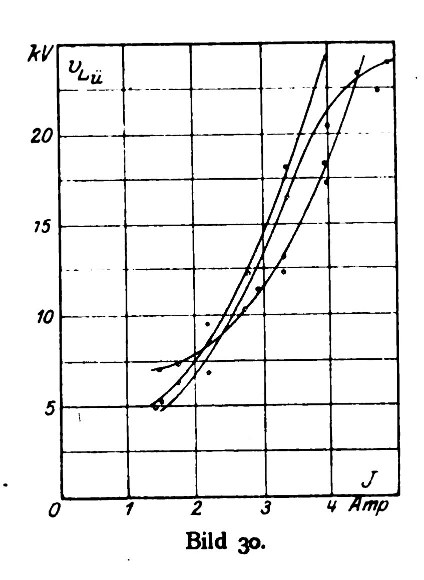


Bild 30.

Den Einfluß der Vergrößerung der Induktivität des Kreises F, H, E, D auf die Ausschaltspannung für $C_n = 0{,}005 \cdot 10^{-6}$ Fd und $i = 4$ Amp. zeigt Bild 31. Auch sie ergibt den typischen Verlauf der Resonanzkurven und bestätigt die frühere Behauptung.

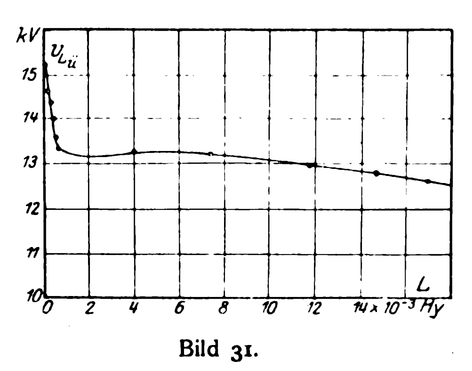


Bild 31.

Um einen Einblick in den Verlauf der Schwingungen zu erhalten, wurde schließlich zu dem aus der Hochfrequenztechnik hinreichend bekannten Schwingungsprüfer, einem umlaufenden Heliumröhrchen, gegriffen. Dieses besaß kapazitive Kopplung und wurde mit einer Spule verbunden, die durch die Induktivität L_z (Bild 20) induziert wurde. Bei verschiedenen C_n wurden nunmehr die Schwingungsbilder beobachtet, die völlige Übereinstimmung mit den bisherigen Vermutungen ergaben. Da Vorversuche zeigten, daß die Art der Schwingung durch die Zahl der Unterbrechungen nicht wesentlich beeinflußt wurde, so erfolgte das Schalten

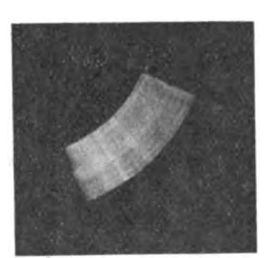


Bild 32.

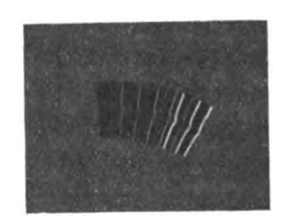


Bild 33.

nur doppelpolig mit zweifacher Unterbrechung. Als zweckmäßigste Parallelkapazitäten wurden $C_n = 0{,}0012 \cdot 10^{-6}$ Fd bzw. $= 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ Fd gewählt. Die Schwingungsbilder wurden photographisch festgehalten und sind in Bild 32 und 33 wiedergegeben.

Aus ihnen ist leicht zu ersehen, daß bei $C_n = 0{,}0012 \cdot 10^{-6}$ Fd Lichtbogenschwingungen oder Funkenentladungen von außerordentlich schneller Funkenfolge auftreten, während bei $C_n = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ Fd Funkenentladungen von wesentlich langsamerer Funkenfolge vorkommen. Der Schalter wurde dabei selbsttätig ausgelöst. Wurde von Hand geschaltet, so ergaben sich entsprechend längere Bildstreifen, aber von geringerer Intensität. Bei einer Kapazität von $0{,}0012 \cdot 10^{-6}$ Fd

konnte der Lichtbogen bei festgehaltenem Schalter zum Stehen gebracht werden. Je nach der Größe des Elektrodenabstandes ergaben sich dabei die verschiedenen aus der Hochfrequenztechnik bekannten Bilder für Lichtbogen- bzw. gedämpfte Schwingungen. Für $C_n = 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ Fd begann das Schwingungsbild mit einem Streifen wie bei $C_n = 0{,}0012 \cdot 10^{-6}$ Fd und endigte in einem ähnlichen Funkenbild wie bei $0{,}04 \cdot 10^{-6}$ Fd.

Bei größeren Kapazitäten konnten Dauerschwingungen nicht erhalten werden, da die Löschwirkung der Kapazität zu groß war.

Während dieser Versuche wurden nochmals genauere Wellenlängenmessungen angestellt, die eine hinreichend scharfe Abstimmung ergaben. Die dabei gemessenen Werte sind folgende:

Gesamtkapazität des Schwingungskreises .	C_g	$= 9200$ cm	34 100 cm
Induktivität	L_n	$= 0{,}0148 \cdot 10^6$ cm	$0{,}0148 \cdot 10^6$ cm
Gemessene Wellenlänge	λ	$= \sim 750$ m	1450 m
Berechnete „	λ	$=$ 735 m	1415 m

Zwischen gemessenen und berechneten Werten ergibt sich demnach eine gute Übereinstimmung.

b) Versuche mit Wechselstrom.

Die mit Gleichstrom gewonnenen Ergebnisse wurden auch mit Wechselstrom nachgeprüft. Abgesehen von der Stromquelle blieb die Schaltung unverändert. Als normale Betriebsspannung wurde ~ 3000 Volt gewählt. Dabei ergab sich eine effektive Stromstärke von 1,91 Amp. Eine den früheren Gleichstromversuchen

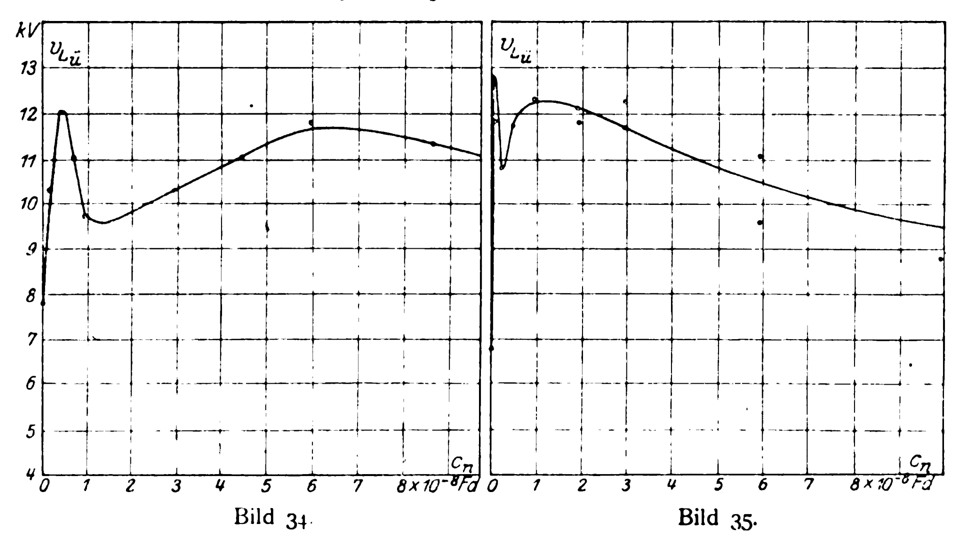


Bild 34. Bild 35.

entsprechende Stromstärke von $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2{,}83$ Amp. konnte bei dem eingestellten Luftspalt nicht erreicht werden. Aber auch bei 1,91 Amp. gelangen die Versuche so gut, daß es nicht nötig war, höhere Stromstärken heranzuziehen. Es zeigte sich vielmehr, daß trotzdem die Erscheinungen deutlicher zutage treten als bei Gleichstrom. Der Grund hierfür ist in der beträchtlich höheren Wechselspannung zu suchen, die den Lichtbogen besser zu unterhalten vermag, als die verhältnismäßig kleine Gleichspannung. Auch die Intensität der Schwingungen war gegenüber Gleichstrom größer.

Zunächst wurde nun wieder festgestellt, wie sich die Ausschaltüberspannung in Abhängigkeit von der Größe der Parallelkapazität verhält. Die in Bild 34 und 35 wiedergegebenen Meßergebnisse zeigen den Gleichstrombildern ähnliche Formen.

Als Neuerscheinung tritt hier die Bildung eines zweiten Maximums hinzu, dessen Lage in beiden Fällen allerdings sehr verschieden ist, während die Spannung die gleiche Höhe erreicht. Auffallend ist die gute Übereinstimmung der Höchstspannungen bei Gleich- und Wechselstrom. Aus dem Bild 30 ergibt sich für einen Ausschaltstrom von $1{,}91 \cdot \sqrt{2} = 2{,}7$ Amp. im ersten Fall 10 KV, im zweiten ~ 13 KV

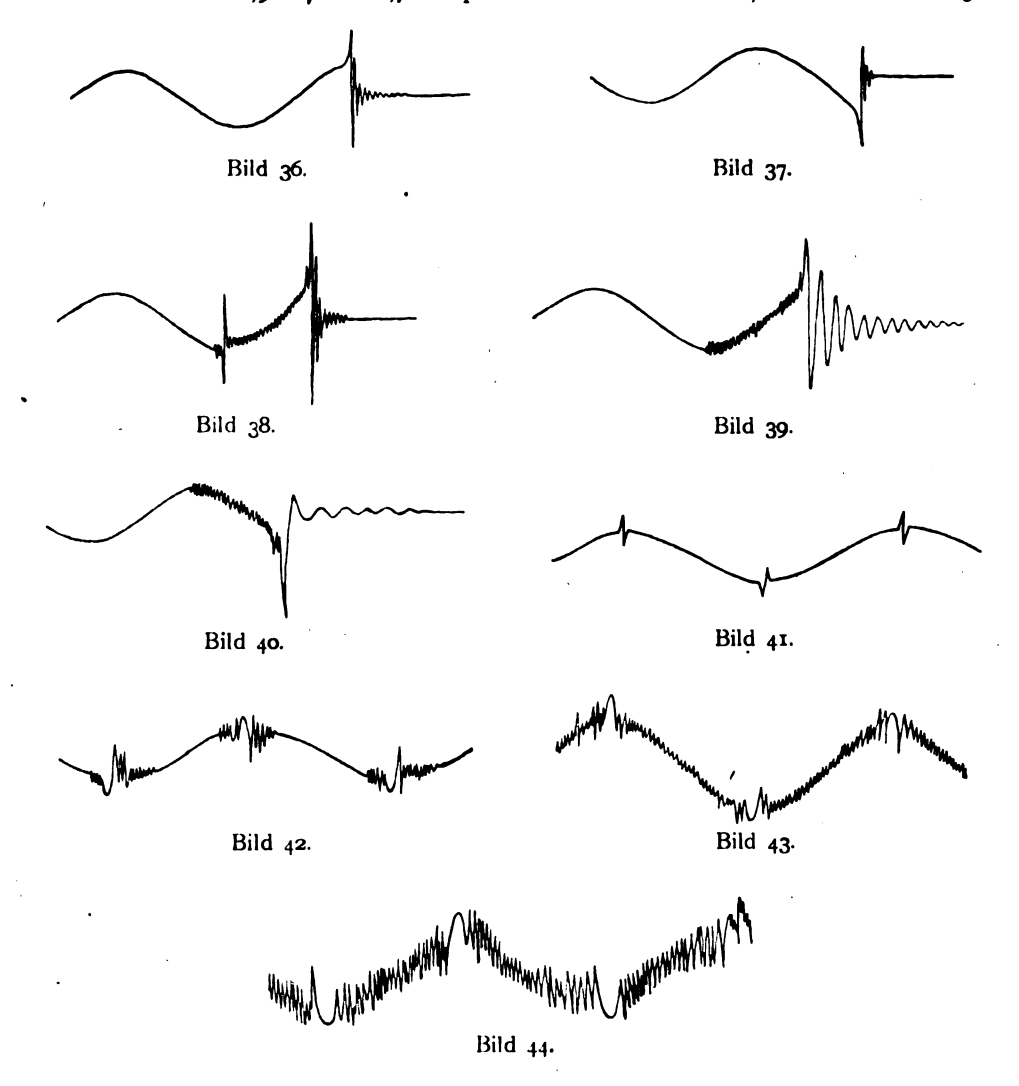


Bild 36. Bild 37.

Bild 38. Bild 39.

Bild 40. Bild 41.

Bild 42. Bild 43.

Bild 44.

gegenüber 10 und 12,3 KV bei Wechselstrom, ebenso liegen dieselben bei den nahezu gleichen Kapazitätswerten.

Versuche über den Einfluß der Größe der Leitungsinduktivität auf die Höhe der Überspannung ergaben dasselbe Bild wie bei Gleichstrombetrieb.

Auch hier wurden Oszillogramme und Schwingungsbilder aufgenommen. Erstere sind zum Teil in den Bildern 36 bis 40 wiedergegeben. Die Spannungsschleife lag über einem Spannungswandler mit einem Übersetzungsverhältnis 15000/110 und einem Vorschaltwiderstand von 2000 Ω am Transformator. Auf die Aufnahme der Stromkurve mußte verzichtet werden, da sich bei gleichzeitiger Verwendung beider Schleifen Isolationsschwierigkeiten ergaben. Unter Verwendung eines Stromwandlers mit Widerstandsüberbrückung wären diese zwar behoben, der Nachweis der Schwingungen aber auch nichtig gewesen.

Bild 36, das bei $C_n = 0$ aufgenommen wurde, verläuft aperiodisch und zeigt zum Schlusse ein kurzes oszillatorisches Ausklingen der Energie. Daß auch hier bereits hochfrequente Schwingungen auftreten können, zeigte mehrmals der Schwingungsprüfer. Doch ist die Zeitdauer derselben außerordentlich kurz. Auf den Oszillographen können sie kaum einwirken, da sie einen bequemeren Weg über die Eigenkapazität des Spannungswandlers finden. Trotzdem läßt sich ihr Vorhandensein an den feinen Zacken der Spannungskurven erkennen. Bild 37 und 38 zeigen den Ausgleichsvorgang bei $C_n = 0{,}001 \cdot 10^{-6}$ Fd. Im ersteren fehlt scheinbar die Lichtbogenschwingung, die sich im zweiten leicht erkennen läßt. Noch deutlicher sind sie aus Bild 39 und 40 bei $C_n = 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ Fd zu ersehen.

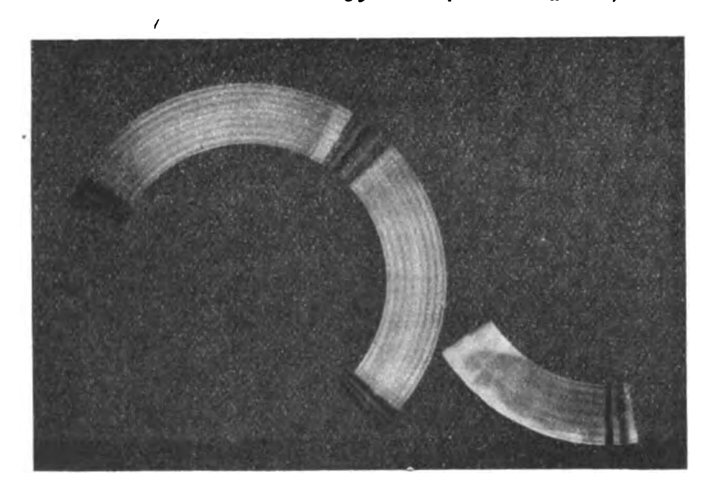


Bild 45.

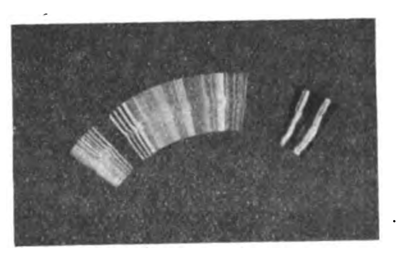


Bild 46.

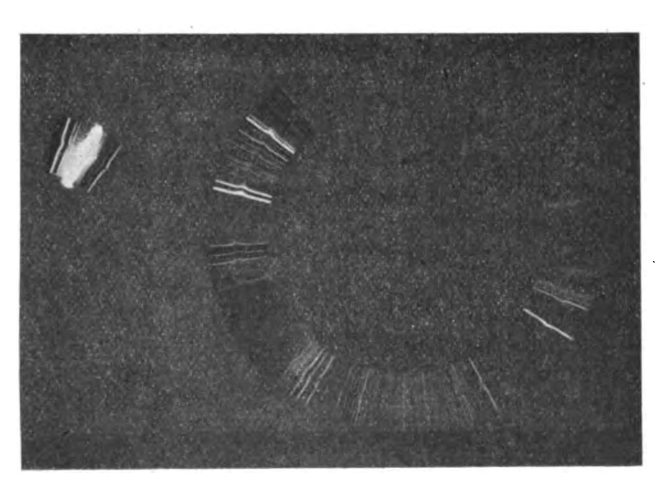


Bild 47.

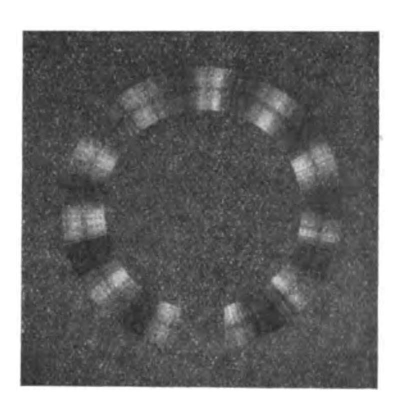


Bild 48.

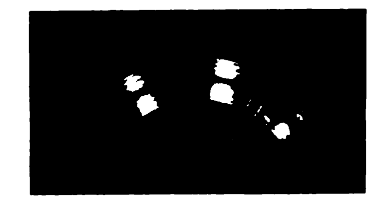


Bild 49.

Die Bilder 41 bis 44 zeigen die Spannungskurven des Transformators bei in verschiedenen Stellungen festgehaltenem Schalter und einer Parallelkapazität von $C_n = 0{,}03 \cdot 10^{-6}$ Fd. Bei einer Betriebsstromstärke von 1,97 Amp. ergaben sich dabei Ausgleichsströme von $\sim$ 3, 5, 7 und 11 Amp.

In den Bildern 45 bis 49 sind einige Schwingungsbilder bei verschiedenen Kapazitäten und Schaltgeschwindigkeiten wiedergegeben.

Bild 45 stellt den Vorgang bei konzentrischer Kapazität $C_n = \sim 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ Fd, Bild 46 bei $C_n = \sim 0{,}03 \cdot 10^{-6}$ Fd und einer mittleren Schaltgeschwindigkeit von

2,4 m/sec dar, während Bild 47 bei $C_n = \sim 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ Fd und Bild 48 bei $C_n = 0{,}0012 \cdot 10^{-6}$ Fd, und zwar mit festgehaltenem Schalter und lang ausgezogenem Lichtbogen aufgenommen wurden. Das in 45 und 46 auftretende Aufblitzen des Röhrchens rührt von Überschlägen der Koppelkondensatoren her.

Um die Wirkung von verteilter Kapazität und Induktivität zwischen Schalter und Transformator kennen zu lernen, wurde bei Bild 48 an Stelle des Kondensators eine Freileitung von $2 \cdot 181{,}7$ m Länge gelegt. Die mit der Brücke gemessenen Werte der statischen Kapazität und Induktivität betrugen $C_n = 0{,}82 \cdot 10^{-11}$ Fd und $L_n = 0{,}49 \cdot 10^{-3}$ Hy. Wie das Bild zeigt, ergaben sich reine Lichtbogenschwingungen. Am Wellenmesser konnte auf 3 Wellen abgestimmt werden. Es ergab sich $\lambda_1 \sim 800 \div 860$ m; $\lambda_3 \sim 275 \div 285$ m und $\lambda_5 = 165 \div 180$ m. Dabei zeigte das zur Abstimmung benutzte Hitzdrahtinstrument bei gleicher Kopplung Ausschläge im Verhältnis von 0,3 : 0,09 : 0,02. Der Wellenmesser läßt sich also hier gleichzeitig als Kurvenanalysator benutzen. Genauere Messungen wurden jedoch nicht angestellt. Auf der Freileitung ergibt sich nichtstationäre Strom- und Spannungsverteilung, und zwar derart, daß der Spannungsknoten im Schalter und der Spannungsbauch am Transformator liegt. Die Spannungsverteilung auf der Wick-

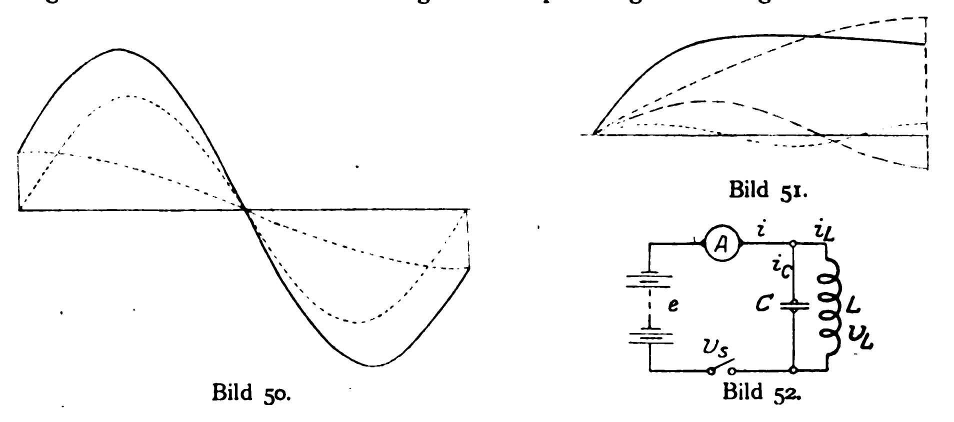


Bild 50.

Bild 51.

Bild 52.

lung des letzteren ist natürlich ebenfalls nichtstationär. Da während der Versuche häufiger Überschläge zwischen den beiden Wicklungshälften des Transformators erfolgten, und zwar auf eine Entfernung von 1 bis 1,5 cm in Luft, so läßt sich daraus entnehmen, daß die Höchstspannungen innerhalb der Wicklungshälften, aber nicht an den Klemmen auftraten. Eingehendere Versuche konnten wegen der Unzugänglichkeit der Windungen nicht angestellt werden. Ein angenähertes Bild im Resonanzfall und bei reinen sinus-Spannungen mag Bild 50 geben, das durch Übereinanderlagerung der freien und erzwungenen Schwingung, die der Transformator stets ausführt, erhalten wird.

Für die Spannungsverteilung auf der Freileitung läßt sich mit Hilfe der obigen Messung ein genaueres Bild entwerfen, das in Bild 51 wiedergegeben ist. Da die errechnete Wellenlänge einen Wert von $\lambda = 1195$ m ergibt, so beträgt der aus der Hochfrequenztechnik bekannte „Formfaktor" der Leitung $f = \frac{855}{1195} = 0{,}715$. Im Falle sinusförmiger Verteilung ist $f = \frac{2}{\pi} = 0{,}636$, dementsprechend muß im vorliegenden Falle die Verteilung nach einer stumpfen Kurve erfolgen.

Bei konzentrierten Kapazitäten und Induktivitäten vorgenommene Wellenlängenmessungen ergaben gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten.

Auch die beim Einschalten auftretenden Schwingungsbilder wurden dauernd beobachtet. Sie waren von wesentlich kürzerer Dauer als die beim Öffnen des Schalters, ebenso waren die Überspannungen geringer.

Mathematisch-physikalische Betrachtungen über die Versuchsergebnisse.

a) Aperiodischer Ausgleich.

Wie die Versuche zeigen, findet in keinem Falle ein plötzliches, d. h. zeitloses Verschwinden des Stromes statt. Es ergibt sich vielmehr, daß je nach der Größe der Eigenkapazität und des Widerstandes des abzuschaltenden induktiven Kreises der Energieausgleich in verschiedenen Formen erfolgt.

Vollzieht sich die Zustandsänderung rein aperiodisch und ist das Zeitgesetz der Stromänderung bekannt, so läßt sich der Augenblickswert der Spannung an den Spulenenden leicht aus dem vereinfachten Energiegesetz ableiten.. Aus diesem erhält man für den Stromkreis in Bild 52 bei Vernachlässigung der Wärmeverluste in der Spule und an der Unterbrechungsstelle, und wenn L deren Induktivität, C die Eigenkapazität, v_L die Klemmenspannung und i den Strom bezeichnen, durch Differentiation die Gleichung:

$$C \cdot v_L \cdot d v_L = L \cdot i_L \cdot d i_L. \tag{1}$$

Da außerdem zwischen den in der Zeit dt umgesetzten Elektrizitätsmengen Gleichgewicht bestehen muß, ist

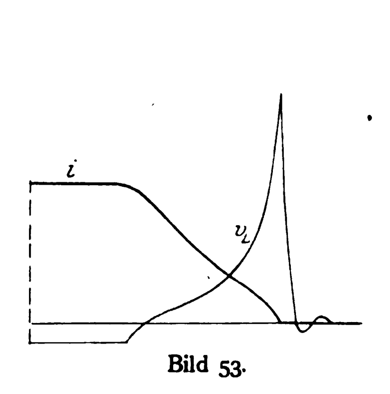


Bild 53.

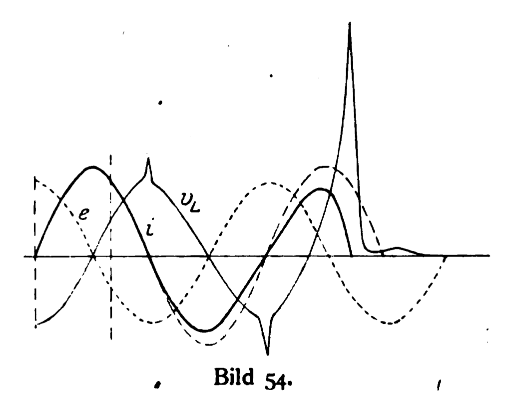


Bild 54.

$$i_L \, dt = C \cdot d v_L, \tag{2}$$

und infolgedessen

$$v_L = L \cdot \frac{d i_L}{dt}. \tag{3}$$

Ist e der Augenblickswert der dem Kreise aufgedrückten EMK, so herrscht am Schalter die Spannung:

$$v_u = e - L \cdot \frac{d i_L}{dt}. \tag{4}$$

Der allgemeine Verlauf der rein nichtschwingenden Unterbrechung bei Gleich- und Wechselstrom ist in Bild 53 und 54 dargestellt. Bei dem Wechselstrombild ist dabei willkürlich angenommen, daß sich der Ausschaltvorgang in 3 Halbperioden abspielt.

b) Schwingender Ausgleich.

α) Reine nieder- oder mittelfrequente Oszillation.

Ist die Kapazität des abzuschaltenden induktiven Gebildes nicht vernachlässigbar, so wird stets, wenn es die Dämpfung des Kreises gestattet, ein schwingender Ausgleich der freiwerdenden magnetischen Feldenergie erfolgen. Die Art und Frequenz der Unterbrechungsschwingung wird in ausschlaggebender Weise durch die Größe der Kapazität und ihre Lage zur Schaltstelle bestimmt. Dementsprechend lassen sich zwei Hauptfälle unterscheiden, die durch die Schaltbilder 55 und 56 wiedergegeben sind.



Am einfachsten liegen die Verhältnisse in Bild 55. Je nach der Größe der Kapazität C_n wird das Ausschalten rein oszillatorisch verlaufen oder aperiodisch beginnen und in einer Schwingung enden. Auch die Höhe der Überspannung wird durch die Größe von C_n gesteuert. Zur genauen rechnerischen Ermittlung der Vorgänge müßte das Gesetz der Widerstandsänderung in der Unterbrechungsstelle bekannt sein. In verschiedenen Abhandlungen über ähnliche Vorgänge hat man ein ideales Zeitgesetz aufgestellt, das zwar dem Anfangs- und Endzustand Genüge leistet, den Verlauf zwischen diesen Zeiten aber nicht wiederzugeben vermag. Da die Zustandsänderungen im Schalter von vielen äußeren Einflüssen abhängen, die sich schwer gesetzmäßig fassen lassen, so soll von dieser Art der Behandlung abgesehen und der Unterbrechungswiderstand R_u zeitweilig als konstant angenommen werden. Es interessiert hier in erster Linie die Frage, bei welcher Größe von R_u das Gebilde aus L, R und C_n überhaupt schwingungsfähig wird. Kennt man erst diesen Wert von R_u, dann läßt sich einigermaßen schätzen, ob und in welcher Größenordnung Überspannungen zu erwarten sind.

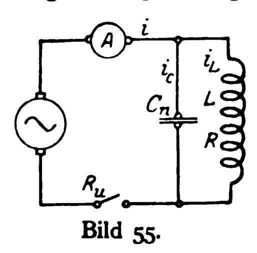


Bild 55.

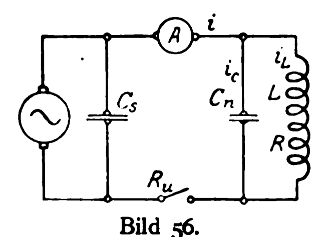


Bild 56.

Es sei L die gesamte Induktivität, R der Verlustwiderstand und C_n die konzentriert gedachte Nebenschlußkapazität der Spule und Leitung. Ferner seien i, v und e die Augenblickswerte des Stromes, der Spannung und der EMK.

Dann gelten nach den beiden Kirchhoffschen Gesetzen für den in Bild 55 dargestellten Ersatzkreis die Gleichungen:

$$i = i_L + i_C, \tag{5}$$

$$e = v_L + v_R + v_u, \tag{6}$$

$$e = v_C + v_u \tag{7}$$

Bei Gleichstrombetrieb ist e eine Konstante, andernfalls ist $e = F(t)$. Führt man für die verschiedenen Spannungen die bekannten Gleichungen:

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$v_R = R\, i_L$$

$$v_u = R_u \cdot i.$$

und

$$v_C = \frac{1}{C_n} \int i_C\, dt$$

ein und differenziert Gleichung (7), so erhält man die beiden Differentialgleichungen

$$e = L \cdot \frac{di_L}{dt} + R\, i_L + R_u \cdot i \tag{8}$$

und

$$\frac{de}{dt} = R_u \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i_C}{C_n}. \tag{9}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichungen setzt sich aus dem Ausgleichsstrom i_a und dem Dauerstrom i_d zusammen. Ersterer ergibt sich bekanntlich, wenn die Störungsfunktion $e = 0$ gesetzt wird, oder physikalisch ausgedrückt, wenn die magnetische Feldenergie der Spule sich frei über die Kapazität und den Lichtbogen entlädt. In diesem Falle lassen sich die beiden Gleichungen unter Berücksichtigung der Gleichung (5) in eine homogene Differentialgleichung II. Ordnung umformen. Sie lautet:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_u \cdot C_n}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R + R_u}{L \cdot C_n \cdot R_u} \cdot i = 0. \tag{10}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$i_a = a_1 \cdot e^{-w_1 \cdot t} + a_2 \cdot e^{-w_2 \cdot t}, \tag{11}$$

worin a_1 und a_2 noch willkürliche Konstanten und

$$w_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2 R_u \cdot C_n}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2 R_u \cdot C_n}\right)^2 - \frac{R + R_u}{L \cdot C_n \cdot R_u}}. \tag{12}$$

Hierin stellt

$$\alpha = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2 R_u \cdot C_n} \tag{13}$$

den Dämpfungsfaktor des Kreises dar.

Wird
$$\alpha^2 < \frac{R + R_u}{L \cdot C_n \cdot R_u},$$

so erfolgt der Ausgleich periodisch, während er bei

$$\alpha^2 > \frac{R + R_u}{L \cdot C_n \cdot R_u}$$

aperiodisch verläuft.

$$\alpha = \frac{R + R_u}{L \cdot C_n \cdot R_u} \tag{14}$$

liefert den kritischen Schwingungswiderstand:

$$R_u = \frac{R}{R^2 \cdot C_n - 4L} \pm \sqrt{\frac{R \cdot C_n - L^2}{C(R^2 \cdot C_n - 4L)}}. \tag{15}$$

Ist der Eigenwiderstand R des Kreises gegen R_u vernachlässigbar, so erhält man für R_u die einfache Beziehung:

$$R_u = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C_n}}. \tag{16}$$

Solange der Lichtbogenwiderstand unterhalb dieses Wertes bleibt, ist das System aus Induktivität und Kapazität schwingungsunfähig.

Für den Fall, daß die Wurzel imaginär wird, formt man die Gleichung für den Ausgleichsstrom zweckmäßig um. Man bringt die Wurzeln der quadratischen Gleichung auf die Form:

$$w_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot m \tag{17}$$

worin
$$j = \sqrt{-1}$$

und
$$m = \sqrt{\frac{R + R_u}{L \cdot C_n \cdot R_u} - \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2 \cdot R_u \cdot C}\right)^2}. \tag{18}$$

Setzt man ferner

$$A = j(a_1 - a_2)$$
$$B = a_1 + a_2$$

so ergibt sich:

$$i_a = (A \cdot \sin mt + B \cdot \cos mt)\, e^{-\alpha t} \tag{19}$$

Gleichung (19) gilt ganz allgemein für i_a, i_L und i_C.

Zur Bestimmung der Konstanten A und B setzt man die für den Zeitpunkt $t = 0$ allgemein geltenden Bedingungen ein. Die Induktivität wird in diesem Augenblick einen Strom $i_{L,0}$ führen, während die aufgedrückte EMK den Wert e_0 besitzt, und der Widerstand R_u des Schalters noch Null ist.

Demgemäß gilt nach Gleichung (19) die Beziehung:

$$B = i_{L,0} \tag{20}$$

und nach (8)

$$e_0 = L \cdot \frac{d\, i_{L,0}}{dt} + R \cdot i_{L,0}. \tag{21}$$

Durch Differentiation der Gleichung (19) ergibt sich nach Einsetzen obiger Werte für t und B

$$\frac{d\,i_L}{dt} = m \cdot A - \alpha \cdot i_0. \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt demnach

$$A = \frac{e_0 + (L \cdot \alpha - R)\, i_{L,0}}{m \cdot L}$$

Nach vollendeter Unterbrechung des Schalterstromes wird $R_u = \infty$, und da dann $\alpha = \frac{R}{2L}$ ist, wird

$$A = \frac{e_0}{m \cdot L} - \frac{\alpha}{m} \cdot i_{L,0}. \tag{23}$$

Strom und Spannung der Parallelschaltung befolgen demnach nach dem Erlöschen des Lichtbogens die Gleichungen:

$$i_L = \left[\frac{e_0}{m \cdot L} \cdot \sin mt + i_{L,0} \cdot \left(\cos mt - \frac{\alpha}{m} \cdot \sin mt\right)\right] \cdot e^{-\alpha t} \tag{24}$$

und

$$v_L = v_C = \left[e_0\left(\cos mt + \frac{\alpha}{m} \cdot \sin mt\right) - i_{L,0}\left(m L + \frac{R^2}{4 \cdot m L}\right) \cdot \sin mt\right] e^{-\alpha t}. \tag{25}$$

Für kleine Werte von α, d. h. also bei geringer Dämpfung, lassen sich i_L und v_L in wesentlich einfachere Näherungsgleichungen fassen, die ein praktisch hinreichend genaues Bild von dem Ausgleichsvorgang geben. Da in diesem Falle angenähert gilt:

$$m = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_n}},$$

so lauten nunmehr die beiden Gleichungen

$$i_L = \left[\frac{e_0}{\sqrt{\frac{L}{C_n}}} \cdot \sin mt + i_{L,0} \cdot \cos mt\right] e^{-\alpha t} \tag{24a}$$

und

$$v_L = v_C = \left[e_0 \cdot \cos mt - i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C_n}} \cdot \sin mt\right] e^{-\alpha t}. \tag{25a}$$

Führt die Spule Wechselstrom und erfolgt das Ausschalten in dem Augenblick, in dem der Strom i_L durch Null geht, so verschwinden in den beiden Gleichungen die Glieder mit $i_{L,0}$. Die Unterbrechungsspannung kann dann keinen höheren Wert als e_0 erreichen, das Abschalten erfolgt überspannungsfrei. Der Ausgleich erfolgt in der bekannten Form der „Kirchhoff-Thomsonschen Entladeschwingung“, die in der Hochfrequenztechnik die führende Rolle spielt. In Niederfrequenzkreisen tritt sie stets da auf, wo es zum Ausgleich überwiegend kapazitiver Belastungen kommt, so z. B. beim Ausschalten von Transformatoren mit daran hängenden unbelasteten Netzen, deren Ladestrom den gesamten Magnetisierungsstrom der Transformatoren überwiegt. Noch häufiger wird sie durch Erd- und Kurzschlüsse ausgelöst.

Strom- und Spannungsverlauf der freien Ausgleichsschwingung ergeben sich obiger Bedingung gemäß aus Gleichung 24a und 25a zu:

$$i_L = \frac{e_0}{m L} \cdot \sin mt\, e^{-\alpha t}$$

und

$$v_L = e_0 \cdot \cos mt\;\; e^{-\alpha t}.$$

Sie vermögen jedoch nur ein rohes Bild wiederzugeben, da in technischen Fällen, außer in Hochfrequenzkreisen, wohl stets eisenhaltige Spulen in Frage kommen. Hierbei tritt dann eine Verzerrung der sinus-Kurven ein.

Erfolgt das Ausschalten im Nullwert der Spannung, so erhält man

$$i_L = i_{L,0} \cdot \sin mt$$

und $$v_L = v_C = -i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C_n}} \cdot \sin mt\, e^{-\alpha t}.$$

Bei großer Eigenfrequenz m und geringer Dämpfung α ist der erste Scheitelwert dieser Gleichung sehr nahe:

$$v_m = -i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C_n}}, \tag{26}$$

der sich auch ohne weiteres aus der Energiegleichung für den Teilkreis aus L und C herleiten läßt. Da in den meisten Fällen weder die Größe von $i_{L,0}$, noch die von L bekannt ist, ist das Rechnen mit dieser Formel sehr erschwert. Unter Einführung von Mittelwerten läßt sich immerhin die Größenordnung der zu erwartenden Überspannung damit ermitteln.

Ausgleiche dieser Art sind stets dann zu erwarten, wenn der Magnetisierungsstrom der abzuschaltenden Maschinen oder Apparate größer als der kapazitive Ladestrom der zu- und abgehenden Leitungen ist. Wie die Gleichung leicht erkennen läßt, treten hierbei beträchtliche Überspannungen auf. Ein funkenfreies Abschalten ist in diesem Falle nicht möglich. Während im ersten Sonderfall mit Beginn der Unterbrechung die Spannung am Schalter

$$v_u = e - v_L$$

gleich Null sein muß, springt sie im zweiten sofort auf den vollen Betrag der induktiven EMK, die durch Lichtbogenbildung den Kontakt mit der Stromquelle noch weiter aufrecht erhält. Der Vorgang wird demnach aperiodisch beginnen und erst nach Überschreiten des kritischen Widerstandes $R_u = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C_n}}$ in einer Schwingung enden.

Während bei Wechselstrombetrieb beide Grenzfälle möglich sind, ist der erste bei Gleichstrom ausgeschlossen.

Von größter Bedeutung ist ein weiterer Sonderfall, der weitaus die günstigsten Bedingungen für einen funken- und überspannungsfreien Ausgleich gewährt. Er tritt dann ein, wenn die wattlos nacheilende Stromkomponente der Induktivität gleich der wattlos voreilenden der Kapazität wird. Man bezeichnet ihn allgemein als „Stromresonanz". Die Eigenfrequenz des abzutrennenden Schwingungsgebildes stimmt dann mit der Betriebsfrequenz der aufgedrückten Spannung überein. Es ist mithin:

$$m = m_0$$

und $$i_L \cdot m_0 \cdot L = \frac{i_c}{m_0 \cdot C}.$$

Im Schalter fließt dann nur noch der Verluststrom des Kreises, also ein reiner Wattstrom, der beim Durchgang durch Null abgeschnitten wird. Hierbei entspricht die auftretende Höchstspannung wie im Fall I dem Augenblickswert der aufgedrückten EMK beim Öffnen des Schalters. Das überspannungsfreie Abschalten dieser Art läßt sich bei technischen Transformatoren mit angeschlossenem leerlaufendem Netz schon bei sehr geringer Ausdehnung des letzteren bewerkstelligen. Die hervorragendste Anwendung dieses Sonderfalles in Hochspannungsnetzen wurde durch Einbau von Erdschlußdrosselspulen [1]) zur Verhinderung von Erdschlußlichtbögen vollzogen.

Bisher wurde die Kapazität immer an einer Stelle zusammengedrängt angenommen. Das darf stets dann geschehen, wenn die Kapazität durch ein Sekundärnetz eines Transformators oder durch ein Sammelschienensystem dargestellt wird. Handelt es sich jedoch um das Abtrennen induktiv belasteter Leitungen, so ist die Kapazität gleichmäßig auf die Leitungslänge verteilt. Es tritt dann eine starke Ver-

[1]) Petersen ETZ 1919 S. 5.

zerrung der Strom- und Spannungskurven ein, die bereits mehrfach[1]) untersucht wurden. Sie sind für die Kabeltelegraphie von besonderer Bedeutung.

β) Gemischt nichtschwingender-schwingender Energieaustausch mit einzelnen Funkenentladungen.

Bei den bisherigen Betrachtungen war vorausgesetzt, daß nach erfolgtem Verlöschen des Ausschaltlichtbogens der Schalterstrom dauernd unterbrochen bleiben sollte. Diese Voraussetzung trifft aber in vielen Fällen nicht zu. Es kann vielmehr nach erfolgter Unterbrechung bei genügend hoher Schalterspannung zu erneuter Zündung kommen, wodurch der Vorgang wesentlich verwickelter wird. Man bezeichnet dieses selbsttätige Wiedereinschalten des Kreises in der Hochspannungstechnik allgemein als „Rückzündung", ein Ausdruck, der bereits in der Hochfrequenztechnik für das Wiederzünden eines Lichtbogens bei einem dem aufgedrückten entgegengetetzten Potential gebraucht wird. Es wäre demnach wohl angebracht, an Stelle obiger Bezeichung den allgemeinen Ausdruck „Kondensatorentladung" zu setzen. Tatsächlich sind die Vorgänge, wie sie beim Wiederzünden der Schaltstrecke eintreten, nichts anderes als Entladungen der Kapazitäten über Funken- bzw. Lichtbogenbildung.

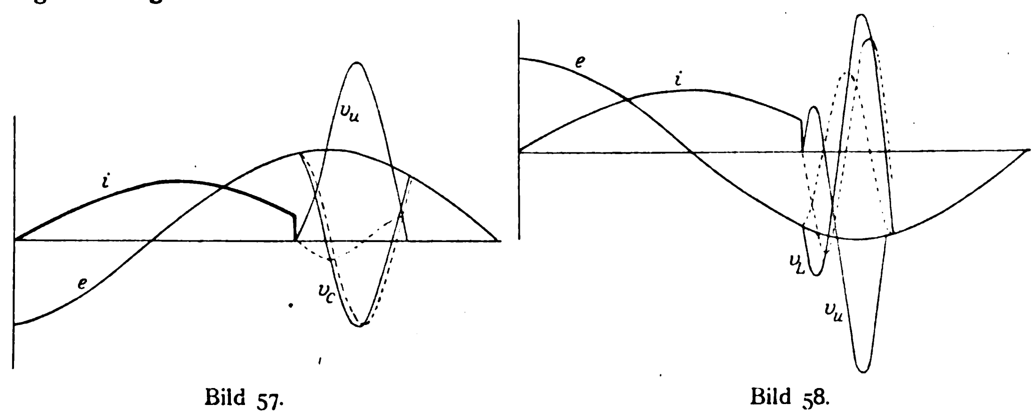


Bild 57. Bild 58.

Maßgebend für die Möglichkeit derartiger Entladungen ist die Entwicklung der Spannung an den Schaltkontakten nach dem erstmaligen Löschen des Lichtbogens. Gemäß der früheren Ableitung war:

$$v_u = e - v_C.$$

Handelt es sich um das Ausschalten von Wechselstrom, so lautet die Gleichung unter Berücksichtigung der Gleichung (25 a)

$$v_u = E_m \cdot \sin m_0 \cdot (T_0 + t) - \left[E_m \cdot \sin m_0 \cdot T_0 \cdot \cos mt + i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sin mt \right] e^{-\alpha t} \quad (27)$$

Den früheren Betrachtungen entsprechend, ist es auch hier angebracht, zwei Grenzfälle zu unterscheiden, je nachdem der Gesamtstrom des abzutrennenden Kreises vor- oder nacheilt. Da im ersten Fall das Glied $i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ von untergeordneter Bedeutung ist, so ist die Höhe von e im Augenblick des Ausschaltens maßgebend für das Auftreten von Kondensatorentladungen. Bild 57 gibt den Verlauf der Spannungen für eine der zahlreichen Möglichkeiten dieser Art wieder.

Der Einfluß des Unterbrechungslichtbogens ist dabei unberücksichtigt geblieben. Bei der Annahme des Bildes 57 ist nach dem ersten Unterbrechen des Stromes eine Aufrechterhaltung des Lichtbogens nicht möglich, wohl aber kann eine Neu-

[1]) K. W. Wagner ETZ 1911, S. s. 899 ff. Elektromagn. Ausgleichsvorgänge.

zündung erfolgen, da bei dem rasch erfolgenden Spannungsanstieg v_u Werte von sehr nahe $2 \cdot E_m$ erreicht. Lage des Unterbrechungspunktes, Schaltgeschwindigkeit und Frequenz der Entladeschwingung sind demnach außer der Höhe der Betriebsspannung mitbestimmend für die Möglichkeit von Kondensatorentladungen.

Noch viel höhere Überspannungen sind im zweiten Fall zu erwarten, in dem die induktive Ausschaltspannung $i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sin mt\, e^{-\alpha t}$ beträchtliche Werte erreichen kann. Von Wichtigkeit ist hier, daß der Bogen zunächst erlischt und die Schaltstrecke genügend entjonisiert wird, damit die unmittelbare Aufrechterhaltung des Bogens nicht möglich ist. In Bild 58 ist ein solcher Fall wiedergegeben. Der Entladevorgang kann sowohl aperiodisch als auch periodisch erfolgen und sich mehrfach wiederholen. Eine genaue zeichnerische Darstellung des Vorganges ist wegen der Unkenntnis der Vorgänge im Lichtbogen sehr erschwert. Es sei daher auf die oszillographischen Aufnahmen im experimentellen Teil verwiesen. Der Versuch unter Bedingungen, wie sie die Praxis stellt, gibt hier die besten Anhaltspunkte.

Für Gleichstrom gelten ähnliche Betrachtungen wie im vorliegenden Fall. Die Schalterspannung verläuft hierbei nach der Gleichung:

$$v_u = E - \left(E \cdot \cos mt - i_{L,0} \cdot \sqrt{\frac{L}{C_n}} \cdot \sin mt\right) e^{-\alpha t}.$$

γ) Hochfrequente Oszillation mit nachfolgendem mittelfrequenten Ausklingen der Energie.

In dem bisher behandelten Kreise waren nur Schwingungen von der durch L und C_n bedingten Eigenfrequenz möglich. Die gegebenenfalls eintretenden Kondensatorentladungen waren aperiodisch angenommen worden. Es kann nun aber auch der Fall eintreten, daß letztere oszillierend verlaufen. Zum Unterschiede gegen oben müssen diese Schwingungen von sehr hoher Frequenz sein, die entsprechend dem Schaltbild 55 durch die Reihenschaltung von C_n und der Summe von Maschinen- und Leitungsinduktivität bestimmt wird. Je kleiner diese Frequenz und je größer die Dämpfung des Funkenkreises ist, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit einer aperiodischen Entladung. Wird dagegen, wie in Bild 56, die Maschineninduktivität durch eine Kapazität C_s — Sammelschienen, Netz, Kabel — überbrückt, so wird nicht nur die Frequenz erhöht, sondern gleichzeitig auch die Dämpfung verringert. Dann sind hochfrequente Oszillationen um so sicherer zu erwarten. Von größter Bedeutung ist hier noch die Tatsache, daß selbst außerordentlich kleine Kapazitäten von C_n zur Wirkung gelangen können, vorausgesetzt, daß dabei $C_s > C_n$ ist.

Auch bei dieser Anordnung der Kapazitäten tritt die größte Gefährdung der Induktivität L dann ein, wenn der Schalterstrom wattlos nacheilend ist, also bei $m_0 \cdot L > \frac{1}{m_0 C}$. Die Unterbrechung beginnt hierbei wie oben mit einem Lichtbogen, der jedoch infolge des Endladestromes von C_n über C_s sehr rasch erlischt. Nach dem Löschen lädt sich die Kapazität im Tempo der Eigenschwingung von L und C_n bis zur Zündspannung auf, der Bogen zündet wieder und C_n entlädt sich von neuem. Das Spiel wiederholt sich so lange, bis die Schaltkontakte sich so weit entfernt haben, daß ein Wiederzünden nicht mehr möglich ist. Mit dem letzten Löschen des Bogens klingt die noch vorhandene Feldenergie der Spule nach Maßgabe der Dämpfung des Kreises aus L und C_n in diesem aus.

Bei genügend kleinen Kapazitäten, die eine entsprechend kurze Löschzeit des Bogens bedingen, treten hier ähnliche Schwingungen auf, wie sie bereits in den



Arbeiten von Simon, Barkhausen, K. W. Wagner, Poulsen usw. unter dem Namen Lichtbogenschwingungen ausführlich behandelt worden sind.

Die Bedingungen, unter welchen der Bogen schwingungsfähig wird, sind naturgemäß dieselben, wie sie aus der Hochfrequenztechnik hinreichend bekannt sind. Eine der wichtigsten ist eine stark fallende statische Charakteristik des Bogens, die insbesondere bei Ölschaltern infolge guter Kühlung der Elektroden fast stets gegeben ist. Außerdem ist eine möglichst geringe Lichtbogenhysteresis von Bedeutung. Auch diese Bedingung wird gerade in Ölschaltern dadurch erfüllt, daß durch die infolge Zersetzung des Öles beim Brennen des Lichtbogens entstehenden Gase eine rasche Entjonisation der Schaltstrecke eintritt.

Größe der abzuschaltenden Stromstärke, Zahl der Unterbrechungsstellen und Schaltgeschwindigkeit bedingen weiterhin Möglichkeit und Dauer der Schwingungen. Gerade sie beeinflussen, abgesehen von der Kühlung, die Steilheit der Lichtbogencharakteristik. Diesem Umstande mag es wohl auch zuzuschreiben sein, daß, wie die Beobachtungen der Praxis[1]) lehren, größere Stromstärken sich häufig überspannungsfrei abschalten lassen, während gerade kleinere beim Unterbrechen in der Regel beträchtliche Überspannungen zeigen. Die experimentellen Untersuchungen konnten aus Mangel an Mitteln in dieser Richtung leider nicht verfolgt werden.

Ob außer bei Ölschaltern auch bei der Unterbrechung in Luft Lichtbogenschwingungen auftreten, wurde nicht untersucht, da in erster Linie die Vorgänge beim Schalten unter Öl interessierten. Doch erwähnt K. W. Wagner in seiner vorzüglichen Arbeit über den elektrischen Lichtbogen bereits einen Fall, in dem es sich allerdings nicht um einen normalen Schalter, sondern um einen Hörnerableiter handelt, bei welchem ebenfalls hochfrequente Lichtbogenschwingungen auftreten können.

Über die Form der Schwingungen lassen sich schwer genaue Angaben machen. Deis treng mathematischen Behandlung sind sie kaum zugänglich. Aufnahmen mit der Braunschen Röhre sind wohl möglich; aber der Vorgang ist von so kurzer Dauer, daß er sich nicht ohne weiteres photographisch festhalten läßt. Man müßte also periodisch mehrere Ein- und Ausschaltungen vornehmen, um das Bild aufnehmen zu können. Davon wurde jedoch mangels geeigneter Vorrichtungen bei den Versuchen abgesehen. Ganz allgemein kann gesagt werden, daß infolge der steten Verlängerung des Lichtbogens der zweite Teil der Periode der Schwingung sich ändert. Von einer rein periodischen Oszillation kann also keine Rede sein. Trotzdem kommen die Eigenschwingungen des aus L_n, C_n, C_s gebildeten Hochfrequenzkreises voll zur Entwicklung. Mit zunehmender Löschperiode geht die Lichtbogenschwingung in gedämpfte Wellenzüge (Funkenentladung) über. Die Eigenfrequenzen lassen sich leicht mit einem Resonanzwellenmesser nachweisen und messen. Zur Kennzeichnung der Art der Schwingungen läßt sich das umlaufende Heliumröhrchen mit Erfolg verwenden.

Einen guten Anhalt betreffs des Verlaufs der Schwingungen vermag ein Vergleich mit den Vorgängen im Mittelfrequenzkreise, allerdings unter Verwendung einer etwas anderen Schaltung, zu geben. H. Th. Simon, der Altmeister der Lichtbogentheorie, bringt in seiner hervorragenden Arbeit: „Zur Theorie des selbsttönenden Lichtbogens"[2]) in Bild 15 und 16 zwei Oszillogramme, die zur Vorstellung der Vorgänge in Hochfrequenzkreisen sehr wohl geeignet sind. Auch seine theoretischen Betrachtungen über das Auftreten von Schwingungen bei abnehmender Stromstärke bzw. zunehmender Lichtbogenlänge lassen sich ohne weiteres auf die beim Schalten eintretenden Erscheinungen übertragen. Die Abweichung seiner Versuchsschaltung von der hier gebrauchten Anordnung hat dabei keine nennenswerte Bedeutung.

---

[1]) Petersen, Hochspannungstechnik, II. Aufl. im Ersch.

[2]) Phys. Zeitschr., 7. Jahrg., Nr. 13, S. 444.

Die obigen Betrachtungen gelten allgemein für das Schalten bei Gleich- und Wechselstrom. Es scheint sogar, daß die Bedingungen für das Schwingen bei letzterem günstiger liegen als bei ersterem, da dort das Einsetzen der Entladung infolge des natürlichen Durchgangs des Stromes durch Null noch erleichtert wird.

Über die Höhe der bei Lichtbogen- oder Funkenentladungen auftretenden Spannungen ist zu bemerken, daß sie außerordentlich hohe Werte erreichen können. Denn da C_n sehr klein und die Unterbrechungsgeschwindigkeit des Stromes groß ist, wird auch $v_{g_1, C} = \sim \sqrt{\frac{L}{C_n}}$ hoch.

Außer der Induktivität selbst sind vor allem Stromwandler und ähnliche Apparate stark gefährdet, wenn sie in den Leitungen zwischen Schalter und Induktivität liegen. Abgesehen von beträchtlichen Überspannungen können hier noch besonders hohe Überströme auftreten.

Die höchste Überspannung an der Wicklung tritt dann ein, wenn die Eigenschwingung des Kreises $C_n L_n C_s$ in Resonanz mit derjenigen der Induktivität L kommt. Bei eisenhaltigen Spulen spielt der Eisenkern für die hochfrequenten Schwingungen eine ganz untergeordnete Rolle, da die durch sie hervorgerufenen Induktionen sehr gering sind. Infolge der Vormagnetisierung ändert sich lediglich etwas die Höhe der Eigenfrequenz.

Treten an Stelle der konzentrierten Kapazitäten verteilte, so ändert das auch hier an den angestellten Betrachtungen wenig. Nur die Kurvenform erscheint infolge auftretender Ober- oder Koppelschwingungen verzerrt. Auf den Leitungen muß dann meist mit nichtstationärer Strom- oder Spannungsverteilung gerechnet werden. Letzteres ist für die Lage von Meßwandlern oder dergleichen zu beachten.

Zum Schlusse dieser Betrachtungen sei noch erwähnt, daß auch der Fall eintreten kann, daß $C_n > C_s$ wird und C_s sehr klein ist. Dann liegt die größte Spannung, die jedoch stets niedriger sein muß als im vorhergehenden Fall, an C_s. Es kann dann zu Überschlägen am Sammelschienensystem oder an einem Generator kommen. Zweigen von demselben Sammelschienensystem unbelastete oder schwach belastete Leitungen ab, so können auch diese durch Mitschwingen (gegebenenfalls Resonanz) gefährdet werden.

Wird dagegen C_n wirkungslos, so wird, wie groß auch C_s sein mag, der Ausgleich meist aperiodisch oder mittelfrequent, d. h. mit der durch L und C_s bedingten Periode erfolgen.

C. Schutzmaßnahmen gegen die beim Ausgleich auftretenden Überspannungen.

Im Wechselstrombetriebe kommen hauptsächlich zwei Fälle vor, in denen das Abschalten großer Induktivitäten, insbesondere vermittels Ölschalter, in Frage kommt; einmal beim Ausschalten leerlaufender Transformatoren, das andere Mal beim Unterbrechen des Ständerstromes in stillstehenden Asynchronmotoren. Das zuverlässigste Mittel ist stets, zu verhüten, daß überhaupt Überspannungen entstehen können. Dies wird in erster Linie dadurch erreicht, daß man zwischen Strom und Spannung eine möglichst geringe Phasenverschiebung herstellt. Es sind dann beim natürlichen Nullwert des Stromes nur niedere Spannungswerte vorhanden, die ein Wiederzünden des Unterbrechungslichtbogens verhindern, sofern die Schaltgeschwindigkeit genügend groß ist. Man wird also Transformatoren tunlichst unter Last abschalten. Läßt sich das nicht bewerkstelligen, so bietet der Vorkontaktschalter den besten technischen Schutz. Abgesehen von der Senkung des Stromes und der Verschiebung der Phasenlage werden hochfrequente Schwingungen entweder ganz unterdrückt oder stark gedämpft. Gerade sie bilden eine weitaus größere Gefahr als die eigentlichen induktiven Unterbrechungsspannungen.



Beim Einschalten des Vorkontaktwiderstandes können natürlich ebenfalls Überspannungen auftreten, so daß dadurch der Größe der erstmaligen Absenkung des Stromes eine bestimmte Grenze gesetzt wird. Der Höchstwert dieser Überspannung läßt sich leicht ermitteln, wenn man berücksichtigt, daß jede Induktivität den ursprünglichen Beharrungszustand aufrecht zu erhalten sucht. Infolgedessen wird im ersten Augenblick nach dem Einschalten des Schutzwiderstandes R_v derselbe Strom fließen wie vorher. Am Widerstand erscheint demnach eine Spannung von $v_v = i_L \cdot R_v$, die nur durch eine entsprechende Spannungserhöhung an der Spule (L) aufgebracht werden kann. Da für technische Transformatoren die zulässige Überspannung den 1,5 bis 2 fachen Betrag der Betriebsspannung erreichen darf, so wäre damit

$$R_v = (1{,}5 \div 2) \cdot m_0 \cdot L_0,$$

worin $m_0 \cdot L_0$ den Scheinwiderstand des leerlaufenden Transformators bedeutet. Bei größeren Leistungen ist die Unterteilung des Vorkontaktwiderstandes in mehrere Stufen Voraussetzung für sicheres Schalten. Die erste Stufe wird hierbei zweckmäßig nicht über $R_{v,1} = m_0 \cdot L_0$ gewählt.

Nach Angaben von W. Petersen[1]) haben sich Schutzwiderstände von der Größe

$$R_v = (0{,}8 \div 2)\, m_0 \cdot L_0$$

in der Praxis gut bewährt. Die kleinen Werte gelten dabei für hochgesättigte Transformatoren mit sehr spitzer Magnetisierungskurve und infolgedessen hohen Scheitelwerten. Erreicht R_v den kritischen Wert von $2 \cdot \sqrt{\frac{L_n}{C_n}}$, so verhindert er das Entstehen jeder Schwingung im Kreise $C_n L_n C_s$ (Bild 55).

Bei Asynchronmotoren kann der Vorkontaktwiderstand in Wegfall kommen, wenn der Läufer beim Abschalten des Ständers über einen Ohmschen Widerstand geschlossen bleibt. Die Größe des letzteren kann nach einer von Rüdenberg ermittelten Formel berechnet werden. Sie läßt sich aber auch aus der für die Parallelschaltung von L und R_v geltenden Differentialgleichung ersehen. Es gilt bekanntlich die Beziehung:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + i R = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt für den Fall, daß der Strom im Augenblick der Unterbrechung die Größe i_0 besitzt, die Klemmenspannung zu

$$v_k = i_0 \cdot R_v \cdot e^{-\frac{R_v}{L} \cdot t}.$$

Da nun

$$J_{0,m} = \frac{E_m}{m_0 \cdot L_0}$$

wird der Höchstwert:

$$v_{k,m} = \frac{E_m}{m_0 \cdot L_0} \cdot R_v$$

Erreicht also R_v den Betrag von $m_0 L_0$, so ist $v_k = E_m$, d. h. es tritt keine Spannungserhöhung auf. Liegt mithin im Läuferkreis des Motors ein Widerstand, der die Leerlaufscheinleistung desselben aufzunehmen vermag, so erfolgt das Ausschalten überspannungsfrei.

Das Gesagte gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß das Schalten funkenfrei vor sich geht, oder besser gesagt, daß kein Wiederzünden des Funkens eintritt, was praktisch nicht immer der Fall ist. Die Rüdenbergschen Oszillogramme (l. c.) zeigen gerade bei kleineren Läuferwiderständen „eine merkbare schnelle Zackenbildung", d. h. es traten hier zweifellos hochfrequente Schwingungen auf. Der Oszillograph mußte hier selbstverständlich versagen. Über die Höhe der hoch-

[1]) l. c.

frequenten Spannungen läßt sich daraus nichts entnehmen, ebensowenig über die Höhe der Frequenz. Da aber höhere induktive Unterbrechungsspannungen nicht mehr in Frage kommen, so ist auch die Gefahr für den Motor selbst gering, dagegen bleiben Stromwandler und Apparate, die in den Zuleitungen liegen, immer noch gefährdet. Jedenfalls ist auch hier die Anwendung von Kontaktschaltern sehr zu empfehlen.

Im Gleichstrombetriebe ist man seit langem zu anderen Hilfsmitteln übergegangen. Hier sind vor allem zwei Fälle zu beachten, in denen Überspannungen die Wicklungen von Maschinen gefährden können: Einmal beim Ausschalten von Erregerwicklungen, das andere Mal beim plötzlichen Unterbrechen des Stromes in Hochspannungsmaschinen. Für den ersten Fall hat sich das „funkenfreie" Abschalten, wobei die Wicklung mit dem Ausschalten in sich oder über einen Widerstand geschlossen wird, am besten bewährt. Im anderen sucht man die Ankerwicklung durch Parallelkondensatoren zu schützen, deren Schutzwert sich leicht aus der Formel $e_{ü} = i \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ ersehen läßt. Doch ist sehr wohl darauf zu achten, daß die gewählte Kapazität tatsächlich dieser Gleichung genügt [1]).

Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck, die Ursachen der beim Ausschalten von leerlaufenden Asynchronmotoren und Transformatoren auftretenden Überspannungen zu erforschen. Da die streng mathematische Behandlung der Frage ohne genaue Kenntnisse der physikalischen Vorgänge nicht durchführbar ist, wird zum Versuch gegriffen. Rein physikalische Überlegungen zeigen, daß die parallel zur abzuschaltenden Induktivität liegende Kapazität die führende Rolle in bezug auf die Art des Energieausgleiches spielt. Je nach der Größe der Parallelkapazität verläuft dieser:

1. rein aperiodisch,
2. unter hochfrequenten Schwingungen, die meist in mittelfrequenten enden,
3. gemischt nichtschwingend-schwingend, häufig mit einzelnen Funkenentladungen beim Übergang,
4. rein oszillatorisch, und zwar mittel- oder niederfrequent.

Im zweiten und dritten Falle treten die höchsten Überspannungen und Gefährdungen der Wicklungen auf. Dagegen bietet der vierte Fall die Möglichkeit völlig überspannungsfreien Abschaltens, sofern „Stromresonanz" vorliegt. Den weitaus besten technischen Schutz gegen Überspannungen bei Schaltvorgängen gewährt der Vorkontaktschalter, der eine Dämpfung bzw. völlige Unterdrückung der hochfrequenten Schwingungen gestattet.

[1]) Siehe auch Rogowski l. c.

Berichtigung.

In der Arbeit M. Toepler: „Die Grundgesetze der elektrischen Gleiterscheinungen" hat Bild 13 auf Seite 180 die Zeit t als Abszisse und die Gleitlänge f (nicht aber die Polspannung p) als Ordinate.



Archiv für Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Prof. Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen
Verlag von Julius Springer in Berlin

X. Band | 6. März 1922 | 12. Heft

Inhaltsverzeichnis.

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift" nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift" infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden erbeten unter der Adresse: Professor Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

Das **Archiv für Elektrotechnik** erscheint in Heften, von denen 12 einen Band bilden. Der Preis des Bandes beträgt M. 80,—, für Abonnenten der „Elektrotechnischen Zeitschrift" sowie Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins M. 60,—. Der Bezug kann durch jede Buchhandlung, sowie durch unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstr. 23/24.
Fernsprecher: Amt Kurfürst, 6050, 6053. — Drahtanschrift: Springerbuch-Berlin.
Reichsbank-Giro-Konto u. Deutsche Bank Berlin, Dep.-Kasse C. Postscheck-Konto für Bezug von Zeitschriften und einzelnen Heften: Berlin Nr. 20120 Julius Springer, Bezugsabteilung für Zeitschriften; für Anzeigen und Beilagen: Berlin Nr. 118935, Julius Springer, Anzeigenabteilung, für alle übrigen Zahlungen Berlin Nr. 11100 Julius Springer.

Voranzeige.

In den nächsten Heften des Archivs für Elektrotechnik werden voraussichtlich folgende Arbeiten erscheinen:

Düll, Über den Kappschen Vibrator.

Heegner, Über Röhrensender.

Grösser, Die Frequenzsprünge des Zwischenkreisröhrensenders bei kapazitiver Kopplung.

Grösser, Über die Konzentrierung des Fluoreszensflecks einer Braunschen Röhre.

Behnken, Momentaufnahmen mit der Braunschen Röhre.

v. Kármán, Turbulenter Wärmeübergang.

v. Stritzl, Nomographische Methoden bei Berechnung von Gleichstrommaschinen.

Schumann, Die elektrische Festigkeit der Luft.

Schwaiger, Über elektrische Festigkeitsrechnungen.

Trefftz, Über Differenzengleichungen.

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg.